2017年9月9日　研究集会「対称空間論とその周辺」

複素射影空間のLagrange部分多様体のホモロジー的剛性

入江　博　(茨城大学)

1　田崎先生との共同研究の歴史

2009年 酒井さんと積分幾何を使って複素二次超曲面$Q_n(\mathbb{C})$の実形の２つの系列のglobal tight性を証明

2009年 田崎先生により, $Q_n(\mathbb{C})$のすべての実形で解決 (対蹠集合)

2009年 Floerホモロジーの計算(Y.-G.Oh氏による未解決問題(1993))に応用できるのでは?

(**Ref.** 湯沢2009の記録集)

2010年 コンパクト型Hermite対称空間の場合に, 実形の交叉 $L_0 \cap L_1$ が対蹠集合であること(田中先生-田崎先生)が示される.

2010年10月 コンパクト型Hermite対称空間の場合に, 実形の対でFloerホモロジー $HF(L_0, L_1)$ を計算. ($L_0 = S^2, L_1 = S^1 \times S^1 \subset Q_2(\mathbb{C})$ で説明したところ, 半日で一般化完了.)

2012年〜 複素旗多様体の場合に拡張を始める. (with 田崎先生, 酒井さん)

2017年 ほぼ満足のいく形で解決. 論文準備中 (with 井川先生, 奥田さん, 酒井さん, 田崎先生)

2 Lagrange埋込みの位相的制約

Definition.

(M^{2n}, ω) : **symplectic manifold**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \omega \in \Omega^2(M),\ d\omega = 0,\ \omega$: non-deg.

Definition.

$L \subset (M, \omega)$: **Lagrange submanifold**(埋め込み)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dim L = \frac{1}{2} \dim M,\ \omega|_L = 0.$

Example.

(1) $S^1 \subset (\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$

(2) $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1 \subset (\mathbb{R}^{2n}, \sum_i dx_i \wedge dy_i)$

- $\omega_0 := \sum_i dx_i \wedge dy_i$ (標準的symplectic構造)
- 以下, 考えるLagrangian submanifoldはすべてclosedで埋め込みとし, Lagと書く.

Theorem (Gromov, 1985)
$L \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$: Lag $\Longrightarrow H^1(L, \mathbb{R}) \neq 0$.

- この制約の意味は?

Example.
(1) $\mathbb{R}P^n \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$ (実形)
(2) $\mathbb{T}^n_{\mathrm{Clif}} \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$ (Cliffordトーラス)

$$\frac{H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}) = 0}{H_1(L, \mathbb{Z}) : \text{torsion}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & H^1(L, \mathbb{R}) \\ & \cong \mathrm{Hom}(H_1(L, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \oplus \mathrm{Ext}(H_0(L, \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \\ & = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ L は Darboux chart に入れない.

つまり, $H_1(L, \mathbb{Z})$: torsion なる L は, symplectic manifold (M, ω) の "大域的な" Lagrange 埋め込みになる可能性しかない.

Theorem (P. Seidel, 2000)
$L \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$: Lag $\Longrightarrow H^1(L, \mathbb{Z}_{2n+2}) \neq 0.$

Theorem (P. Biran, 2006)
$L \subset \mathbb{C}P^n$: Lag, $H_1(L, \mathbb{Z})$: 2-torsion
(i.e., $2H_1(L, \mathbb{Z}) = 0$)

$\Longrightarrow$

(1) $H^*(L, \mathbb{Z}_2) \cong H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2)$ (as graded v.s.)
(2) n : even $\Rightarrow$ 〃 (as graded alg.)

Conjecture (Biran-Cornea) 上の仮定の下で,
L は $\mathbb{R}P^n$ と Hamiltonian isotopic. (??)

◎現在では, 深谷圏の研究の進展により, M が余接束の場合にはさらに強力な結果(ホモトピー同値になるなど)が知られている. (深谷, Seidel, Smith, Abouzaid, ...)

Theorem (P. Abouzaid, 2012)
N : closed manifold
$L \subset T^*N$: exact Lag, Maslov class=0
$\Longrightarrow$ $L \overset{\iota}{\subset} T^*N$ is homotopy equivalent.

Main Theorem (2014)

$L \subset \mathbb{C}P^n$: Lag, $H_1(L, \mathbb{Z})$: 3-torsion

$\Longrightarrow \ 3 \,|\, n+1, \ \chi(L) = 0.$

さらに, 以下のような graded algebra としての同型が得られる:

(1) $n = 5$のとき,

$$H^*(L; \mathbb{Z}_2) \cong H^*\left(\frac{SU(3)}{SO(3)\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}_2\right) \cong \wedge(x_2, x_3)$$

(2) $n = 8$のとき,

$$H^*(L;\mathbb{Z}_2) \cong H^*\left(\frac{SU(3)}{\mathbb{Z}_3};\mathbb{Z}_2\right) \cong \wedge(x_3, x_5)$$

(3) $n = 14$のとき, $H^2(L;\mathbb{Z}_2) = 0$ ならば,

$$H^*(L;\mathbb{Z}_2) \cong \wedge(x_5, x_9)$$

(4) $n = 26$のとき, $H^i(L;\mathbb{Z}_2) = 0$ $(i = 2, 3, 4)$ ならば,

$$H^*(L;\mathbb{Z}_2) \cong H^*\left(\frac{E_6}{F_4\mathbb{Z}_3};\mathbb{Z}_2\right) \cong \wedge(x_9, x_{17})$$

3　単調性と最小Maslov数

$L \subset (M, \omega)$: Lag

- $I_\mu : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}$, Maslov指数
- $I_\omega : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$,

  $I_\omega([u]) := \int_{D^2} u^*\omega$ for $u : D^2 \to (M, L)$.

Definition.

(1) L : 単調 **(monotone)**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha > 0$: const. s.t. $I_\omega = \alpha I_\mu$.

(2) $N_L \geq 0$: Lの最小**Maslov**数

$\Longleftrightarrow \{I_\mu(u) \mid [u] \in \pi_2(M, L)\} = N_L \cdot \mathbb{Z}$

Example.

(1) $\mathbb{R}P^n$: monotone, $N_{\mathbb{R}P^n} = n+1$

(2) $\mathbb{T}^n_{\mathrm{Clif}}$: monotone, $N_{\mathbb{T}^n_{\mathrm{Clif}}} = 2$

Remark.

(1) $L \subset \mathbb{C}P^n$: monotone Lag

$$\Rightarrow \ 1 \leq N_L \leq n+1$$

(2) $N_L = n+1 \ \Rightarrow \ L = \mathbb{Z}_2$-homological $\mathbb{R}P^n$

- N_L が中間的な L の例を作れるか?

内藤-竹内 (1980頃), 大仁田-Amarzaya (2003)

$L \subset \mathbb{C}P^n$: irreducible **symmetric** Lag

(1) $L = \mathbb{R}P^n$,

(2) $L = \dfrac{SU(p)}{\mathbb{Z}_p}$ if $n+1 = p^2$,

(3) $L = \dfrac{SU(p)}{SO(p)\mathbb{Z}_p}$ if $n+1 = \dfrac{p(p+1)}{2}$,

(4) $L = \dfrac{SU(2p)}{Sp(p)\mathbb{Z}_{2p}}$ if $n+1 = p(2p-1)$,

(5) $L = \dfrac{E_6}{F_4\mathbb{Z}_3}$ if $n+1 = 27$,

$SU(p)/\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{C}P^{p^2-1}$ の作り方

- $U(p) \overset{\text{Lag}}{\subset} GL_p(\mathbb{C}) \overset{\text{open}}{\subset} (M_p(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{p^2}, \omega_0)$

$$\begin{array}{ccccc} U(p) & \subset & S^{2p^2-1} & \subset & (\mathbb{C}^{p^2}, \omega_0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ U(p)/S^1 & \overset{\text{Lag}}{\subset} & \mathbb{C}P^{p^2-1} & & \end{array}$$

- $\mathbb{Z}_p = \{e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{j}{p}} I_p \mid j = 0, 1, \cdots, p-1\} \subset S^1$

Proposition.
$L \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$: Lag, $H_1(L, \mathbb{Z})$: torsion
$\Longrightarrow L$: monotone

Proposition. p : 素数
$L \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$: Lag, $H_1(L, \mathbb{Z})$: p-torsion
$$\Longrightarrow N_L = \frac{2(n+1)}{p}$$

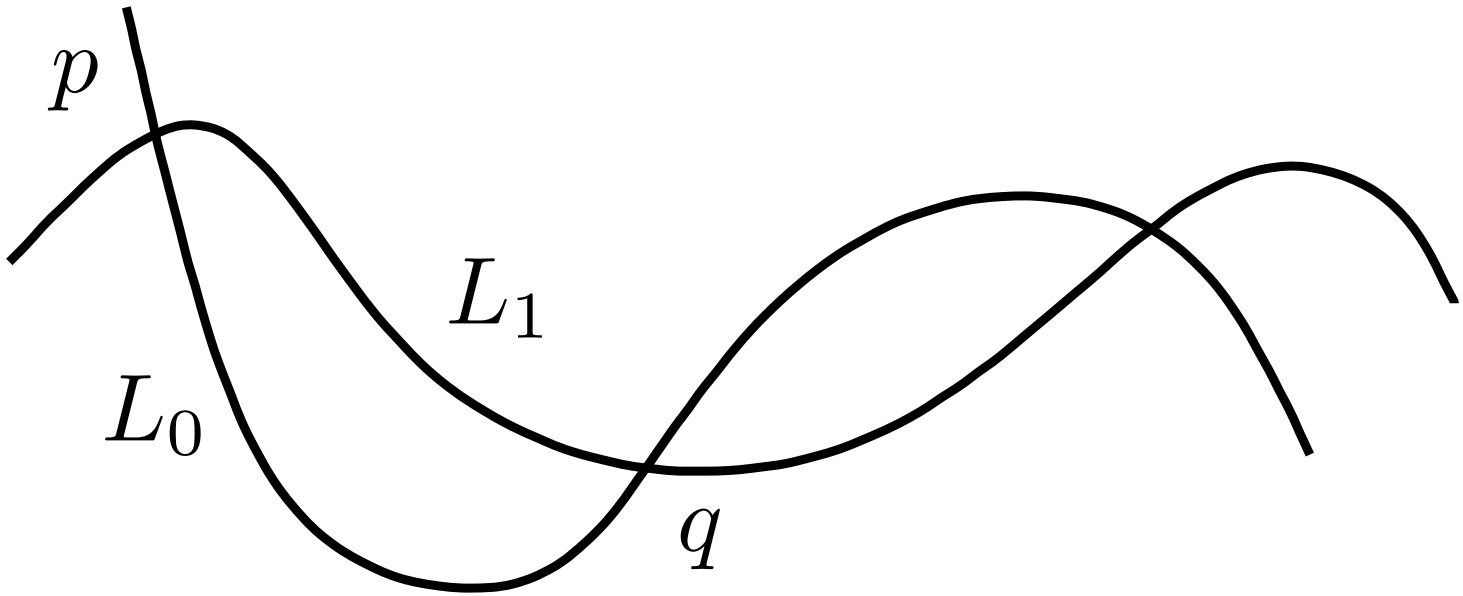
- pが素数でなくても,
  $$N_{\frac{SU(p)}{\mathbb{Z}_p}} = 2p \quad (n+1 = p^2)$$

4　Floerホモロジー

(M, ω) : 閉シンプレクティック多様体

J_t : ω とcompatibleな概複素構造

L_0, L_1 : 閉Lagrange部分多様体, $L_0 \pitchfork L_1$

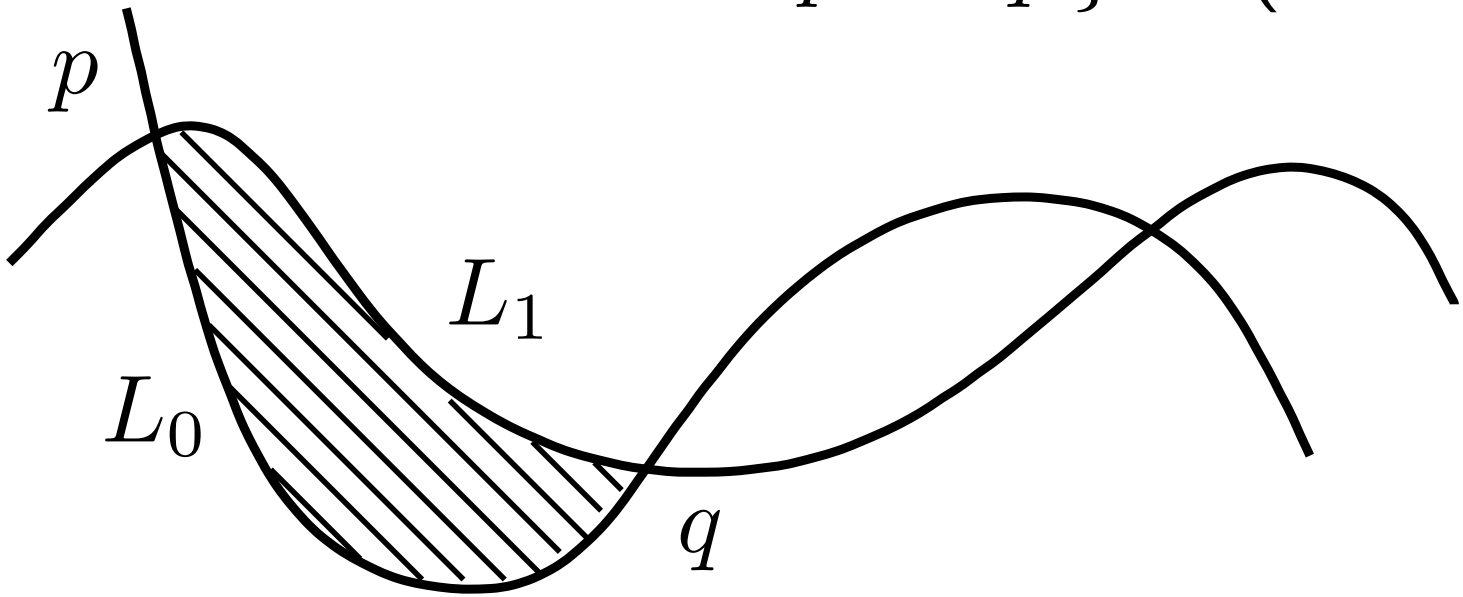


$CF(L_0, L_1)$: $L_0 \cap L_1$ で生成される自由$\mathbb{Z}_2$-加群

$$\partial : CF(L_0, L_1) \longrightarrow CF(L_0, L_1)$$

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q$$

$n(p,q) := \#\{$ isolated **J-holomorphic strip** from p to q $\}$ $\pmod 2$



- $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ satisfying

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(\cdot, 0) \in L_0, \ u(\cdot, 1) \in L_1, \\ u(-\infty, \cdot) = p, \ u(+\infty, \cdot) = q. \end{cases}$$

- $\partial^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad HF(L_0, L_1) := \ker \partial / \mathrm{im} \partial$

Lag の対 (L_0, L_1) の $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジー

- L_0 と L_1 が Hamilton isotopic の場合は, spectral sequence を用いて計算が可能.

- L : 単調, $N_L \geq 2 \implies HF(L)$: well-def.
- $U(L)$: Weinstein nbd of $L \subset M$

$L_\varepsilon \subset U(L)$: Hamiltonian perturbation of L by $f : L \to \mathbb{R}$, C^2-small Morse fct

- (C_f^*, ∂_0) : Morse complex of $L \subset M$

$(CF(L) := CF(L, L_\varepsilon), d_J)$: Floer complex

Theorem (Oh / Biran)

$CF^{i(\mathrm{mod}\, N_L)}(L) = \oplus_{j \cong i(\mathrm{mod}\, N_L)} C_f^j$,

$$d_J = \partial_0 + \partial_1 + \cdots + \partial_\nu, \quad \nu = \lfloor \frac{\dim L + 1}{N_L} \rfloor,$$

where $\partial_j : C_f^* \to C_f^{*+1-jN_L}$.

Remark.

$H^*(C_f, \partial_0) \cong H^*(L; \mathbb{Z}_2)$

<u>spectral sequence</u>

- $\Lambda = \mathbb{Z}_2[T, T^{-1}] = \oplus_{\deg = i} \Lambda^i, \ \deg T = N_L$

$l \in \mathbb{Z}, \ \ CF^l(L, L_\varepsilon) = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} C_f^{l-kN_L} \otimes \Lambda^{kN_L}$

- $d := \partial_0 \otimes 1 + \partial_1 \otimes T + \cdots + \partial_\nu \otimes T^\nu$ とおくと,

$d : CF^l(L, L_\varepsilon) \to CF^{l+1}(L, L_\varepsilon), \ \ d \circ d = 0.$

- $F^pCF(L, L_\varepsilon)$
  $:= \{\sum_i x_i \otimes T^{n_i} \mid x \in C_f,\, n_i \geq p\}$
  decreasing filtration compatible with d

$$\downarrow$$

$\{E_r^{p,q}, d_r\}$: Oh-Biran's spectral sequence

Theorem (FOOO / Biran)

(1) $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ collapses at page $(\nu + 1)$,
i.e., $E_{\nu+1}^{p,q} = E_{\nu+2}^{p,q} = \cdots = E_\infty^{p,q}$.

(2) $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\oplus_{q \in \mathbb{Z}} E_\infty^{p,q} \cong HF(L)$.

(3) $E_2^{0,q} = \frac{\ker([\partial_1]: H^q(L;\mathbb{Z}_2) \to H^{q+1-N_L}(L;\mathbb{Z}_2))}{\mathrm{im}([\partial_1]: H^{q-1+N_L}(L;\mathbb{Z}_2) \to H^q(L;\mathbb{Z}_2))}$.

Proposition (後で)
$L \subset (\mathbb{C}P^n, \omega_{\mathrm{FS}})$: Lag, $N_L \geq 3$,
$H_1(L, \mathbb{Z})$ has no even torsion
$\Longrightarrow HF(L) = 0.$

• spectral sequence が E_2-項で退化し, 上の命題が使える L に対しては, Lの(コ)ホモロジーへの制約が得られる.

Remark.
(1) $HF(\mathbb{R}P^n) \neq 0 \quad (H_1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2)$
(2) $HF(\mathbb{T}^n_{\mathrm{Clif}}) \neq 0 \quad (N_{T^n_{\mathrm{Clif}}} = 2)$

5 Main Theorem の証明

- $L \subset \mathbb{C}P^8$: Lag, $H_1(L, \mathbb{Z})$: 3-torsion と仮定

$$N_L = \frac{2(8+1)}{3} = 6,\ \nu = \lfloor \frac{n+1}{N_L} \rfloor = \lfloor \frac{9}{6} \rfloor = 1.$$

$\therefore$ $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ は E_2-項で退化

さらに, $HF(L) = 0$. **Theorem** より, $\forall q \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 0 &= E_2^{0,q} \\ &= \frac{\ker([\partial_1] : H^q(L; \mathbb{Z}_2) \to H^{q-5}(L; \mathbb{Z}_2))}{\mathrm{im}([\partial_1] : H^{q+5}(L; \mathbb{Z}_2) \to H^q(L; \mathbb{Z}_2))}. \end{aligned}$$

$\forall q \in \mathbb{Z}$ に対して, 次は exact sequence;

$$H^{q+5}(L;\mathbb{Z}_2) \to H^q(L;\mathbb{Z}_2) \to H^{q-5}(L;\mathbb{Z}_2)$$

$$q = 0 : H^5(L) \to H^0(L) \cong \mathbb{Z}_2 \to 0$$

$$q = 1 : H^6(L) \to H^1(L) \to 0$$

$$q = 2 : H^7(L) \to H^2(L) \to 0$$

$$q = 3 : H^8(L) \to H^3(L) \to 0$$

$$q = 4 : 0 \to H^4(L) \to 0$$

$$q = 5 : 0 \to H^5(L) \to H^0(L)$$

$$q = 6 : 0 \to H^6(L) \to H^1(L)$$

$$q = 7 : 0 \to H^7(L) \to H^2(L)$$

$$q = 8 : 0 \to H^8(L) \cong \mathbb{Z}_2 \to H^3(L)$$

Poincaré duality により, 後は $H^1(L;\mathbb{Z}_2)$ を決めればよい.

$H_1(L,\mathbb{Z})$: 3-torsion より

$$\begin{aligned} &H^1(L,\mathbb{Z}_2) \\ &\cong \mathrm{Hom}(H_1(L,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Ext}(H_0(L,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\therefore\ H^*(L;\mathbb{Z}_2) \cong \wedge(x_3,x_5) \cong H^*\left(\frac{SU(3)}{\mathbb{Z}_3};\mathbb{Z}_2\right)$$

(as a graded vector space)

6　Floerコホモロジーの消滅定理

Lag S^1-bundle construction (Biran)

- $\mathbb{C}P^n \subset \mathbb{C}P^{n+1}$,　$\mathbb{C}P^{n+1} \setminus \mathbb{C}P^n \cong B^{2n+2}$
- $L \subset \mathbb{C}P^n$: Lag, monotone

$\Gamma_L \to L$: S^1-束, Lag, monotone in B^{2n+2}.
さらに, $N_{\Gamma_L} = N_L$.

Theorem (Biran-Jerby, 2013)
$L \subset \mathbb{C}P^n$: monotone Lag,　$N_L \geq 3$.
$HF(L) \neq 0 \implies 0 \neq e(\Gamma_L) \in H^2(L, \mathbb{Z}_2)$.

ここで, $e(\Gamma_L)$: $\mathbb{Z}_2$-Euler class

Lemma.
$L \subset \mathbb{C}P^n$: Lag, $H_1(L, \mathbb{Z})$ has no even torsion.
$\Longrightarrow e(\Gamma_L) = 0.$

よって,

Proposition (再び)
$L \subset \mathbb{C}P^n$: Lag, $N_L \geq 3$,
$H_1(L, \mathbb{Z})$ has no even torsion.
$\Longrightarrow HF(L) = 0.$

証明方法の比較

Biran (2006)　2-torsion case

- $HF(\Gamma_L) = 0$
- spectral sequence を Γ_L に適用
- $\Gamma_L \to L$: S^1-束

I. (2014)　3-torsion case

- $HF(L) = 0$
- spectral sequence を L に適用

7 Non-displaceability (副産物)

- Lag $L \subset (M, \omega)$ は, 任意のHamilton微分同相写像 φ に対して $L \cap \varphi(L) \neq \emptyset$ となるとき, **non-displaceable** であるという.

- $HF(L) \neq 0 \implies L$: non-displaceable

Example.

(1) $L := \mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ (実形)

- $HF(L) = 0$ と仮定

$$N_L = \frac{2(n+1)}{2} = n+1, \quad \nu = \lfloor \frac{n+1}{N_L} \rfloor = 1.$$

$$0 = E_2^{0,q}$$
$$= \frac{\ker([\partial_1] : H^q(L;\mathbb{Z}_2) \to H^{q-n}(L;\mathbb{Z}_2))}{\mathrm{im}([\partial_1] : H^{q+n}(L;\mathbb{Z}_2) \to H^q(L;\mathbb{Z}_2))}.$$

$q = 1$とすると,

$H^{n+1}(L) = 0 \to H^1(L) \cong \mathbb{Z}_2 \to H^{1-n}(L) = 0.$

矛盾 $\therefore\ HF(L) \neq 0.$

よって, $L = \mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$: non-displaceable.

Remark.

Maさん-大仁田先生-宮岡先生との, 等径超曲面のガウス像$\subset Q_n(\mathbb{C})$ の共同研究はこの方法(E_3項)

(2) $L := SU(3)/\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{C}P^8$

消滅定理により, $HF(L) = 0$ であった!

(2) $L := SU(3)/\mathbb{Z}_3 \subset \mathbb{C}P^8$

消滅定理により, $HF(L) = 0$ であった!

• $HF(L;\mathbb{Z}) = 0$ と仮定 ([FOOO]の理論利用)

spectral sequence より,

$H^4(L;\mathbb{Z}) = 0,\ H^5(L;\mathbb{Z}) \cong H^0(L;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$

普遍係数定理より, $H^4(L;\mathbb{Z}_3) = 0.$

<u>A. Borel</u> (1953)

$H^*\left(SU(3)/\mathbb{Z}_3;\mathbb{Z}_3\right) \cong \wedge(x_1, x_3) \otimes \mathbb{Z}_3[y]/(y^3),$

ただし, $\deg y = 2.$

これより, $H^4(L;\mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3.$ 矛盾

よって, $\dfrac{SU(3)}{\mathbb{Z}_3} \subset \mathbb{C}P^8$: non-displaceable.

同様に, E_3-退化を利用して,

$\dfrac{SU(5)}{\mathbb{Z}_5} \subset \mathbb{C}P^{24}$: non-displaceable.

よって, $\dfrac{SU(3)}{\mathbb{Z}_3} \subset \mathbb{C}P^8$: non-displaceable.

同様に, E_3-退化を利用して,

$\dfrac{SU(5)}{\mathbb{Z}_5} \subset \mathbb{C}P^{24}$: non-displaceable.

終