離散数学入門c レポート課題 No. 1
解答例

1. (a) $A \cap B = \{3\}$.
   (b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
   (c) $\overline{A} = \{4, 5, 6\}$.
   (d) $A \cap \overline{B} = \{1, 2\}$.
2. (a) $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
   (b) $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$.
3. (a) $A = \{3 \times 1, 3 \times 2, \ldots, 3 \times 66\}$ だから，$\underline{n(A) = 66}$ である．
   (b) $B = \{5 \times 1, 5 \times 2, \ldots, 5 \times 40\}$ だから，$\underline{n(B) = 40}$ である．
   (c) $A \cap B = \{n \mid n \in U, n = 15k, k \in \mathbb{N}\}$ である．よって，$A \cap B = \{15 \times 1, 15 \times 2, \ldots, 15 \times 13\}$ だから，$\underline{n(A \cap B) = 13}$ である．
   (d) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 66 + 40 - 13 = \underline{93}$.
   (e) $n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 200 - 40 = \underline{160}$.
   (f) $n(\overline{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 13 = \underline{27}$.
4. (a) 否定：$\exists x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}$.
   $x = \sqrt{2}$ とすれば，$x \in \mathbb{R}$ かつ $x \notin \mathbb{Q}$ だから，真理値は 真 である．
   (b) 否定：$\forall x \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{R}$.
   すべての整数は実数だから，真理値は 偽 である．
5. $n \in \mathbb{N}$ とする．「n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数である」の逆，裏，対偶を述べよ．また，それらがすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つかどうか判定せよ．
   逆：「n が 3 の倍数ならば，n は 6 の倍数である」
   $n = 3$ とすると，n は 3 の倍数であるが，6 の倍数ではないから，「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，n が 3 の倍数ならば，n は 6 の倍数である」は 成り立たない．
   裏：「n が 6 の倍数でないならば，n は 3 の倍数ではない」
   $n = 3$ とすると，n は 6 の倍数ではないが，3 の倍数であるから，「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，n が 6 の倍数でないならば，n は 3 の倍数ではない」は 成り立たない．
   対偶：「n が 3 の倍数でないならば，n は 6 の倍数ではない」
   n が 6 の倍数であると仮定すると，$n = 6k$（k は整数）と書ける．このとき，$n = 3 \cdot 2k$ だから，n は 3 の倍数であり，n が 3 の倍数でないことに反する．よって背理法により，「すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，n が 3 の倍数でないならば，n は 6 の倍数ではない」は 成り立つ．
6. (a) 任意の $y \in \mathbb{Z}$ に対して，$x = -y + 1$ とすると，$f(x) = f(-y + 1) = -(-y + 1) + 1 = y$ となる．よって，f は全射である．
   また，$a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ に対して，$f(a_1) = f(a_2)$ であると仮定すると，$-a_1 + 1 = -a_2 + 1$ となる．よって，$a_1 = a_2$ であるから，f は単射である．
   f の逆写像は，$\underline{f^{-1}(x) = -x + 1}\big(= f(x)\big)$ である．実際，$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 1) = -(x + 1) + 1 = x$ だから，$f \circ f$ は $\mathbb{Z}$ 上の恒等写像である．
   任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して，$g(x) = 2x$ は偶数だから，$g(x) = 1$ となる $x \in \mathbb{Z}$ は存在しない．よって，g は全射ではない．

また，$a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ に対して，$g(a_1) = g(a_2)$ であると仮定すると，$2a_1 = 2a_2$ となる．よって，$a_1 = a_2$ であるから，$\underline{g\text{ は単射である}}$.

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = \underline{-2x+1}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x+1) = 2(-x+1) = \underline{-2x+2}$.

7. (反射律)：任意の $x \in A$ に対して，$x - x = 0$ は 3 の倍数だから，$x \equiv x \pmod 3$ である．

(対称律)：$x, y \in A$ が $x \equiv y \pmod 3$ を満たすとする．このとき，$x - y$ は 3 の倍数だから，$y - x = -(x-y)$ も 3 の倍数である．よって，$y \equiv x \pmod 3$ である．

(推移律)：$x, y, z \in A$ が $x \equiv y \pmod 3$ かつ $y \equiv z \pmod 3$ を満たすとする．このとき，$x - y, y - z$ は 3 の倍数だから，$x - z = (x-y) + (y-z)$ も 3 の倍数である．よって，$x \equiv z \pmod 3$ である．

以上より，関係 R は同値関係である．

8.
$$\sigma \circ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$