対称空間上の符号理論における対蹠集合

奥田隆幸 (広島大)
栗原大武氏 (北九州高専) との共同研究内容を含む

2017/9/10
研究集会「対称空間論とその周辺」
〜田崎博之先生の還暦を記念して〜
於 つくばセンター

- M : 連結コンパクト対称空間

Definition 1.

コンパクト対称空間 M の二点 x, y が対蹠的 (antipodal) であるとは

$$s_x(y) = y \quad (\iff s_y(x) = x)$$

となること.

Definition 2 (Chen–長野 [Trans. Amer. Math. Soc (1988)]).

コンパクト対称空間 M の部分集合 X が対蹠的 (antipodal) であるとは X の任意の二点が対蹠的であること.

今日の内容:

対蹠集合の研究は符号理論としても面白い！

今日の内容:

対蹠集合の研究は符号理論としても面白い！

- 対称空間上の符号理論と対蹠集合.
- 対称 R 空間上の大対蹠集合についての組合せ論的考察 (栗原大武氏との共同研究).

今日の内容:

対蹠集合の研究は符号理論としても面白い！

- 対称空間上の符号理論と対蹠集合.
- 対称 R 空間上の大対蹠集合についての組合せ論的考察 (栗原大武氏との共同研究).

(広い意味での) 符号理論

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Definition 3.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Problem (符号理論の中心的問題):

固定された $A \subset I$ について, 極大な A-符号を分類せよ.

(広い意味での) 符号理論

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Definition 3.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Problem (符号理論の中心的問題):

固定された $A \subset I$ について, 極大な A-符号を分類せよ.

(広い意味での) 符号理論

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Definition 3.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Problem (符号理論の中心的問題):

固定された $A \subset I$ について, 極大な A-符号を分類せよ.

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Definition 4.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Example A (エラー訂正符号):

- $M = \mathbb{F}_2^n$.
- $I = \{0, \ldots, n\}$.
- $R : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \{0, \ldots, n\}$: Hamming 距離 (異なる成分の数を数える).

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Definition 4.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Example A (エラー訂正符号):

- $M = \mathbb{F}_2^n$.
- $I = \{0, \ldots, n\}$.
- $R : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \{0, \ldots, n\}$: Hamming 距離 (異なる成分の数を数える).

Definition 5.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Example A (エラー訂正符号):

- $M = \mathbb{F}_2^n$.
- $I = \{0, \ldots, n\}$.
- $R : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \{0, \ldots, n\}$: Hamming 距離 (異なる成分の数を数える).

$X \subset \mathbb{F}_2^n$ が

$$k\text{-エラー訂正符号} \iff A_k\text{-符号}.$$

ただし $A_k := \{0\} \cup [2k+1, n]$.

Definition 5.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Example A (エラー訂正符号):

- $M = \mathbb{F}_2^n$.
- $I = \{0, \ldots, n\}$.
- $R : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \{0, \ldots, n\}$: Hamming 距離 (異なる成分の数を数える).

$X \subset \mathbb{F}_2^n$ が

$$k\text{-エラー訂正符号} \iff A_k\text{-符号}.$$

ただし $A_k := \{0\} \cup [2k+1, n]$.

Definition 6.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Example B (接吻数問題):

- $M = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
- $I = [-1, 1]$.
- $R : S^{n-1} \times S^{n-1} \to [-1, 1], (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n}$: $\mathbb{R}^n$ の内積.

$X \subset S^{n-1}$ が

$$\text{接吻配置} \iff A_{\pi/3}\text{-符号}.$$

ただし $A_{\pi/3} := [-1, 1/2] \cup \{1\} = [-1, \cos \pi/3] \cup \{1\}$.

Definition 6.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Example B (接吻数問題):

- $M = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
- $I = [-1, 1]$.
- $R : S^{n-1} \times S^{n-1} \to [-1, 1], (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n}$: $\mathbb{R}^n$ の内積.

$X \subset S^{n-1}$ が

$$\text{接吻配置} \iff A_{\pi/3}\text{-符号}.$$

ただし $A_{\pi/3} := [-1, 1/2] \cup \{1\} = [-1, \cos \pi/3] \cup \{1\}$.

Definition 6.

A を I の部分集合とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A$$

を満たすことをいう.

Example B (接吻数問題):

- $M = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
- $I = [-1, 1]$.
- $R : S^{n-1} \times S^{n-1} \to [-1, 1], (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^n}$: $\mathbb{R}^n$ の内積.

$X \subset S^{n-1}$ が

$$\text{接吻配置} \iff A_{\pi/3}\text{-符号}.$$

ただし $A_{\pi/3} := [-1, 1/2] \cup \{1\} = [-1, \cos \pi/3] \cup \{1\}$.

例: S^1 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^1$ の最大濃度 (=: 2 次元接吻数) は？

A. 6 (正六角形の頂点集合 (共役を除いて一意))

例: S^2 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^2$ の最大濃度 (=: 3 次元接吻数) は？

A. 12 (例えば正二十面体の頂点集合 (一意ではない))

例: S^1 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^1$ の最大濃度 (=: 2 次元接吻数) は？

A. 6 (正六角形の頂点集合 (共役を除いて一意))

例: S^2 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^2$ の最大濃度 (=: 3 次元接吻数) は？

A. 12 (例えば正二十面体の頂点集合 (一意ではない))

例: S^1 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^1$ の最大濃度 (=: 2 次元接吻数) は？

A. 6 (正六角形の頂点集合 (共役を除いて一意))

例: S^2 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^2$ の最大濃度 (=: 3 次元接吻数) は？

A. 12 (例えば正二十面体の頂点集合 (一意ではない))

例: S^1 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^1$ の最大濃度 ($=: 2$ 次元接吻数) は？

A. 6 (正六角形の頂点集合 (共役を除いて一意))

例: S^2 上の接吻数問題

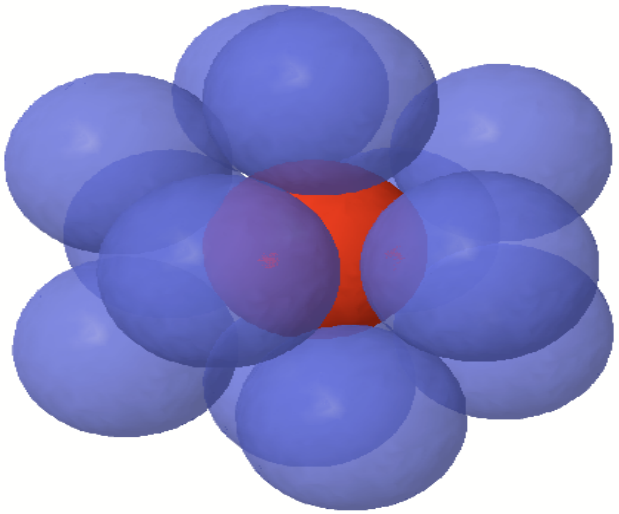
接吻配置 $X \subset S^2$ の最大濃度 ($=: 3$ 次元接吻数) は？

A. 12 (例えば正二十面体の頂点集合 (一意ではない))

例: S^2 上の接吻数問題

接吻配置 $X \subset S^2$ の最大濃度 ($=: 3$ 次元接吻数) は？

A. 12 (例えば正二十面体の頂点集合) [1]



Rem: 13 でないことは 17 世紀末 (Newton vs Gregory) から 20 世紀中盤まで 350 年近くの未解決問題だった.

[1] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/8f/Kissing-3d.png

Example B (接吻数問題):
n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 τ_n := 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =?$ $(40 \sim 44)$
- $\tau_6 =?$ $(72 \sim 78)$
- $\tau_7 =?$ $(126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example B (接吻数問題):

n 次元接吻数 $\tau_n :=$ 接吻配置 ($A_{\pi/3}$-符号) in S^{n-1} の最大濃度

- $\tau_2 = 6$: 一意 (A_2 格子)
- $\tau_3 = 12$ [Schütte–van der Waerden (1953)]:
  一意でない (正二十面体など)
- $\tau_4 = 24$ [Musin (2003)]:
  一意? (D_4 格子)
- $\tau_5 =? \ (40 \sim 44)$
- $\tau_6 =? \ (72 \sim 78)$
- $\tau_7 =? \ (126 \sim 134)$
- $\tau_8 = 240$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (E_8 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_9, \ldots, \tau_{23}$: open problems
- $\tau_{24} = 196560$ [Levenshtein etc. (1979)]:
  一意 (Leech 格子) [Bannai–Sloan (1981)]
- $\tau_{25}, \ldots$: open problems

Example C (等角直線族):

- $M = P(\mathbb{R}^n)$, $I = [0,1]$.
- $R : P(\mathbb{R}^n) \times P(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$, $(l_1, l_2) \mapsto \cos(\theta(l_1, l_2))$
  (ただし $\theta(l_1, l_2) \in [0, \pi/4]$ は直線 l_1, l_2 のなす角度とする)

$X \subset P(\mathbb{R}^n)$ が

$$\theta\text{-等角直線族} \iff A_\theta\text{-符号}$$

ただし $A_\theta = \{\cos\theta, 1\}$.
最近の結果としては...

- Greaves–Koolen–Munemasa–Szollosi [J. Comb.Theory Ser A. (2016)]
- O.-Yu [European J. Comb. (2016)]

Example C (等角直線族):

- $M = P(\mathbb{R}^n)$, $I = [0,1]$.
- $R : P(\mathbb{R}^n) \times P(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$, $(l_1, l_2) \mapsto \cos(\theta(l_1, l_2))$
  (ただし $\theta(l_1, l_2) \in [0, \pi/4]$ は直線 l_1, l_2 のなす角度とする)

$X \subset P(\mathbb{R}^n)$ が

$$\theta\text{-等角直線族} \iff A_\theta\text{-符号}$$

ただし $A_\theta = \{\cos\theta, 1\}$.
最近の結果としては...

- Greaves–Koolen–Munemasa–Szollosi [J. Comb.Theory Ser A. (2016)]
- O.-Yu [European J. Comb. (2016)]

Example C (等角直線族):

- $M = P(\mathbb{R}^n)$, $I = [0,1]$.
- $R : P(\mathbb{R}^n) \times P(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$, $(l_1, l_2) \mapsto \cos(\theta(l_1, l_2))$
  (ただし $\theta(l_1, l_2) \in [0, \pi/4]$ は直線 l_1, l_2 のなす角度とする)

$X \subset P(\mathbb{R}^n)$ が

$$\theta\text{-等角直線族} \iff A_\theta\text{-符号}$$

ただし $A_\theta = \{\cos\theta, 1\}$.

最近の結果としては...

- Greaves–Koolen–Munemasa–Szollosi [J. Comb.Theory Ser A. (2016)]
- O.-Yu [European J. Comb. (2016)]

Example C (等角直線族):

- $M = P(\mathbb{R}^n)$, $I = [0,1]$.
- $R : P(\mathbb{R}^n) \times P(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$, $(l_1, l_2) \mapsto \cos(\theta(l_1, l_2))$
  (ただし $\theta(l_1, l_2) \in [0, \pi/4]$ は直線 l_1, l_2 のなす角度とする)

$X \subset P(\mathbb{R}^n)$ が

$$\theta\text{-等角直線族} \iff A_\theta\text{-符号}$$

ただし $A_\theta = \{\cos\theta, 1\}$.
最近の結果としては...

- Greaves–Koolen–Munemasa–Szollosi [J. Comb.Theory Ser A. (2016)]
- O.-Yu [European J. Comb. (2016)]

対称空間上の符号理論の定式化

符号理論に必要なもの (再掲):

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような $I, R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

対称空間上の符号理論の定式化

符号理論に必要なもの (再掲):

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような I, $R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

対称空間上の符号理論の定式化

符号理論に必要なもの (再掲):

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような I, $R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

対称空間上の符号理論の定式化

符号理論に必要なもの (再掲):

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような I, $R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

対称空間上の符号理論の定式化

符号理論に必要なもの (再掲):

- M, I : 集合.
- $R : M \times M \to I$: 写像.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような I, $R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような I, $R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

アイディア 1: M にリーマン計量が入っている状況では....

- $I := [0, \mathrm{diam}(M)]$.
- $R : M \times M \to [0, \mathrm{diam}(M)]$: 距離関数.

Rem: M のランクが高い場合は二点等質ではない. 特に距離だけで "二点の関係" を定義すると, 得られる情報が少ない.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような I, $R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

アイディア 1: M にリーマン計量が入っている状況では....

- $I := [0, \mathrm{diam}(M)]$.
- $R : M \times M \to [0, \mathrm{diam}(M)]$: 距離関数.

Rem: M のランクが高い場合は二点等質ではない. 特に距離だけで "二点の関係" を定義すると, 得られる情報が少ない.

Question: M を連結なコンパクト対称空間としたとき, どのような I, $R : M \times M \to I$ を考えたい？

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

アイディア 1: M にリーマン計量が入っている状況では....

- $I := [0, \mathrm{diam}(M)]$.
- $R : M \times M \to [0, \mathrm{diam}(M)]$: 距離関数.

Rem: M のランクが高い場合は二点等質ではない. 特に距離だけで "二点の関係" を定義すると, 得られる情報が少ない.

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

アイディア 1: M に G-不変計量が入っている状況では....

- $I := [0, \mathrm{diam}(M)]$.
- $R : M \times M \to [0, \mathrm{diam}(M)]$: 距離関数.

Rem: M のランクが高い場合は二点等質ではない. 特に距離だけで "二点の関係" を定義すると, 得られる情報が少ない.

アイディア 2: M に計量を決めなくても...

- $I := (\mathrm{diag}\, G) \backslash (M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

アイディア 2 は上に挙げた「要求」のもとで universal.

- G : the group of displacements on M.

  要求: $R : M \times M \to I$ は G-対角作用で不変であるべし.

アイディア 1: M に G-不変計量が入っている状況では....

- $I := [0, \mathrm{diam}(M)]$.
- $R : M \times M \to [0, \mathrm{diam}(M)]$: 距離関数.

Rem: M のランクが高い場合は二点等質ではない. 特に距離だけで "二点の関係" を定義すると, 得られる情報が少ない.

アイディア 2: M に計量を決めなくても...

- $I := (\mathrm{diag}\, G) \backslash (M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

アイディア 2 は上に挙げた「要求」のもとで universal.

今日は M を連結コンパクト対称空間としたとき,

- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

として考える.

これは以下の設定と同じこと:

- $I :=$ Weyl 群作用についての極大トーラスの基本領域 $\simeq ((\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M))$.
- $R : M \times M \to I$: 自然な写像.

Example D (実グラスマン多様体):

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.
- $R : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to I$
  それぞれに対応する直交射影作用素 on $\mathbb{R}^n$ を合成して, 固有値を大きい順に並べる.

今日は M を連結コンパクト対称空間としたとき,

- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

として考える.
これは以下の設定と同じこと:

- $I :=$ Weyl 群作用についての極大トーラスの基本領域 $\simeq ((\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M))$.
- $R : M \times M \to I$: 自然な写像.

Example D (実グラスマン多様体):

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.
- $R : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to I$
  それぞれに対応する直交射影作用素 on $\mathbb{R}^n$ を合成して, 固有値を大きい順に並べる.

今日は M を連結コンパクト対称空間としたとき,

- $I := (\mathrm{diag}\, G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

として考える.
これは以下の設定と同じこと:

- $I :=$ Weyl 群作用についての極大トーラスの基本領域 $\simeq ((\mathrm{diag}\, G)\backslash(M \times M))$.
- $R : M \times M \to I$: 自然な写像.

Example D (実グラスマン多様体):

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.
- $R : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to I$
  それぞれに対応する直交射影作用素 on $\mathbb{R}^n$ を合成して, 固有値を大きい順に並べる.

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

Definition 7 (再掲).

$A \subset I$ とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A.$$

Easy observation:

コンパクト対称空間上の対蹠集合は符号として定義可能.

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

Definition 7 (再掲).

$A \subset I$ とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A.$$

Easy observation:

コンパクト対称空間上の対蹠集合は符号として定義可能.

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

$A \subset I$ とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A.$$

Easy observation:

コンパクト対称空間上の対蹠集合は符号として定義可能.

実際,

$$A_{\mathrm{antip}} := G\backslash\{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$$

とおけば,

$$X \subset M \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

$A \subset I$ とする. $X \subset M$ が A-符号であるとは,

$$R(X \times X) \subset A.$$

Easy observation:

コンパクト対称空間上の対蹠集合は符号として定義可能.

実際,

$$A_{\mathrm{antip}} := G\backslash\{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$$

とおけば,

$$X \subset M \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

Easy observation:

コンパクト対称空間上の対蹠集合は符号として定義可能.

実際,

$$A_{\mathrm{antip}} := (\operatorname{diag} G)\backslash\{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$$

とおけば,

$$X \subset M \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

「$I \simeq$ 極大トーラスの基本領域」とみなしたときには, A_{antip} は "極大トーラスの極 (簡単に分かる)" の言葉で説明できる.

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像

Easy observation:

コンパクト対称空間上の対蹠集合は符号として定義可能.

実際,

$$A_{\mathrm{antip}} := (\operatorname{diag} G)\backslash\{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$$

とおけば,

$$X \subset M \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

「$I \simeq$ 極大トーラスの基本領域」とみなしたときには, A_{antip} は "極大トーラスの極 (簡単に分かる)" の言葉で説明できる.

Example D (実グラスマン多様体):

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.
- $R : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to I$
  それぞれに対応する直交射影作用素 on $\mathbb{R}^n$ を合成して, 固有値を大きい順に並べる.

$$A_{\mathrm{antip}} := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid s = 0, \ldots, k\} \subset I$$

とおけば,

$$X \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

Remark: $x, y \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ が対蹠的
$\iff \mathrm{reflection}_x(y) = y$ in $\mathbb{R}^n$
$\iff x/(x \cap y) \perp y/(x \cap y)$ in $\mathbb{R}^n/(x \cap y)$
$\iff \mathrm{proj}_x \circ \mathrm{proj}_y = \mathrm{proj}_{x \cap y}$ in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

Example D (実グラスマン多様体):

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.
- $R : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to I$
  それぞれに対応する直交射影作用素 on $\mathbb{R}^n$ を合成して, 固有値を大きい順に並べる.

$$A_{\mathrm{antip}} := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid s = 0, \ldots, k\} \subset I$$

とおけば,

$$X \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

Remark: $x, y \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ が対蹠的

$\iff \mathrm{reflection}_x(y) = y$ in $\mathbb{R}^n$

$\iff x/(x \cap y) \perp y/(x \cap y)$ in $\mathbb{R}^n/(x \cap y)$

$\iff \mathrm{proj}_x \circ \mathrm{proj}_y = \mathrm{proj}_{x \cap y}$ in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

Example D (実グラスマン多様体):

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.
- $R : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \times \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \to I$
  それぞれに対応する直交射影作用素 on $\mathbb{R}^n$ を合成して, 固有値を大きい順に並べる.

$$A_{\mathrm{antip}} := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid s = 0, \ldots, k\} \subset I$$

とおけば,

$$X \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

Remark: $x, y \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ が対蹠的
$\iff \mathrm{reflection}_x(y) = y$ in $\mathbb{R}^n$
$\iff x/(x \cap y) \perp y/(x \cap y)$ in $\mathbb{R}^n/(x \cap y)$
$\iff \mathrm{proj}_x \circ \mathrm{proj}_y = \mathrm{proj}_{x \cap y}$ in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$.

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.

$$A_{\mathrm{antip}} := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid s = 0, \ldots, k\} \subset I$$

とおけば,

$$X \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号 (次のスライドで説明)
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid k - s : \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.

$$A_{\mathrm{antip}} := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid s = 0, \ldots, k\} \subset I$$

とおけば,

$$X \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号 (次のスライドで説明)
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid k - s : \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.

$$A_{\mathrm{antip}} := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid s = 0, \ldots, k\} \subset I$$

とおけば,

$$X \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号 (次のスライドで説明)
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid k - s : \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

- $M := \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
- $I := \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0\}$.

$$A_{\mathrm{antip}} := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid s = 0, \ldots, k\} \subset I$$

とおけば,

$$X \subset \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n) \text{ が対蹠集合} \iff A_{\mathrm{antip}}\text{-符号}.$$

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号 (次のスライドで説明)
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1, \ldots, 1}_{s}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-s}) \mid k - s : \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{0,\ldots,0}_{k-s}) \mid k-s: \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

Example E: ジョンソンスキーム

$[n] := \{1,\ldots,n\}$ とする.

- $M = \binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] \mid \#x = k\}$.
- $I = \{0,\ldots,k\}$.
- $R : M \times M \to I, (x,y) \mapsto \#(x \setminus y)$.

この距離空間 $(\binom{[n]}{k}, R)$ をジョンソンスキームという.

$$A_{\text{even}} := \{0,2,4,\ldots\lfloor k/2 \rfloor\} \subset I.$$

としたとき以下が成り立つ.

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{0,\ldots,0}_{k-s}) \mid k-s: \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

Example E: ジョンソンスキーム

$[n] := \{1,\ldots,n\}$ とする.

- $M = \binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] \mid \#x = k\}$.
- $I = \{0,\ldots,k\}$.
- $R : M \times M \to I, (x,y) \mapsto \#(x \setminus y)$.

この距離空間 $(\binom{[n]}{k}, R)$ をジョンソンスキームという.

$$A_{\text{even}} := \{0,2,4,\ldots\lfloor k/2 \rfloor\} \subset I.$$

としたとき以下が成り立つ.

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{0,\ldots,0}_{k-s}) \mid k-s: \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

Example E: ジョンソンスキーム

$[n] := \{1,\ldots,n\}$ とする.

- $M = \binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] \mid \#x = k\}$.
- $I = \{0,\ldots,k\}$.
- $R : M \times M \to I, (x,y) \mapsto \#(x \setminus y)$.

この距離空間 $(\binom{[n]}{k}, R)$ をジョンソンスキームという.

$$A_{\text{even}} := \{0,2,4,\ldots \lfloor k/2 \rfloor\} \subset I.$$

としたとき以下が成り立つ.

Rem: 昨日の田崎先生のご講演で用いられている話:

- ジョンソンスキーム上の A_{even}-符号
- $\rightsquigarrow$ 実グラスマン多様体上の A'-符号, ただし

$$A' := \{(\underbrace{1,\ldots,1}_{s},\underbrace{0,\ldots,0}_{k-s}) \mid k-s: \text{ even } \} \subset I$$

- $\rightsquigarrow$ 向き付けられた実グラスマン多様体の対蹠集合

Example E: ジョンソンスキーム

$[n] := \{1,\ldots,n\}$ とする.

- $M = \binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] \mid \#x = k\}$.
- $I = \{0,\ldots,k\}$.
- $R : M \times M \to I, (x,y) \mapsto \#(x \setminus y)$.

この距離空間 $(\binom{[n]}{k}, R)$ をジョンソンスキームという.

$$A_{\text{even}} := \{0,2,4,\ldots \lfloor k/2 \rfloor\} \subset I.$$

としたとき以下が成り立つ.

Example E: ジョンソンスキーム

$[n] := \{1, \ldots, n\}$ とする.

- $M = \binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] \mid \#x = k\}$.
- $I = \{0, \ldots, k\}$.
- $R : M \times M \to I, (x, y) \mapsto \#(x \setminus y)$.

この距離空間 $(\binom{[n]}{k}, R)$ をジョンソンスキームという.

$$A_{\text{even}} := \{0, 2, 4, \ldots \lfloor k/2 \rfloor\} \subset I.$$

としたとき以下が成り立つ.

Theorem 9 (田崎 [Int. J. Math. (2013)]).

以下の二つの集合の間に一対一対応がある:

- 極大対蹠集合 *in* $\widetilde{\mathrm{Gr}_k}(\mathbb{R}^n)$ の $SO(n)$-共役類.
- 極大 A'-符号 *in* $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ の $SO(n)$-共役類.
- 極大 A_{even}-符号 *in* $\binom{[n]}{k}$ の $\mathfrak{S}_n$-共役類.

Example E: ジョンソンスキーム

$[n] := \{1, \ldots, n\}$ とする.

- $M = \binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] \mid \#x = k\}$.
- $I = \{0, \ldots, k\}$.
- $R : M \times M \to I, (x, y) \mapsto \#(x \setminus y)$.

この距離空間 $(\binom{[n]}{k}, R)$ をジョンソンスキームという.

$$A_{\mathsf{even}} := \{0, 2, 4, \ldots \lfloor k/2 \rfloor\} \subset I.$$

としたとき以下が成り立つ.

Theorem 9 (田崎 [Int. J. Math. (2013)]).

以下の二つの集合の間に一対一対応がある:

- 極大対蹠集合 *in* $\widetilde{\mathrm{Gr}_k}(\mathbb{R}^n)$ の $SO(n)$-共役類.
- 極大 A'-符号 *in* $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ の $SO(n)$-共役類.
- 極大 A_{even}-符号 *in* $\binom{[n]}{k}$ の $\mathfrak{S}_n$-共役類.

Example E: ジョンソンスキーム

$[n] := \{1, \ldots, n\}$ とする.

- $M = \binom{[n]}{k} := \{x \subset [n] \mid \#x = k\}$.
- $I = \{0, \ldots, k\}$.
- $R : M \times M \to I, (x, y) \mapsto \#(x \setminus y)$.

この距離空間 $(\binom{[n]}{k}, R)$ をジョンソンスキームという.

$$A_{\mathsf{even}} := \{0, 2, 4, \ldots \lfloor k/2 \rfloor\} \subset I.$$

としたとき以下が成り立つ.

Theorem 9 (田崎 [Int. J. Math. (2013)]).

以下の二つの集合の間に一対一対応がある:

- 極大対蹠集合 *in* $\widetilde{\mathrm{Gr}_k}(\mathbb{R}^n)$ の $SO(n)$-共役類.
- 極大 A'-符号 *in* $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ の $SO(n)$-共役類.
- 極大 A_{even}-符号 *in* $\binom{[n]}{k}$ の $\mathfrak{S}_n$-共役類.

極大対蹠集合の分類について

Problem (符号理論の中心的問題):

固定された $A \subset I$ について, 極大な A-符号を分類せよ
(特に「濃度最大な A-符号は一意か？」という問題も重要)

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G) \backslash (M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像
- $A_{\mathrm{antip}} := (\operatorname{diag} G) \backslash \{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$

Problem:

極大な対蹠集合 ($= A_{\mathrm{antip}}$-符号) を分類せよ. 特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

極大対蹠集合の分類について

Problem (符号理論の中心的問題):

固定された $A \subset I$ について, 極大な A-符号を分類せよ
(特に「濃度最大な A-符号は一意か？」という問題も重要)

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G) \backslash (M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像
- $A_{\mathrm{antip}} := (\operatorname{diag} G) \backslash \{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$

Problem:

極大な対蹠集合 ($= A_{\mathrm{antip}}$-符号) を分類せよ. 特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像
- $A_{\mathrm{antip}} := G\backslash\{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$

Problem:

極大な対蹠集合 ($= A_{\mathrm{antip}}$-符号) を分類せよ. 特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

Theorem 10 (Sánchez [Proc. AMS (1997)], 田中–田崎 [Osaka J. Math. (2013)]).

M が対称 R 空間の場合には, 大対蹠集合は G-共役を除いて一意. また任意の極大対蹠集合は濃度最大.

Question: M が対称 R 空間でない場合は？

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像
- $A_{\mathrm{antip}} := G\backslash\{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$

Problem:

極大な対蹠集合 ($= A_{\mathrm{antip}}$-符号) を分類せよ. 特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

Theorem 10 (Sánchez [Proc. AMS (1997)], 田中–田崎 [Osaka J. Math. (2013)]).

M が対称 R 空間の場合には, 大対蹠集合は G-共役を除いて一意. また任意の極大対蹠集合は濃度最大.

Question: M が対称 R 空間でない場合は？

- M : コンパクト対称空間.
- $I := (\operatorname{diag} G)\backslash(M \times M)$.
- $R : M \times M \to I$: 商写像
- $A_{\mathrm{antip}} := G\backslash\{(x, y) \in M \times M \mid s_x(y) = y\}$

Problem:

極大な対蹠集合 ($= A_{\mathrm{antip}}$-符号) を分類せよ. 特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

Theorem 10 (Sánchez [Proc. AMS (1997)], 田中–田崎 [Osaka J. Math. (2013)]).

M が対称 R 空間の場合には, 大対蹠集合は G-共役を除いて一意. また任意の極大対蹠集合は濃度最大.

Question: M が対称 R 空間でない場合は？

Problem:

極大な対蹠集合を分類せよ．特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

Theorem 11 (Sánchez (1997), 田中–田崎 (2013)).

M が対称 R 空間の場合には, 大対蹠集合は G-共役を除いて一意. また任意の極大対蹠集合は濃度最大.

Question: M が対称 R 空間でない場合は？

田崎先生, 田中真紀子先生, 保倉先生の一連の研究:

向き付けられたグラスマン多様体や, Spin 群, G_2 など対称 R 空間にならないような各種コンパクト群の極大対蹠集合の研究

これらの研究は符号理論として面白い！

Problem:

極大な対蹠集合を分類せよ．特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

Theorem 11 (Sánchez (1997), 田中–田崎 (2013)).

M が対称 R 空間の場合には, 大対蹠集合は G-共役を除いて一意. また任意の極大対蹠集合は濃度最大.

Question: M が対称 R 空間でない場合は？

田崎先生, 田中真紀子先生, 保倉先生の一連の研究:

向き付けられたグラスマン多様体や, Spin 群, G_2 など対称 R 空間にならないような各種コンパクト群の極大対蹠集合の研究

これらの研究は符号理論として面白い！

Problem:

極大な対蹠集合を分類せよ．特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

Theorem 12 (Sánchez (1997), 田中–田崎 (2013)).

M が対称 R 空間の場合には，大対蹠集合は G-共役を除いて一意．また任意の極大対蹠集合は濃度最大．

Theorem 13 (田崎 [Int. J. Math. (2015)]).

$n \geq 87$ とする．$\widetilde{\mathrm{Gr}_5(\mathbb{R}^n)}$ の大対蹠集合は共役を除いて一意．(極大対蹠集合であっても濃度最大とは限らない)

Problem:

極大な対蹠集合を分類せよ．特に濃度最大な対蹠集合 (大対蹠集合という) は一意か？

Theorem 12 (Sánchez (1997), 田中–田崎 (2013)).

M が対称 R 空間の場合には, 大対蹠集合は G-共役を除いて一意. また任意の極大対蹠集合は濃度最大.

Theorem 13 (田崎 [Int. J. Math. (2015)]).

$n \geq 87$ とする．$\widetilde{\mathrm{Gr}_5(\mathbb{R}^n)}$ の大対蹠集合は共役を除いて一意．(極大対蹠集合であっても濃度最大とは限らない)

対称 R 空間の大対蹠集合についての組合せ論的考察

符号理論の別の方向性:

Problem:

極大な A-符号から M の情報をどれだけ引き出せるか？

哲学: よい符号は M を近似しているはず.

Example B (接吻数問題)

Theorem 14.

S^{23} の極大接吻数配置 (一意) は 11-デザイン
(球面上の *Haar* 測度による積分を近似的に計算できる).
しかも 11-デザインとしては濃度最小.

対称 R 空間の大対蹠集合についての組合せ論的考察

符号理論の別の方向性:

Problem:

極大な A-符号から M の情報をどれだけ引き出せるか？

哲学: よい符号は M を近似しているはず.

Example B (接吻数問題)

Theorem 14.

S^{23} の極大接吻数配置 (一意) は 11-デザイン
(球面上の *Haar* 測度による積分を近似的に計算できる).
しかも 11-デザインとしては濃度最小.

対称 R 空間の大対蹠集合についての組合せ論的考察

符号理論の別の方向性:

Problem:

極大な A-符号から M の情報をどれだけ引き出せるか？

哲学: よい符号は M を近似しているはず.

Example B (接吻数問題)

Theorem 14.

S^{23} の極大接吻数配置 *(一意)* は 11-デザイン
(球面上の Haar 測度による積分を近似的に計算できる).
しかも 11-デザインとしては濃度最小.

- M : 対称 R 空間
- S : 大対蹠集合 (G-共役を除いて一意)

Problem:

S から M の情報を引き出せ.

Theorem 15 (竹内 [Nagoya Math. J. (1989)]).

$$\#S = \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

- M : 対称 R 空間
- S : 大対蹠集合 (G-共役を除いて一意)

Problem:

S から M の情報を引き出せ.

Theorem 15 (竹内 [Nagoya Math. J. (1989)]).

$$\#S = \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H_*(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

- M : Indecomposable な対称 R 空間 equipped with G-不変計量
- S : 大対蹠集合 (G-共役を除いて一意)

「S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Theorem 16 (栗原–奥田 (論文準備中))).

$\Gamma_M(S)$ は二点等質グラフ.

Example F (複素グラスマン多様体)

- $M = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$.

- M : Indecomposable な対称 R 空間 equipped with G-不変計量
- S : 大対蹠集合 (G-共役を除いて一意)

「S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Theorem 16 (栗原–奥田 (論文準備中))).

$\Gamma_M(S)$ は二点等質グラフ.

Example F (複素グラスマン多様体)

- $M = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$.

- M : Indecomposable な対称 R 空間 equipped with G-不変計量
- S : 大対蹠集合 (G-共役を除いて一意)

「S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Theorem 16 (栗原–奥田 (論文準備中))).

$\Gamma_M(S)$ は二点等質グラフ.

Example F (複素グラスマン多様体)

- $M = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$.

- M : Indecomposable な対称 R 空間 equipped with G-不変計量
- S : 大対蹠集合 (G-共役を除いて一意)

「S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Theorem 16 (栗原–奥田 (論文準備中))).

$\Gamma_M(S)$ は二点等質グラフ.

Example F (複素グラスマン多様体)

- $M = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$.

「大対蹠集合 S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Theorem 17 (栗原–奥田 (論文準備中))).

$\Gamma_M(S)$ は二点等質グラフ.

Example F (複素グラスマン多様体)

- $M = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$.

$$S := \{\mathrm{Span}\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\} \mid \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, n\}\}$$

は大対蹠集合. ただし $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底.

「大対蹠集合 S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Theorem 17 (栗原–奥田 (論文準備中))).

$\Gamma_M(S)$ は二点等質グラフ.

Example F (複素グラスマン多様体)

- $M = \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$.

$$S := \{\mathrm{Span}\{e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\} \mid \{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, n\}\}$$

は大対蹠集合. ただし $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準基底.

「大対蹠集合 S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Example F (複素グラスマン多様体)

$\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ を固定. $[n] := \{1, \ldots, n\}$ とおく. 各 $I \in \binom{[n]}{k}$ について,

$$x_I := \mathrm{Span}\{e_i \mid i \in I\} \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$$

とおく. このとき

$$S := \{x_I \mid I \in \binom{[n]}{k}\}$$

は $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の大対蹠集合.

「S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Example F (複素グラスマン多様体)

$\mathbb{C}^n$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_n$ を固定. $[n] := \{1, \ldots, n\}$ とおく. 各 $I \in \binom{[n]}{k}$ について,

$$x_I := \mathrm{Span}\{e_i \mid i \in I\} \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$$

とおく. このとき

$$S := \{x_I \mid I \in \binom{[n]}{k}\}$$

は $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ の大対蹠集合.

また $\binom{\{1,\ldots,n\}}{k}$ の二点を "一つしか違わない" ときに辺で結ぶとグラフができる. このグラフを ジョンソングラフ $J(n,k)$ という.

上の設定では $\Gamma_M(S) \simeq J(n,k)$.

- M : Indecomposable な対称 R 空間 equipped with G-不変計量
- S : 大対蹠集合 (G-共役を除いて一意)

「S 内の二点が "最も近い" とき辺で結ぶ」という操作により S を頂点集合とするグラフ $\Gamma_M(S)$ を定義する.

Theorem 18 (栗原–奥田 (論文準備中))).

$\Gamma_M(S)$ は二点等質.

Theorem 19 (栗原–奥田 (論文準備中)).

グラフ $\Gamma_M(S)$ の調和解析から M 上の調和解析の情報が少し復元できる.

Theorem 20 (栗原–奥田 (論文準備中)).

グラフ $\Gamma_M(S)$ の調和解析から M 上の調和解析の情報が少し復元できる.

Example F (複素グラスマン多様体)
関数空間

$$V := (\bigwedge^k \mathbb{C}^n) \otimes (\bigwedge^k \mathbb{C}^n)^* \subset C^\infty(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))$$

について, $V|_S = \mathbb{C}^S$. また V の $U(n)$-既約分解は $\mathbb{C}^S$ のラプラシアンによる固有空間分解と対応. 特に

$$\frac{1}{\mu(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n))} \int_{x \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)} f(x) d\mu(x) = \frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} f(x) \quad \text{for any } f \in V.$$