2011/04/18

Gyroid

佐藤興平

1 Gyroid の発見

Gyroid は、1970 年に NASA の物理学者であった Alan Schoen によって発見された。

2　Gyroid とは

Gyroid は三次元周期の極小曲面の一つである。三次元周期の曲面は fundamental patch を用いて描くことができる。ここで、fundamental patch というのは、曲面全体を構成することのできる最小の部分である。（この fundamental patch さえわかってしまえば、それをいくつか接続することで曲面全体を構成することができるということ）
また、極小曲面の座標は Weierstrass-Enneper の表現式によって与えられる。

$$\mathrm{x} = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\int_{w_0}^{w}(1-\tau^{2)}R(\tau)d\tau\right)$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\int_{w_0}^{w}i(1+\tau^2)\,\mathrm{R}(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$$

$$\mathrm{z} = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\int_{w_0}^{w}2\tau R(\tau)d\tau\right)$$

$$\mathrm{w}\text{: variable} \qquad w_0: fix \qquad \tau \in \mathbb{C}$$

$$\mathrm{R}(\tau)\text{: Weierstrass function}$$

Bonnet 角θを変えることで、ガウス曲率と計量を保ったまま他の極小曲面を生成することができる。これらの極小曲面の族を随伴極小曲面と呼ぶ。$\theta = \frac{\pi}{2}$のときの随伴極小曲面は共役極小曲面と呼ばれる。

Schwarz P,D surface,Gyroid の Weierstrass function $\mathrm{R}(\tau)$は

$$\mathrm{R}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau^8 - 14\tau^4 + 1}}$$

で与えられる。Bonnet 角$\theta = 0$の Schwarz D (Diamond) surface を考えると、その共役極小曲面は Schwarz P(Primitive) surface と呼ばれる。
ここで、第一種楕円積分と第二種楕円積分を

$$\mathrm{ElipticF}(\varphi, \mathrm{k}) = \int_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2(\sin\theta)^2}}$$

$$\mathrm{EllipticK(k)} = \mathrm{ElipticF}\left(\frac{\pi}{2}, \mathrm{k}\right)$$

と定義することにする。

Gyroid は、Bonnet 角θ＝ArcCot[K'/K]=38.0147° のときに現れる曲面である。ここで、K'＝EllipticK[3/4],K=EllipticK[1/4]である。Weierstrass-Enneper の表現公式によって与えられた座標の右辺の積分は、Legendre-Jacobi integral によって、ElipticF(φ,k)によって表される。

$$\mathrm{x} = \kappa\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\theta}}{2\sqrt{2}} ElipticF\left[Arc\sin\left(\frac{2\sqrt{2}w}{\sqrt{w^4+4w^2+1}}\right), \frac{1}{4}\right]\right\}$$

$$\mathrm{y} = \kappa\mathrm{Im}\left\{\frac{e^{i\theta}}{2\sqrt{2}} ElipticF\left[Arc\sin\left(\frac{-2\sqrt{2}w}{\sqrt{w^4+4w^2+1}}\right), 3\right]\right\}$$

$$\mathrm{z} = \kappa\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\theta}}{4} ElipticF\left[Arc\sin\left(\frac{4w^2}{\sqrt{w^4+1}}\right), 97-56\sqrt{3}\right]\right\}$$

$$\theta = \mathrm{ArcCot}\left[\frac{K'}{K}\right], \quad \kappa: \mathrm{fix}$$

Weierstrass function R(τ)の特異点である$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,$\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$において関数は発散するが、線積分は広義積分として収束するので、P=$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$、Q=$\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$とすると、x(P),y(P),z(P),x(Q),y(Q),z(Q)は存在して、かつ有限である。

$$\mathrm{x(P)} = \mathrm{x(Q)} = \alpha\mathrm{KK'}/\sqrt{K''}\sqrt{2}$$
$$\mathrm{y(P)} = \mathrm{y(Q)} = -\alpha\mathrm{KK'}/\sqrt{K''}\sqrt{2}$$
$$\mathrm{z(P)} = \mathrm{z(Q)} = \alpha\mathrm{KK'}/2\sqrt{K''}$$
$$\mathrm{K''} = K^2 + K'^{\prime\prime}, \quad \kappa = \alpha\sqrt{K''/KK'}$$

κ は規格化定数と呼ばれていて、相似拡大した曲面を表している。

また、w_0=0 として、w = 0 のとき(0,0,0)に写される。Gyroid の fundamental patch はこれで完全にパラメータ表示できた。三次元周期の曲面は、一般的に鏡映原理によって作られる。しかし、Gyroid は線対称、面対称はなく、非線形に曲面を構成する。この点が、他の三次元周期の極小曲面とは大きく異なる点である。fundamental patch を鏡映原理を拡張させて、一つの piece を生成し、piece を 8 つ組み合わせることにより、Gyroid を生成する。つまり、Gyroid は 96 個の fundamental patch でできている。

Gyroid の近似式は三角関数を用いて、sinxcosy+sinycosz+sinzcosx=0 と表すことができる。

3　自然界の Gyroid

Gyroid の構造的特徴は、界面活性剤の濃度が高い組み合わせの界面に現れることがある。例えば、脂質（レチシンなど）と水の界面に現れる。

また、鱗粉の組織構造に Gyroid が現れる蝶もいくつか確認されている。

参考資料

[1]http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6TFN-4067B53-5&_user=2348534&_coverDate=05%2F05%2F2000&_rdoc=1&_fmt=high&_orig=gateway&_origin=gateway&_sort=d&_docanchor=&view=c&_searchStrId=1722035321&_rerunOrigin=google&_acct=C000057019&_version=1&_urlVersion=0&_userid=2348534&md5=8f118f049dd3f62fd0a24ce317a7daf6&searchtype=a

[2]http://www.wired.com/wiredscience/2010/06/butterfly-colors/

[3]http://en.wikipedia.org/wiki/Gyroid