例外型対称空間の対蹠集合

佐々木　優

東京工業高等専門学校

2022/12/23 第 3 回水戸幾何小研究集会

今日の講演内容

本講演では,

「例外型コンパクトリー群 F_4, E_6」

「$FI, EI, (EII)$型コンパクト対称空間」

の極大対蹠集合の分類・構成を紹介する

1. コンパクト対称空間の対蹠集合

対称空間

定義 2.1

リーマン多様体 M について，各点 $x \in M$ に対して次を満たす等長変換 s_x が存在するとき，M を対称空間という．

(1) x は s_x の孤立固定点である．

(2) s_x は対合的である $(s_x^2 = \mathrm{id}_M)$．

s_x を x における点対称と呼ぶ．

対蹠集合

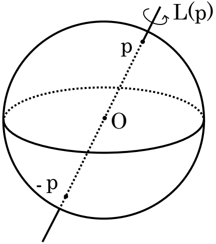
定義 2.2 (Chen-Nagano, 1988)

M を連結な対称空間とする.

- $p, q \in M$ が対蹠的 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $s_p(q) = q (\Longleftrightarrow s_q(p) = p)$.
- M の部分集合 S が対蹠集合 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ S の任意の 2 点が対蹠的.
- 濃度が最大の対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ.
  大対蹠集合の濃度を M の 2-number といい，$\#_2 M$ とかく.
  対蹠集合間の包含関係に関して極大なものを，極大対蹠集合という.

- 以下，対称空間はコンパクトであると仮定する.
- 対蹠集合は常に有限集合になり，2-number は有限である.

例：球面 S^2



- $p \in S^2$ とし，$L(p)$ を中心 o と p を通る直線とする．
- p における点対称 s_p は $L(p)$ を回転軸とした 180 度回転となる．
- $\{x \in S^2\ ;\ s_p(x) = x\} = \{p, -p\}$ であり，$s_p = s_{-p}$ なので $s_{-p}(p) = p$.
  よって，$\{p, -p\}$ は S^2 の大対蹠集合となり，$\#_2 S^2 = 2$.

例：コンパクトリー群

G をコンパクトリー群とする．

- コンパクトリー群 G は，両側不変計量によりコンパクト対称空間になる．
- このとき，$g \in G$ における点対称は

$$s_g : G \to G \; ; \; h \mapsto gh^{-1}g.$$

- 単位元を含む極大対蹠集合は，各元の位数が 2 であるアーベル群で極大なもの (maximal elementary abelian 2-subgroup) になる．

  逆に，maximal elementary abelian 2-subgroup は極大対蹠集合になる．
- 例えば，ユニタリ群 $U(n)$ においては

$$\Delta_n = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \in U(n) \right\}$$

  が大対蹠集合となっている．とくに，$\#_2 U(n) = 2^n$ となる．

対蹠集合の性質 1

定理 2.3 (Chen-Nagano, 1988)

$\#_2 M$ は M の不変量である．

- 2-number が異なる対称空間は，互いに同型にならない．
- $\#_2 S^1 = \#_2 S^2 = 2$ だが，S^1 と S^2 は同型にならない．

定理 2.4 (Chen-Nagano, 1988)

M をコンパクト対称空間とし，$\chi(M)$ を M のオイラー数とする．このとき，

$$\chi(M) \leq \#_2 M$$

対蹠集合の性質 2

定理 2.5 (Takeuchi, 1989)

M を対称 R 空間とする．このとき，大対蹠集合を臨界点集合とする $\mathbb{Z}_2$-perfect Morse 関数が存在し，

$$\#_2 M = \dim H_*(M\,;\,\mathbb{Z}_2).$$

定理 2.6 (Amman, 2021)

任意のコンパクト対称空間について

$$\#_2 M \leq \dim H_*(M\,;\,\mathbb{Z}_2)$$

$<$ と $=$ の違いはまだよくわかっていない…

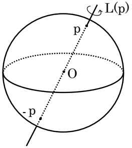
2. 対蹠集合の分類

極大対蹠集合の分類

全てのコンパクト対称空間で,

極大対蹠集合の分類・構成が完成しているわけではない!

- とくに,等長変換群の単位連結成分で移り合うものを同じとみなして (合同類),極大対蹠集合を分類する.



- 既約コンパクト型対称空間は次のように分類されている.
- 各型について，極大対蹠集合の合同類の分類および構成がなされている.
- 対称 R 空間においては，極大対蹠集合の分類・構成は完成している.
  （任意の極大対蹠集合は互いに合同になる）

古典型

I型	単連結	局所等長類	II 型	単連結	局所等長類
AI 型	$SU(n)/SO(n)$	いくつか	A型	$SU(n)$	いくつか
AII 型	$SU(2n)/Sp(n)$	いくつか			
$AIII$ 型	複素グラスマン多様体	1 or 2			
BDI 型	有向実グラスマン多様体	2 or 4	BD型	$Spin(n)$	2 or 4
$DIII$ 型	$SO(2n)/U(n)$	1 or 2			
CI 型	$Sp(n)/U(n)$	2	C型	$Sp(n)$	2
CII 型	四元数グラスマン多様体	1 or 2			

例外型

I 型	単連結	局所等長類	II 型	単連結	局所等長類
G 型	$G_2/SO(4)$	1	G_2型	G_2	1
FI 型	$\boxed{F_4/(Sp(1)\cdot Sp(3))}$	$\boxed{1}$	F_4型	$\boxed{F_4}$	$\boxed{1}$
FII 型	$F_4/Spin(9)$	1			
EI 型	$\boxed{E_6/(Sp(4)/\mathbb{Z}_2)}$	$\boxed{2}$	E_6型	$\boxed{E_6}$	$\boxed{2}$
EII 型	$\boxed{E_6/(U(1)\times Spin(10))/\mathbb{Z}_4}$	$\boxed{1}$			
$EIII$ 型	$E_6/(Sp(1)\cdot SU(6))$	1			
EIV 型	E_6/F_4	2			
EV 型	$E_7/(SU(8)/\mathbb{Z}_2)$	2	E_7型	E_7	2
EVI 型	$E_7/(SU(2)\cdot Spin(12))$	1			
$EVII$ 型	$E_7/((U(1)\times E_6)/\mathbb{Z}_3)$	2			
$EVIII$ 型	$E_8/Ss(16)$	1	E_8型	E_8	1
EIX 型	$E_8/SU(2)\cdot E_7$	1			

極大対蹠集合の構成

- 今回は，それぞれのコンパクト対称空間で分類結果を見るのではなく，全測地的部分多様体の観点から極大対蹠集合を考える．
- 対称空間の全測地的部分多様体は，「部分対称空間」になっている．

全測地的部分多様体の対蹠集合は，元の対称空間の対蹠集合になる．

	全測地的部分多様体		コンパクト対称空間
$f:$	N	$\to$	M
	N の極大対蹠集合Δ		M の極大対蹠集合 $f(\Delta)$

3. F_4, E_6 の極大対蹠集合

次の包含列を考える.

$$G_2 \quad \subset \quad Spin(8) \quad \subset \quad F_4 \quad \subset \quad E_6$$

例外型コンパクトリー群 G_2

定義 4.1

以下のようにして積を定めた 8 次元ベクトル空間 $\sum_{1=0}^{7} \mathbb{R}e_i$ を八元数 $\mathbb{O}$ という.

(1) e_0 は積の単位元とする. 単に 1 と書く.

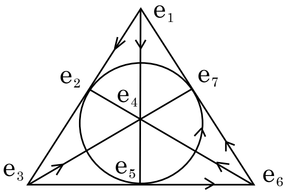
(2) 各 $1 \leq i \neq j \leq 7$ について,

$$e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i$$

(3) 積は分配法則を満たしている.

(4) 右の図により積を定める.

（例：$e_1 e_2 = e_3, e_1 e_4 = e_5$）



- $\mathrm{Im}\mathbb{O} = \sum_{i=1}^{7} \mathbb{R}e_i$ とおく.
- $x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i$ について, x の共役 $\bar{x}$ を, $\bar{x} = x_0 - \sum_{i=1}^{7} x_i e_i$ により定める.
- $\mathbb{O}$ の標準内積 (,) を以下で定める.

$$(x, y) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) = \sum_{i=0}^{7} x_i y_i, \quad (x = \sum_{i=0}^{7} x_i e_i, y = \sum_{i=0}^{7} y_i e_i)$$

定義 4.2

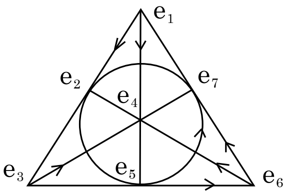
$\mathbb{O}$ の線形変換 f で $f(xy) = f(x)f(y)$ を満たすものを，$\mathbb{O}$ の自己同型という．
$\mathbb{O}$ の自己同型全体による群を例外型コンパクトリー群 G_2 という．

- 各 $g \in G_2$ について，$(g(x), g(y)) = (x, y)$　$(x, y \in \mathbb{O})$
- 各 $g \in G_2$ について，$g(e_0) = e_0$．とくに，$g(\mathrm{Im}\mathbb{O}) \subset \mathrm{Im}\mathbb{O}$ となり，

$$G_2 \subset SO(\mathrm{Im}\mathbb{O}) = SO(7).$$

- $g_1, \cdots, g_7 \in G_2$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3} - \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_4+\mathbb{R}e_5+\mathbb{R}e_6+\mathbb{R}e_7}\\
g_2 &= \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_4+\mathbb{R}e_5} - \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_6+\mathbb{R}e_7}\\
g_3 &= \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_6+\mathbb{R}e_7} - \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_4+\mathbb{R}e_5}\\
g_4 &= \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_4+\mathbb{R}e_6} - \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_5+\mathbb{R}e_7}\\
g_5 &= \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_5+\mathbb{R}e_7} - \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_4+\mathbb{R}e_6}\\
g_6 &= \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_4+\mathbb{R}e_7} - \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_5+\mathbb{R}e_6}\\
g_7 &= \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_5+\mathbb{R}e_6} - \mathrm{I}_{\mathbb{R}e_1+\mathbb{R}e_2+\mathbb{R}e_3+\mathbb{R}e_4}
\end{aligned}
$$



- g_0 を単位元とし，

$$\Delta_{G_2} = \{g_i \; ; \; 0 \leq i \leq 7\}.$$

定理 4.3 (Tanaka-Tasaki-Yasukura,2022)

Δ_{G_2} は G_2 の極大対蹠集合である．
また，G_2 の任意の極大対蹠集合は Δ_{G_2} と合同で，$\#_2 G_2 = 8$.

$SO(8)$-3 対原理

以下，$SO(\mathbb{O})$ を $SO(8)$ と記す．

定理 4.4 ($SO(8)$-三対原理)

任意の $g_1 \in SO(8)$ に対して，$g_2, g_3 \in SO(8)$ で次を満たすものが符号を除いて一意に存在する．

$$g_i(\overline{xy}) = \overline{g_{i+1}(x)g_{i+2}(y)} \quad (x, y \in \mathbb{O},\ \text{添え字は } \mathrm{mod} 3)$$

- D を次で定める．

$$D := \left\{ (g_1, g_2, g_3) \in SO(8)^3 \ ; \ \begin{array}{c} \overline{g_i(x)g_{i+1}(y)} = g_{i+2}(\overline{xy}) \\ x, y \in \mathbb{O},\ \text{添え字は } \mathrm{mod} 3 \end{array} \right\}.$$

  D はコンパクトリー群になり，次は 2 重被覆．

$$\pi : D \to SO(8) \ ; \ (g_1, g_2, g_3) \mapsto g_1$$
$$\pi^{-1}(g_1) = \{(g_1, g_2, g_3), (g_1, -g_2, -g_3)\}$$

- とくに，$D \cong Spin(8)$ となる．以下，D を $Spin(8)$ と記す．

$G_2 \subset Spin(8)$ について

- G_2 から $Spin(8)$ へ，4 種類の全測地的埋め込み f_0, f_1, f_2, f_3 が存在する．

$$\begin{aligned} f_0 &: G_2 \to Spin(8)\ ;\ g \mapsto (\ \ g,\ \ g,\ \ g), \\ f_1 &: G_2 \to Spin(8)\ ;\ g \mapsto (\ \ g, -g, -g), \\ f_2 &: G_2 \to Spin(8)\ ;\ g \mapsto (-g,\ \ g, -g), \\ f_3 &: G_2 \to Spin(8)\ ;\ g \mapsto (-g, -g,\ \ g). \end{aligned}$$

- $\bigcup_{i=0}^{3} f_i(G_2)$ は $Spin(8)$ の部分群で，$G_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ と同型．

$Spin(8)$ の極大対蹠集合

- $\Delta_{Spin(8)} = \bigcup_{i=0}^{3} f_i(\Delta_{G_2})$ と定める.

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{G_2} \subset & G_2 \arrow[dr, "f_0"] & & G_2 \arrow[dl, "f_1"'] & \supset \Delta_{G_2} \\
& & Spin(8) & & \\
\Delta_{G_2} \subset & G_2 \arrow[ur, "f_2"'] & & G_2 \arrow[ul, "f_3"] & \supset \Delta_{G_2}
\end{tikzcd}$$

補題 4.5 (Wood, 1989)

$\Delta_{Spin(8)} = \bigcup_{i=0}^{3} f(\Delta_{G_2})$ は $Spin(8)$ の極大対蹠集合.
$Spin(8)$ の任意の極大対蹠集合は $\Delta_{Spin(8)}$ と合同. とくに, $\#_2 Spin(8) = 32$.

F_4 について

- $\mathfrak{J}$ を次で定める

$$\mathfrak{J} = \{X \in M(3, \mathbb{O}) \ ; \ {}^*X = X\} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} \ ; \ \xi_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{O} \right\}$$

  $X, Y \in \mathfrak{J}$ について，$X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ によりジョルダン積を定める．
- $(\mathfrak{J}, \circ)$ を例外ジョルダン代数という．
  $X, Y \in \mathfrak{J}$ に対して，$(X, Y) := \mathrm{tr}(X \circ Y)$ により内積が定まる．

定義 4.6

$\mathfrak{J}$ の線形自己同型写像 f で，$f(X \circ Y) = f(X) \circ f(Y)$ を満たすもの全体による群を，例外型コンパクトリー群 F_4 として定める．

F_4 の極大対蹠集合

- $Spin(8)$ は次の ϕ により，F_4 の部分群とみなせる．

$$\phi : Spin(8) \to F_4 \ , \ \phi(g_1, g_2, g_3) \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & g_3(x_3) & \overline{g_2(x_2)} \\ \overline{g_3(x_3)} & \xi_2 & g_1(x_1) \\ g_2(x_2) & \overline{g_1(x_1)} & \xi_3 \end{pmatrix} .$$

定理 4.7 (S)

$\Delta_{F_4} = \phi(\Delta_{Spin(8)})$ とすれば，Δ_{F_4} は F_4 の極大対蹠集合となる．
また，任意の極大対蹠集合は Δ_{F_4} と合同である．とくに，$\#_2 F_4 = 32$.

- F_4 では，全測地部分多様体の列

$$G_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subset Spin(8) \subset F_4$$

において，極大対蹠集合が極大対蹠集合として含まれている．

E_6 について

- ジョルダン代数 $\mathfrak{J}$ の複素化 $\mathfrak{J}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{J} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{J}$ を考える．
  τ を対応する共役とする．
- $X, Y \in \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ に対して，フロイデンタール積 $\times$ を次で定める．

$$X \times Y := \frac{1}{2}\Big(XY + YX - \mathrm{tr}(X)Y - \mathrm{tr}(Y)X + \big(\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(Y) - \mathrm{tr}(X \circ Y)\big)I_3\Big)$$

- フロイデンタール積 $\times$ に対して次が成り立つ．

$$\tau(X \times Y) = \tau(X) \times \tau(Y) \quad X, Y \in \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$$

- 以下，$X, Y \in \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ について

$$X * Y := \tau(X \times Y) = \tau(X) \times \tau(Y)$$

E_6 について

- $\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ のエルミート内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を次で定める.

$$\langle X, Y\rangle := (X, \tau(Y)) = \mathrm{tr}(X \circ \tau(Y)) \qquad (X, Y \in \mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$$

定義 4.8

$\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ の複素線形変換 f で，各 $X, Y \in \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ に対して

$$\begin{aligned} &(1)\ \langle f(X), f(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle \\ &(2)\ f(X * Y) = f(X) * f(Y) \end{aligned}$$

を満たす元全体による群を E_6 と定める.

E_6 の極大対蹠集合

- 各 $f \in F_4$ に対して，
$$f(X + \sqrt{-1}Y) = f(X) + \sqrt{-1}f(Y) \qquad (X, Y \in \mathfrak{J})$$
とすることで，自然に $F_4 \subset E_6$ となる．そこで，$\Delta^1_{E_6} := \Delta_{F_4}$ とおく．
- E_6 の極大トーラス T を 1 つ定め，T の極大対蹠集合を $\Delta^2_{E_6}$ とおく．
(dim $T = 6$ より，$\#\Delta^2_{E_6} = 2^6 = 64$ である．)

定理 4.9 (S)

E_6 の極大対蹠集合は，$\Delta^1_{E_6}, \Delta^2_{E_6}$ のいずれかと合同．とくに，$\#_2 E_6 = 64$.

- E_6 においては，２つの全測地的部分多様体の列
$$G_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subset Spin(8) \subset F_4 \subset E_6$$
$$\text{極大トーラス} \subset E_6$$
において，極大対蹠集合が極大対蹠集合として含まれている．

4. *FI*, *EI*, *EII* 型の極大対蹠集合

次の包含列を考える.

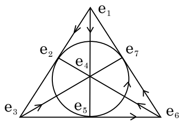
$\subset EI$

$$\begin{array}{ccccc} G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) & \subset & \tilde{G}_4(\mathbb{R}^8) & \subset & FI \\ \text{(結合的グラスマン多様体)} & & \text{(有向実グラスマン多様体)} & & \end{array}$$

$\subset EII$

結合的グラスマン多様体 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$

- $\mathbb{O}$ では結合則が成り立たない．
  - $(e_1 e_2)e_4 = e_3 e_4 = e_7$
  - $e_1(e_2 e_4) = e_1(-e_6) = -e_7$



- しかし，$\mathbb{H} = \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3$ などでは結合則が成り立つ．
  - $(e_1 e_2)e_3 = e_3 e_3 = -1$
  - $e_1(e_2 e_3) = e_1 e_1 = -1$
- $\mathbb{O}$ の 4 次元部分空間 V で．任意の $u, v, w \in V$ について

$$(uv)w = u(vw)$$

が成り立つものを，結合的部分空間という．

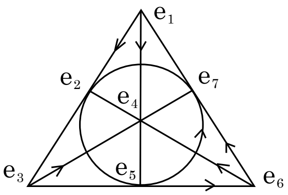
定義 5.1

結合的部分空間全体を $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ と記し，結合的グラスマン多様体という．

$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の極大対蹠集合

- とくに，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ は G 型コンパクト対称空間．
- $\mathbb{H}_1, \cdots, \mathbb{H}_7 \in G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ を次で定める．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H}_1 &= \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \\
\mathbb{H}_2 &= \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}e_5 \\
\mathbb{H}_3 &= \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_6 \oplus \mathbb{R}e_7 \\
\mathbb{H}_4 &= \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}e_6 \\
\mathbb{H}_5 &= \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{R}e_7 \\
\mathbb{H}_6 &= \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathbb{R}e_7 \\
\mathbb{H}_7 &= \mathbb{R}e_0 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_5 \oplus \mathbb{R}e_6
\end{aligned}
$$



補題 5.2 (Tanaka-Tasaki-Yasukura, 2022)

$\Delta_{G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})} = \{\mathbb{H}_1, \cdots, \mathbb{H}_7\}$ は，$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ の極大対蹠集合．
また，任意の極大対蹠集合は $\Delta_{G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})}$ と合同である．とくに，$\#_2 G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) = 7$.

$G_4(\mathbb{O})$ の 3 対原理

- $\mathbb{O}$ の 4 次元部分空間全体を $G_4(\mathbb{O})$ と記す．

系 5.3

任意の $V_1 \in G_4(\mathbb{O})$ に対して，$V_2, V_3 \in G_4(\mathbb{O})$ で次を満たすものが存在する．

$$\overline{v_i v_{i+1}} \in V_{i+2} \quad (v_i \in V_i,\ \text{添え字は } \mathrm{mod}3).$$

さらに，そのような (V_2, V_3) は $(V_2, V_3), (V_2^{\perp}, V_3^{\perp})$ に限る．

- $G_4^T(\mathbb{O})$ を次で定める．

$$G_4^T(\mathbb{O}) := \left\{ (V_1, V_2, V_3) \in \big(G_4(\mathbb{O})\big)^3 \ ; \ \begin{array}{l} \overline{v_i v_{i+1}} \in V_{i+2}, \\ v_i \in V_i,\ \text{添え字は } \mathrm{mod}3 \end{array} \right\}$$

有向実グラスマン多様体 $G_4^T(\mathbb{O})$

- 次は 2 重被覆である.

$$\pi : G_4^T(\mathbb{O}) \to G_4(\mathbb{O})\ ;\ (V_1, V_2, V_3) \mapsto V_1$$
$$\pi^{-1}(V_1) = \{(V_1, V_2, V_3), (V_1, V_2^{\perp}, V_3^{\perp})\}$$

- $G_4^T(\mathbb{O})$ は $\mathbb{R}^8$ の向き付き 4 次元部分空間全体による有向実グラスマン多様体とみなせる.

$G_4^T(\mathbb{O})$ の極大対蹠集合

- $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})$ から $G_4^T(\mathbb{O})$ へ，4 種類の全測地的埋め込み $g_0, \cdots, g_3$ が存在する．

$$
\begin{aligned}
g_0 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_4^T(\mathbb{O})\ ;\ V \mapsto (V, V, V),\\
g_1 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_4^T(\mathbb{O})\ ;\ V \mapsto (V, V^\perp, V^\perp),\\
g_2 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_4^T(\mathbb{O})\ ;\ V \mapsto (V^\perp, V, V^\perp),\\
g_3 &: G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \to G_4^T(\mathbb{O})\ ;\ V \mapsto (V^\perp, V^\perp, V),
\end{aligned}
$$

補題 5.4 (Tasaki,2014)

$\Delta_{G_4^T(\mathbb{O})} = \bigcup_{i=0}^3 g_i(\Delta_{G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O})})$ は，$G_4^T(\mathbb{O})$ の極大対蹠集合．

任意の極大対蹠集合は $\Delta_{G_4^T(\mathbb{O})}$ と合同である．とくに，$\#_2 G_4^T(\mathbb{O}) = 28$.

FI 型コンパクト対称空間 $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$

- $\mathfrak{J}$ のジョルダン積 $\circ$ に関する部分代数 $\mathfrak{J}_{\mathbb{H}}$ を次で定める.

$$\mathfrak{J}_{\mathbb{H}} = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} \ ; \ \xi_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{H} \right\}$$

定義 5.5

$\mathfrak{J}$ の $\circ$-部分代数 V で，$\mathfrak{J}_{\mathbb{H}}$ と同型であるもの全体を $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ と記す.

- F_4 はジョルダン積 $\circ$ に関する同型なので，$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ に作用している.

補題 5.6 (S)

F_4 が $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ に推移的に作用し，$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ は *FI* 型コンパクト対称空間.

$G_4^T(\mathbb{O}) \subset G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ について

- $G_4^T(\mathbb{O})$ から $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ への全測地的埋め込み ψ が存在する.

$$\psi : G_4^T(\mathbb{O}) \to G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \,;\, (V_1, V_2, V_3) \mapsto \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & v_3 & \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 & x_2 & v_1 \\ v_2 & \bar{v}_1 & x_1 \end{pmatrix} \;;\; \begin{array}{l} x_i \in \mathbb{R} \\ v_i \in V_i \ (i = 1, 2, 3) \end{array} \right\}$$

- $\Delta_{FI} = \psi(\Delta_{G_4^T(\mathbb{O})})$ とおく.

$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ の極大対蹠集合

定理 5.7 (S)

Δ_{FI} は，$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ の極大対蹠集合．
また，任意の極大対蹠集合は Δ_{FI} と合同である．とくに，$\#_2 FI = 28$．

- *FI* 型では，全測地的部分多様体の列

$$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \sqcup \cdots \sqcup G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \quad \subset \quad G_4^T(\mathbb{O}) \quad \subset \quad G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$$

  において，極大対蹠集合が極大対蹠集合として含まれている．
- この包含列は，四元数ケーラー多様体の包含列にもなっている．

EI 型コンパクト対称空間 $L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$

- $\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ の $*$-部分代数 V_I を次で定める.

$$
\begin{aligned}
V_I &:= \mathfrak{J}_{\mathbb{H}} \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{J}_{\mathbb{H}})^{\perp} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} + \sqrt{-1} \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 \\ -y_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{array}{c} \xi_i \in \mathbb{R}, \\ x_i \in \mathbb{H}, y_i \in \mathbb{H}^{\perp} \end{array} \right\}.
\end{aligned}
$$

定義 5.8

$\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ の $*$-部分代数で以下を満たすもの全体を $L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ と記す.

(1) V_I と同型

(2) エルミート内積から定まる内積に関して等長的

E_6 による $\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ への作用は $*$-準同型かつ等長的なので，$L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ への作用が誘導される.

$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \subset L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ ($FI \subset EI$ について)

補題 5.9 (S)

E_6 の $L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ への作用は推移的で，$L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ は EI 型コンパクト対称空間.

- 次の λ_I により，FI 型 $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ は EI 型 $L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ へ全測地的に埋め込める.

$$\lambda_I : G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \to L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})\ ;\ V \mapsto V \oplus \sqrt{-1}V^{\perp}$$

- $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) = F_4(\mathfrak{J}_{\mathbb{H}})$ であるので，

$$\lambda_I(G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})) = F_4(\mathfrak{J}_{\mathbb{H}} \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{J}_{\mathbb{H}})^{\perp})$$

とくに，$L_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ における，$\mathfrak{J}_{\mathbb{H}} \oplus \sqrt{-1}(\mathfrak{J}_{\mathbb{H}})^{\perp}$ を通る F_4-軌道が $\lambda_I(G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}))$.

EI 型の極大対蹠集合

- $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ の極大対蹠集合 Δ_{FI} により，$\Delta_{EI}^1 := \lambda_I(\Delta_{FI})$ と定める．
- EI 型の全測地的極大平坦トーラスの極大対蹠集合を Δ_{EI}^2 と定める．

  (EI 型のランクは 6 であり，$\#\Delta_{EI}^2 = 64$ となる)

定理 5.10 (S)

EI 型の極大対蹠集合は，$\Delta_{EI}^1, \Delta_{EI}^2$ のいずれかと合同．とくに，$\#_2 EI = 64$．

- EI 型においては全測地的部分多様体の包含列

$$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \sqcup \cdots \sqcup G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \quad \subset \quad G_4^T(\mathbb{O}) \quad \subset \quad FI \quad \subset \quad EI$$

$$\text{極大トーラス} \subset EI$$

において，極大対蹠集合が極大対蹠集合として含まれている．

EII 型コンパクト対称空間 $G^{\mathbb{C}}_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$

- $\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ の部分代数 V_{II} を次で定める.

$$V_{II} := \mathfrak{J}^{\mathbb{C}}_{\mathbb{H}} = \left\{ (a+\sqrt{-1}b)\begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x_2} \\ \overline{x_3} & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x_1} & \xi_3 \end{pmatrix} ; \begin{array}{c} a, b \in \mathbb{R}, \\ \xi_i \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{H} \end{array} \right\}.$$

定義 5.11

$\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ の $*$-部分代数で以下を満たすもの全体を $G^{\mathbb{C}}_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ と記す.

(1) V_{II} と同型

(2) エルミート内積から定まる内積に関して等長的

E_6 の $\mathfrak{J}^{\mathbb{C}}$ への作用は $*$-準同型かつ等長的なので, $G^{\mathbb{C}}_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ への作用が誘導される.

$G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \subset G_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ $(FI \subset EII)$

補題 5.12 (S)

E_6 は $G_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ へ推移的に作用し，$G_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ は EII 型コンパクト対称空間.

- FI 型 $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})$ は EII 型 $G_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ へ全測地的に埋め込める.

$$\lambda_{II} : G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) \to G_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})\ ;\ V \mapsto V^{\mathbb{C}}$$

- $G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}) = F_4(\mathfrak{J}_{\mathbb{H}})$ であるので，

$$\lambda_{II}(G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J})) = F_4(\mathfrak{J}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}})$$

とくに，$G_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}(\mathfrak{J}^{\mathbb{C}})$ における，$\mathfrak{J}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{C}}$ を通る F_4 軌道が $\lambda_{II}(G_{\mathbb{H}}(\mathfrak{J}))$.

- $G_{\mathbb{H}}(\underset{\mathfrak{J}}{\cancel{\mathfrak{E}}})$ の極大対蹠集合 Δ_{FI} を用いて，$\Delta_{EII}^{1} := \lambda_{II}(\Delta_{FI})$ と定める.

EII 型の極大対蹠集合

EII 型は E_6 の極地としても実現できる．

- 対称空間 M について，$p \in M$ の点対称 s_p の不動点集合 $F(s_p, M)$ の連結成分を極地という．

  p を含む M の対蹠集合 A に対して，$A \subset F(s_p, M)$.

- E_6 の単位元に関する極地は，自明な極，EII 型，$EIII$ 型で与えられる．

- T を E_6 の極大トーラスとし，T の極大対蹠集合と EII 型極地の共通部分を Δ^2_{EII} とおく（$\#\Delta^2_{EII} = 36$）

- Δ^2_{EII} は，有向実グラスマン多様体を用いても構成ができる．

EII 型の極大対蹠集合

定理 5.13 (S)

EII の極大対蹠集合は，$\Delta^1_{EII}, \Delta^2_{EII}$ のいずれかと合同．とくに，$\#_2 EII = 36$.

- EII 型においては全測地的部分多様体の包含列

$$G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \sqcup \cdots \sqcup G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \quad \subset \quad G_4^T(\mathbb{O}) \quad \subset \quad FI \quad \subset \quad EII$$

  および有向実グラスマン多様体を用いて，極大対蹠集合の構成ができる．

- 上記の包含列は，四元数ケーラー多様体の包含列にもなっている．

本日のまとめ

- 対称空間においては，極大対蹠集合と呼ばれる有限離散集合が定義される．
- 例外型コンパクトリー群 F_4, E_6 および FI, EI, EII 型の極大対蹠集合の構成を紹介した．
- F_4 の任意の極大対蹠集合は互いに合同

  包含列 $G_2 \subset Spin(8) \subset F_4$ を用いて構成ができる．
- FI 型の任意の極大対蹠集合は互いに合同

  包含列 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \subset G_4^T(\mathbb{O}) \subset FI$ を用いて構成できる．

本日のまとめ

- E_6 の極大対蹠集合の合同類の数は 2.

  包含列 $G_2 \subset Spin(8) \subset F_4 \subset E_6$ および極大トーラスを用いて構成できる.

- EI 型の極大対蹠集合の合同類の数は 2.

  包含列 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \subset G_4^T(\mathbb{O}) \subset FI \subset EI$ および極大トーラスを用いて構成できる.

- EII 型の極大対蹠集合の合同類の数は 2.

  包含列 $G_{\mathbb{H}}(\mathbb{O}) \subset G_4^T(\mathbb{O}) \subset FI \subset EII$ および有向実グラスマン多様体を用いて構成できる.

ご清聴ありがとうございました！