σ-作用の軌道の幾何学

-triality automorphism の場合を中心にして-

井川 治

京都工芸繊維大学

2022 年 12 月 24 日

はじめに

この講演は間下克哉氏（法政大学）との共同研究の内容である．

はじめに (やること)

$G = Spin(8) = [SO(8) = SO(\mathbb{O})$ の普遍二重被覆群] (28 次元)

σ: triality automorphism (G の位数 3 の外部自己同型，八元数 $\mathbb{O}$ を用いて構成される)

この σ による$\underline{\sigma\ 作用}$の軌道の幾何学を研究したい（軌道空間，各軌道の性質）

以下しばらく，σ 作用の定義と研究の背景・動機

はじめに (定義：σ 作用と Cartan 埋め込み)

G: compact 連結 Lie 群，σ: 自己同型, $G \curvearrowright G; g \cdot x = gx\sigma(g^{-1})$: $\underline{\sigma \text{ 作用}}$

例 $\sigma = 1$ のとき，σ 作用は随伴作用, $G = \bigcup_{g \in G} gAg^{-1}$ ($A \subset G$: 極大トーラス)

一般の場合は $A \subset F(\sigma, G)$: 極大トーラス，$G = \bigcup_{g \in G} gA\sigma(g^{-1})$

$G \to G; g \mapsto g\sigma(g^{-1})$ から誘導される埋め込み

$F : G/F(\sigma, G) \to G; gF(\sigma, G) \mapsto g\sigma(g^{-1})$: Cartan 埋め込み

はじめに (定義：σ 作用と Hermann 作用)

U: compact 連結 Lie 群，θ_1, θ_2: 対合，$K_i := F(\theta_i, U)$，$K_1 \curvearrowright U/K_2$: Hermann 作用

例 $\theta_1 = \theta_2$ のとき，Hermann 作用は compact 対称空間へのイソトロピー作用

(1) σ 作用 $G \curvearrowright G; g \cdot x = gx\sigma(g^{-1})$ は Hermann 作用

(2) $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1 \Leftrightarrow \sigma^2 = 1$

[証明] (1) $U := G \times G, \theta_1(g,h) := (\sigma^{-1}(h), \sigma(g)), \theta_2(g,h) := (h,g)$

$K_1 = \{(g, \sigma(g))\}, K_2 = \{(g,g)\}, U/K_2 \leftrightarrow G; (a,b)K_2 \leftrightarrow ab^{-1}$

$K_1 \curvearrowright U/K_2; (g, \sigma(g))(a,b)K_2 = (ga, \sigma(g)b)K_2 \leftrightarrow g(ab^{-1})\sigma(g^{-1})$

(2) $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1 \Leftrightarrow (\sigma^{-1}(g), \sigma(h)) = (\sigma(g), \sigma^{-1}(h)) \Leftrightarrow \sigma^2 = 1$ $\square$

はじめに　(先行研究)

σ が内部自己同型のとき，軌道の研究は $\sigma = 1$ の場合に帰着

(σ 作用以外の) 可換な Hermann 作用の軌道の研究 I (2011)

σ: 対合のとき，σ 作用の軌道の研究 I (2018)

(σ 作用以外の) 非可換な Hermann 作用の軌道の研究 大野

σ が位数 3 以上の外部自己同型写像のとき，σ 作用の軌道の幾何学を研究したい

はじめに　(σ 作用の軌道)

G: compact 連結 Lie 群，σ: 自己同型，$\tau = \tau_a$: 内部自己同型，$\sigma' := \tau \circ \sigma$

一般には，σ' と σ は位数すら，異なる

O_x: σ 作用の点 x を通る軌道, O'_x: σ' 作用の点 x を通る軌道

$$\begin{aligned} O'_x &= \{gx\sigma'(g) \mid g \in G\} = \{gx\tau(\sigma(g)) \mid g \in G\} = \{gxa\sigma(g)a^{-1} \mid g \in G\} \\ &= \{g(xa)\sigma(g) \mid g \in G\}a^{-1} = O_{xa}a^{-1} \end{aligned}$$

σ 作用の軌道を考えるときには，σ: G の Dynkin 図形の非自明合同変換の誘導する外部自己同型写像としてよい

$Spin(8)$ の triality automorphism (既知の事実)

$G = Spin(8) = [SO(8) = SO(\mathbb{O})$ の普遍二重被覆群] (28 次元)

σ: triality automorphism (G の位数 3 の外部自己同型，八元数 $\mathbb{O}$ を用いて構成される)

σ による固定部分群は G_2 （14 次元）

G の G 自身への作用：$g \cdot x = gx\sigma(g^{-1})$ (σ-作用)

この σ 作用の余等質性 (=最大次元軌道の余次元) は 2

G_2 の極大トーラスを $A = \exp \mathfrak{a}$ とすると，A は 2 次元で，σ 作用の切断
(軌道の性質を調べる際には A の点の軌道を調べれば十分)

部分多様体論の復習

$M^n \subset \tilde{M}$: Riemann 部分多様体, h: 第二基本形式，A: 形作用素，m: 平均曲率ベクトル

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \qquad \langle A^\xi(X), Y\rangle = \langle h(X, Y), \xi\rangle, \quad m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

<u>austere</u> [Harvey-Lawson] A^ξ の固有値の集合が重複度を含めて -1 倍で不変

<u>弱鏡映</u>: (I-酒井-田崎) 任意の $x \in M, \xi \in T_x^\perp(M)$ に対し，$\tilde{M}$ の等長変換 φ_ξ が存在して，$\varphi_\xi(x) = x, (d\varphi_\xi)_x(\xi) = -\xi, \varphi_\xi(M) = M$ このとき，$(d\varphi_\xi)_x^{-1} A^\xi (d\varphi_\xi)_x = -A^\xi$

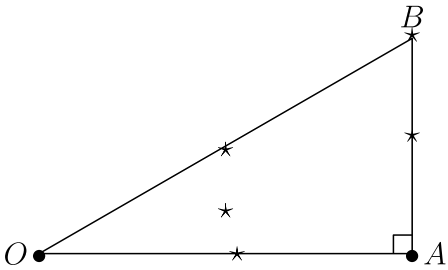
全測地的 $h = 0 \Rightarrow$ austere $\Rightarrow$ 極小 $m = 0 (\Leftrightarrow \mathrm{tr}(A^\xi) = 0 \quad (\forall \xi))$

(鏡映, Leung $\Rightarrow$) 弱鏡映 $\Rightarrow$ austere

主結果 1

定理 (I-間下)

σ 作用の軌道空間は直角三角形 $\triangle OAB \subset \mathfrak{a}$ と同一視できる．
O, A は弱鏡映軌道
$\star$ は *austere* ではない極小軌道．　極小軌道はこれらしかない (全測地的軌道はない)



Cartan 埋め込みとの関係

G: compact 連結 Lie 群，σ: 自己同型

σ 作用の軌道 $O_x = \{gx\sigma(g^{-1}) \mid g \in G\}$

σ の定める Cartan 埋め込みの像 $\{g\sigma(g^{-1}) \mid g \in G\} = O_e$

$O_x = \{gx\sigma(g^{-1})x^{-1} \mid g \in G\}x = \{g(\tau_x\sigma)(g^{-1}) \mid g \in G\}x$

$\{\sigma$作用の点xの軌道 $\mid \sigma :$ 自己同型$, x \in G\}$

$= \{\sigma$作用の点xの軌道 $\mid \sigma :$ Dynkin 図形の合同変換から誘導$, x \in A \subset F(\sigma, G)\}$

$= \{\sigma$の定める Cartan 埋め込みの像 $\mid \sigma :$ 自己同型$\}$

Cartan 埋め込みとの関係

問題 $G = Spin(8), \sigma =$triallity automorphism のとき，極小軌道 O_x と合同な Cartan 埋め込みを定める σ' は有限位数か?

答え　頂点 O, A, B の軌道については σ' は有限位数，他は σ' は無限位数

頂点 O, A, B の軌道は有限位数であることは簡単に示される

辺 OA, OB, AB 上の極小軌道について σ' が無限位数であることの証明には円分体の議論を用いて示される．

内点の極小軌道について σ' が無限位数であることの証明にはコンピューターによるグレブナー基底の計算を用いる．

主結果 2: Austere Cartan 埋め込み

定理 (I-間下)

G: *compact* 連結単純 *Lie* 群，σ: 自己同型
σ から定まる *Cartan* 埋め込みの像 $F(G/G_\sigma) \subset G$ が *austere* ならば，σ: 有限位数

注意．上記の austere は極小には置き換えられない

木村-間下の結果と合わせると，austere Cartan 埋め込みが分類された．

今後の課題

非可換まで含めた Hermann 作用の軌道の一般論の構築
(二重佐武図形，標準形の利用など（馬場との共同研究）)

無限次元 Lie 環との関わり
(σ 作用の場合は密接に関わる．一般の (非可換) Hermann 作用の場合は?)

参考文献

- O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, Wealky reflective submanifolds and austere submanifolds, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), 437–481.
- O. Ikawa, The geometry of symmetric triads and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 79–136.
- O. Ikawa, σ-actions and symmetric triads, Tohoku Math. J. (2018), 547–565.
- T. Kimura and K. Mashimo, Classification of Cartan embeddings which are austere submanifolds, Hokkaido Math. J. (2022), 1–23.
- K. Mashimo, Cartan embeddings of compact Riemannian 3-symmetric spaces, Tokyo J. Math. **19** (1996), 353–364.
- S. Ohno, Geometric properties of orbits of Hermann actions, https://arxiv.org/abs/2101.00765