2022年12月23日

球面内の極超曲面と二重調和超曲面

第3回 水戸幾何小研究集会

工学院大学 学習支援センター

佐藤 雄一郎

概要

極(超曲面)：ある種のGauss写像の(像).
二重調和超曲面：極小超曲面のある種の一般化.

単位球面内において極超曲面と二重調和超曲面の関係を調べる.
$\leadsto$ Balmuș–Montaldo–Oniciuc予想の部分的解決.

内容

1. 極
2. 双対性
3. 合同性
4. 二重調和性
5. 主結果
6. 課題

1. 極

原点中心，半径 r の $N(\geq 2)$ 次元球面を次で定める．

$$\mathbb{S}^N(r) := \left\{ x \in \mathbb{E}^{N+1} \mid \langle x, x \rangle = r^2 \right\},$$

ここで

- $\mathbb{E}^{N+1}$: $(N+1)$ 次元 Euclid 空間．
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Euclid 内積．

半径 $r = 1$ のとき，簡単のため $\mathbb{S}^N$ と表す．

(M^n, g) : n 次元 Riemann 多様体．
$f : (M^n, g) \to \mathbb{S}^{n+1}$: 等長はめ込み．

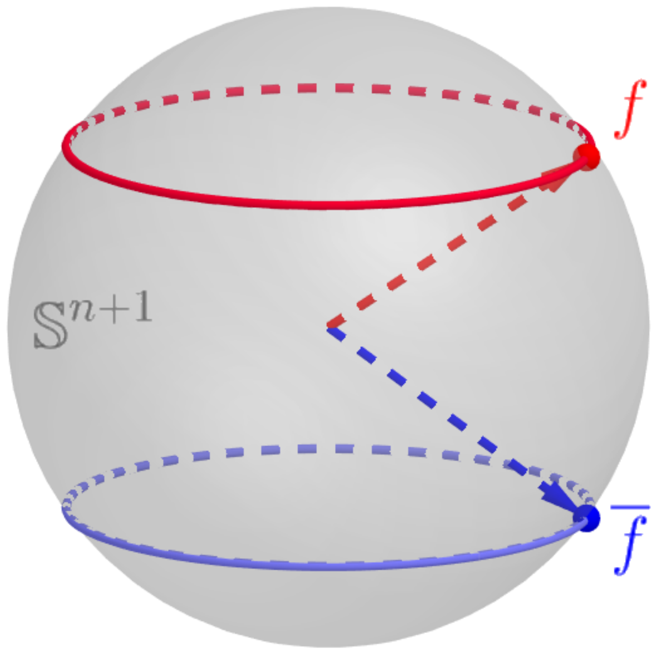
以下，断らない限り M は連結有向多様体とする．

$f : (M^n, g) \to \mathbb{S}^{n+1}$: 等長はめ込み.
N : M 上の(大域的)単位法ベクトル場.
C^∞ 級写像

$$\overline{f} : M^n \ni x \mapsto N_x \in \mathbb{S}^{n+1}$$

は $\langle f, \overline{f} \rangle = 0$ を満たす. $\overline{f}$ を f の極 (polar) という.

単位法ベクトル場 N と極 $\overline{f}$ を同一視する.



$f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$：等長はめ込み．
$N=\overline{f}$：単位法ベクトル場．
h：f の第二基本形式．

Gaussの公式とWeingartenの公式：

$$
\begin{aligned}
\nabla_X^{f^*T\mathbb{S}^{n+1}} f_*Y &= f_*\nabla_X^{TM}Y + h(X,Y)\overline{f} \\
&\in f_*TM \oplus T^\perp M = f^*T\mathbb{S}^{n+1} \\
\nabla_X^{f^*T\mathbb{S}^{n+1}} \overline{f} &= -f_*A(X) \in f_*TM
\end{aligned}
$$

ここで X,Y：M のベクトル場，$T^\perp M$：M の法束．

$\rightsquigarrow h(X,Y)=g(A(X),Y)$.

$A\in\Gamma(\mathrm{End}TM)$：$\overline{f}$ に関する形作用素．

f : 全測地的 $\overset{\text{def}}{\iff} h = 0.$

命題

f : 全測地的 $\iff \overline{f}$: 定値写像.

$\because$)

f : 全測地的

$\iff h = 0 \quad$ (定義より)

$\iff A = 0 \quad (h(X, Y) = g(A(X), Y)$ より$)$

$\iff \nabla_X^{f^* T\mathbb{S}^{n+1}} \overline{f} = 0 \quad$ (Weingarten の公式より)

$\iff X(\overline{f}) = 0 \quad (\langle X, \overline{f} \rangle = 0$ より$)$

$\iff \overline{f}$: 定値写像. $\square$

$f : (M^n, g) \to \mathbb{S}^{n+1}$: 等長はめ込み.

命題 (極超曲面 (Polar hypersurface))

極 $\overline{f} : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$: はめ込み.
$\Longleftrightarrow$ Gauss–Kronecker 曲率 $K := \det A \neq 0$.

以下, M 上で $K \neq 0$ を仮定.

f は $\overline{f}$ の単位法ベクトル場となることから

$\overline{g}$: $\overline{f}$ による M 上の誘導計量.
$\overline{h}$: $\overline{f}$ の第二基本形式.
$\rightsquigarrow$

$$\nabla_X^{\overline{f}^* T\mathbb{S}^{n+1}} \overline{f}_* Y = \overline{f}_* \overline{\nabla}_X^{TM} Y + \overline{h}(X, Y) f,$$
$$\nabla_X^{\overline{f}^* T\mathbb{S}^{n+1}} f = -\overline{f}_* \overline{A}(X).$$

ここで $\overline{f}_* X = X(\overline{f}) = \nabla^{f^* T\mathbb{S}^{n+1}}_X \overline{f} = -f_* A(X)$ より

$$\begin{aligned}\overline{g}(X, Y) &= \langle \overline{f}_* X, \overline{f}_* Y \rangle = \langle f_* A(X), f_* A(Y) \rangle \\ &= g(A(X), A(Y)).\end{aligned}$$

となり，さらに

$$\begin{aligned}\overline{h}(X, Y) &= -\langle \overline{f}_* Y, \nabla^{\overline{f}^* T\mathbb{S}^{n+1}}_X f \rangle = \langle f_* A(Y), f_* X \rangle = g(A(Y), X) \\ &= h(Y, X).\end{aligned}$$

となる．特に，f に関する $\overline{f}$ の形作用素 $\overline{A}$ は

$$\begin{aligned}\overline{g}(\overline{A}(X), Y) &= g((A \circ \overline{A})(X), A(Y)) = \overline{h}(X, Y) = h(Y, X) \\ &= g(A(Y), X)\end{aligned}$$

であり A は可逆であるから

$$\overline{A}(X) = A^{-1}(X).$$

2. 双対性

A：等長はめ込み $f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$ の形作用素．

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &:= \det(\lambda I_{TM}-A)\\ &= \sigma_0(A)\lambda^n+\sigma_1(A)\lambda^{n-1}\\ &\qquad +\cdots+\sigma_{n-1}(A)\lambda+\sigma_n(A).\end{aligned}$$

第 i 平均曲率 H_i $(0\le i\le n)$ を以下で定める：

$$\binom{n}{i}H_i=(-1)^i\sigma_i(A).$$

- $H_0=\sigma_0(A)=1$,
- $H_1=H=(1/n)\mathrm{tr}\,A$ （平均曲率）,
- $H_2=\kappa-1$ （κ は (M^n,g) の正規化スカラー曲率）,

  $\vdots$
- $H_n=K=\det A$ （Gauss–Kronecker 曲率）.

- f : 極小 $\overset{\text{def}}{\iff} H = H_1 = 0.$
- f : オースティア $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$H_{2k+1} = 0 \quad \left(k = 0, 1, \cdots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right).$$

明らかに，オースティア $\Longrightarrow$ 極小．

- f : 等径 $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$dH_i = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

明らかに，等径 $\Longrightarrow$ 平均曲率一定 (CMC).

- f : パリンドロミック $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$H_i = H_{n-i} H_n \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

明らかに，パリンドロミック $\Longrightarrow K = H_n = \pm 1.$

注意

$f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$: 等長はめ込み．
$K\neq 0 \Longrightarrow \overline{\overline{f}}=f.$

定理 [Anciaux '11, S.]

等長はめ込み $f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$ は $K\neq 0$ を満たすとする．

(1) f : 等径 $\Longleftrightarrow$ $\overline{f}$: 等径．
さらに，相異なる主曲率の個数を保つ．

(2) f : オースティア $\Longleftrightarrow$ $\overline{f}$: オースティア．
特に，f : 極小 $\Longleftrightarrow$ $\overline{f}$: 極小 (ただし $n=2$ のときに限る)．

(3) f : パリンドロミック $\Longleftrightarrow$ $\overline{f}$: パリンドロミック．

3. 合同性　$i = 1, 2$ とする．

$(\tilde{M}^{n+k}, \tilde{g})$，$(M_i^n, g_i)$：Riemann 多様体．
$f_i : (M_i^n, g_i) \to (\tilde{M}^{n+k}, \tilde{g})$：等長はめ込み．

f_1 は f_2 に**合同**であるとは，ある微分同型写像 $\tau : M_1^n \to M_2^n$ と，等長写像 $\varphi \in \mathrm{Isom}(\tilde{M}^{n+k}, \tilde{g})$ が存在して次を満たす．

$$\begin{tikzcd}
(M_1^n, g_1) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\tilde{M}^{n+k}, \tilde{g}) \arrow[d, "\varphi"] \\
(M_2^n, g_2) \arrow[r, "f_2"] & (\tilde{M}^{n+k}, \tilde{g})
\end{tikzcd}$$

特に (M_1^n, g_1) は (M_2^n, g_2) に等長同型である．

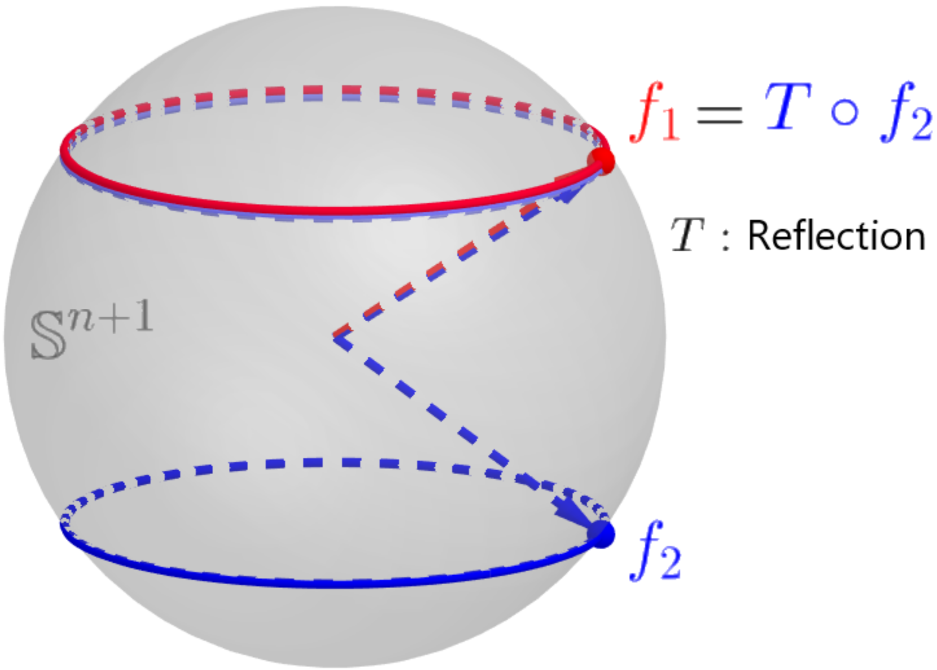
f_1 が f_2 に合同であるとき，$f_1 \equiv f_2$ と表す．

超曲面の一意性　$i = 1, 2$とする．

二つの等長はめ込み$f_i : (M^n, g_i) \to \mathbb{S}^{n+1}$に対し，
それらの第二基本形式をh_iで表す．

$$f_1 \equiv f_2 \iff g_1 = g_2,\ h_1 = \pm h_2.$$

すなわち，直交変換$T \in O(n+1)$が存在して$f_1 = T \circ f_2$を満たす．



命題 [Brito–Liu–Oliker–Simon–Wang, S.]

等長はめ込み $f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$ は $K\neq 0$ を満たすとする．
このとき，$\overline{f}\equiv f \iff A^2=I_{TM}$.

$\because$)

$\overline{h}=h$ は常に成立．
$\overline{g}=g$ となる条件を調べれば良い．

$$\overline{g}(X,Y)=g(A(X),A(Y))=g(A^2(X),Y)$$

であるから，$\overline{g}=g \iff A^2=I_{TM}$. $\square$

F. Brito, H. L. Liu, V. I. Oliker, U. Simon and C. P. Wang, *Polar hypersurfaces in spheres*, Geometry and topology of submanifolds, IX (Valenciennes/Lyon/Leuven, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1999), 33–47.

分類

$f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$：等長はめ込み．

$A^2=I_{TM}\iff f$ は次の超曲面の(開部分)に合同：

- 全臍的小球面 $\mathbb{S}^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\hookrightarrow\mathbb{S}^{n+1}$,
- Clifford 超曲面 $\mathbb{S}^r\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\mathbb{S}^{n-r}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\hookrightarrow\mathbb{S}^{n+1}\quad(1\le r\le n-1)$.

注意

上の超曲面は，現在知られている $\mathbb{S}^{n+1}$ 内の二重調和超曲面．

Balmuș–Montaldo–Oniciuc 予想 (未解決)

単位球面 $\mathbb{S}^{n+1}$ 内の任意の極小でない二重調和超曲面は上のものに限られるか．

4. 二重調和性

Riemann 多様体間の C^∞ 級写像 $f:(M,g_M)\to(N,g_N)$ に対し，

$$f:\ \text{調和} \overset{\text{def}}{\iff} E(f) := \frac{1}{2}\int_M ||df||^2 d\mathrm{vol}_{g_M} \ \text{の臨界点.}$$

$$\iff \tau(f) := \mathrm{Trace}_{g_M} \nabla df = 0.$$

$$f:\ \text{二重調和} \overset{\text{def}}{\iff} E_2(f) := \frac{1}{2}\int_M ||\tau(f)||^2 d\mathrm{vol}_{g_M} \ \text{の臨界点.}$$

$$\iff \tau_2(f) := -\overline{\Delta}\tau(f) + \mathrm{Trace}_{g_M} R^N(\tau(f), df)df = 0.$$

明らかに，調和 $\Longrightarrow$ 二重調和.

二重調和写像 f がプロパーであるとは，調和でないことである.

f が等長はめ込みの場合，f : 調和 $\iff$ f : 極小.

定理 [Balmuș–Montaldo–Oniciuc '08]

$f : (M^n, g) \to \mathbb{S}^{n+1}$: 等長はめ込み.
このとき，f : プロパーな二重調和 $\Longleftrightarrow$ 4階偏微分方程式

$$\begin{cases} (\perp) & : \ \Delta_g H - (n - ||A||^2)H = 0, \\ (\top) & : \ 2A\left(\mathrm{grad}_g H\right) + nH\mathrm{grad}_g H = 0. \end{cases}$$

を満たすことである.
さらに，平均曲率一定のとき，
f : プロパーな二重調和 $\Longleftrightarrow$ $||A||^2 = n$.

注意

- BMO予想は M がコンパクトや f が平均曲率一定の場合でも未解決.
- 二重調和ならば平均曲率一定であるという主張もBMO予想と呼ばれることがある.

Chern–do Carmo–小林の定理 ('70)

任意の極小超曲面で $||A||^2 = n$ を満たすものは次のもの(の開部分)に限られる：

$$\mathbb{S}^r\left(\sqrt{\frac{r}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-r}\left(\sqrt{\frac{n-r}{n}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$$

ここで $1 \leq r \leq n-1$.

従って，f が平均曲率一定のとき，
BMO予想は上述の定理の一般化と思える；極小 $\to$ CMC.

2021年，FetcuとOniciucは次のように述べている：
BMO conjecture seems to be quite a complicated task.

D. Fetcu and C. Onicius, *Biharmonic and Biconservative hypersurfaces in space forms*, Differential geometry and global analysis—in honor of Tadashi Nagano, Contemp. Math., **777**, Amer. Math. Soc., RI, (2022), 65–90.

BMO予想と同値な換言 [S.]

$f : (M^n, g) \to \mathbb{S}^{n+1}$: 等長はめ込み．
このとき，f はプロパーな二重調和であるとき，次は同値 :

(a) BMO予想の結論が成立．
(b) $K \neq 0$ & $f \equiv \overline{f}$.
(c) $A^2 = I_{TM}$.

考察

(a) : 解析的 $\rightsquigarrow$ 4階PDE $\tau_2(f) = 0$を解く．

(b) : 幾何的 $\rightsquigarrow$ fとその極超曲面 $\overline{f}$ の幾何構造が合致するか．

(c) : 代数的 $\rightsquigarrow$ もはや線形代数? 扱いやすい場面もある．

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c)

- (a) $\Longrightarrow$ (c) : 容易.
- (c) $\Longrightarrow$ (a) : $A^2 = I_{TM} \Longrightarrow f$: 等径.

  後は，一山–井ノ口–浦川の結果よりOK.
- (b) $\Longleftrightarrow$ (c) : 既に証明済み. $\square$

注意

次の条件(d)も(a), (b), (c)と同値である.
(d) : f は等径.

T. Ichiyama, J.-I. Inoguchi and H. Urakawa, *Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields*, Note Mat. **28** (2009), 233–275.

5. 主結果

$f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$：等長はめ込み．
f はプロパーな二重調和であり，平均曲率一定と仮定．
このとき，

$$\begin{aligned}(\mathrm{C}): 6n^3H_1^4 &- 12n^2(n-1)H_2H_1^2 + 4n(n-1)(n-2)H_3H_1\\ &+ 3n(n-1)^2H_2^2 - (n-1)(n-2)(n-3)H_4 - 6 = 0,\end{aligned}$$

または $K=H_n\neq 0$ を満たし，かつ

$$(\overline{\mathrm{C}}): \{1+(n-1)H_{n-2}\}H_n^2 - nH_{n-1}^2 = 0$$

のどちらか一方が成立するなら，f は次の超曲面の開部分に合同：

- $\mathbb{S}^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\hookrightarrow\mathbb{S}^{n+1}$,
- $\mathbb{S}^r\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\mathbb{S}^{n-r}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\hookrightarrow\mathbb{S}^{n+1}\quad(1\leq r\leq n-1,\ n\neq 2r)$.

主結果はBMO予想の部分的解決を与える．

注意

- 条件(C) $\Longleftrightarrow ||A^2||^2 = n.$
- $K \neq 0$のとき，条件($\overline{\mathrm{C}}$) $\Longleftrightarrow ||A^{-1}||^2 = n.$
- 平均曲率一定のとき，二重調和 $\Longleftrightarrow ||A||^2 = n.$

二乗ノルム$||\cdot||$を用いれば，より単純な表現ができるが，
幾何学的な意味は見えにくい．

この点を明らかにするために，以下のように記述した．

$$\begin{aligned}(\mathrm{C}) : 6n^3H_1^4 &- 12n^2(n-1)H_2H_1^2 + 4n(n-1)(n-2)H_3H_1 \\ &+ 3n(n-1)^2H_2^2 - (n-1)(n-2)(n-3)H_4 - 6 = 0,\end{aligned}$$

$$(\overline{\mathrm{C}}) : \{1 + (n-1)H_{n-2}\}H_n^2 - nH_{n-1}^2 = 0.$$

主結果の証明

条件(C)に関して.

$||A||^2 = n$ **かつ** $||A^2||^2 = n$**であるので,**

$$||A^2 - I_{TM}||^2 = ||A^2||^2 - 2||A||^2 + n = n - 2n + n = 0.$$

$\rightsquigarrow A^2 = I_{TM}.$

一方で,

条件($\overline{\mathrm{C}}$)に関して.

$||A||^2 = n$ **かつ** $||A^{-1}||^2 = n$**であるので,**

$$||A - A^{-1}||^2 = ||A||^2 + ||A^{-1}||^2 - 2n = n + n - 2n = 0.$$

$\rightsquigarrow A^2 = I_{TM}.$ $\square$

系 [S.]

等長はめ込み $f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$ は $K\neq 0$ を満たすとする．

f とその極超曲面 $\overline{f}$ が 共に 二重調和 かつ 平均曲率一定のとき，
BMO予想の結論が成立する．

$\because$)

f : 二重調和 & 平均曲率一定 $\rightsquigarrow ||A||^2=n.$
$\overline{f}$: 二重調和 & 平均曲率一定 $\rightsquigarrow ||A^{-1}||^2=n.$

$\rightsquigarrow A^2=I_{TM}.$ $\square$

幾何学的な条件によるBMO予想の部分的解決を与える．

6. 課題

等長はめ込み $f:(M^n,g)\to\mathbb{S}^{n+1}$ に対し，次は成立するか．

(1) f はプロパーな二重調和ならば $K\neq 0$ であるか．

(2) f はプロパーな二重調和であり $K\neq 0$ を満たすとする．
このとき，極超曲面 $\overline{f}$ はプロパーな二重調和か．

注意として，
f は極小のとき，極超曲面 $\overline{f}$ は必ずしも極小ではなかった．

しかしながら，BMO予想が正しいとするならば
上述の問題はすべて正しくなければならない．

逆に "$K\equiv 0$を満たす二重調和超曲面の発見" や
極超曲面が "二重調和になるとは限らない" なら，BMO予想の反証．

6. 課題

等長はめ込み $f : (M^n, g) \to \mathbb{S}^{n+1}$ に対し，次は成立するか．

(1) f はプロパーな二重調和ならば $K \neq 0$ であるか．

(2) f はプロパーな二重調和であり $K \neq 0$ を満たすとする．
このとき，極超曲面 $\overline{f}$ はプロパーな二重調和か．

注意として，
f は極小のとき，極超曲面 $\overline{f}$ は必ずしも極小ではなかった．

しかしながら，BMO予想が正しいとするならば
上述の問題はすべて正しくなければならない．

逆に "$K \equiv 0$を満たす二重調和超曲面の発見" や
極超曲面が "二重調和になるとは限らない" なら，BMO予想の反証．

Thank you for your attention!!