2024年5月8日　数理科学演習

幾何学的変分問題

酒井 高司（理学研究科 数理科学専攻）

最適化問題

ある集合上で定義された（実数値）関数について，その最小値（または最大値）をとる元を求める問題

有限集合の場合
- 離散最適化問題
- 組み合わせ最適化問題

（巡回セールスマン問題，ナップサック問題，最短経路問題）

有限の自由度をもつ場合
- 線形計画問題
- 関数の極値問題

無限の自由度をもつ場合
- 変分問題

幾何学的変分問題

空間（Riemann多様体）内において，与えられた境界条件をみたす図形（部分多様体）の中で体積最小となるものを求めよ。

変分法

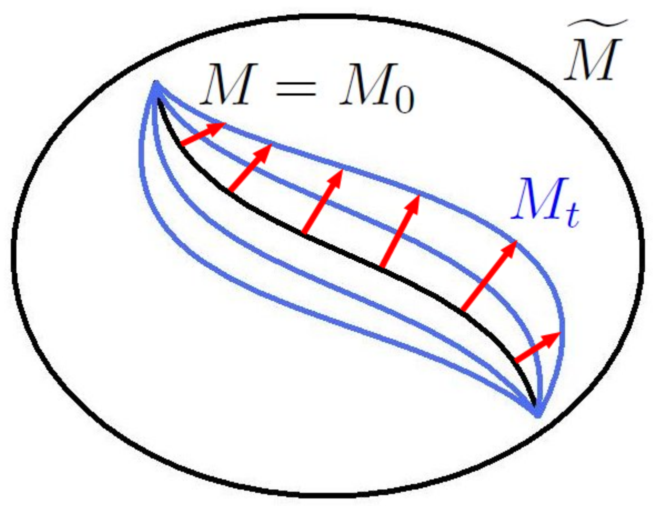
$M \subset (\widetilde{M}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$　部分多様体

$M_t \subset \widetilde{M},\ M_0 = M$　変分

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(M_t) = -\int_M \langle \mathbf{H}, V\rangle d\mu_M$$

$\mathbf{H}$: 平均曲率ベクトル場

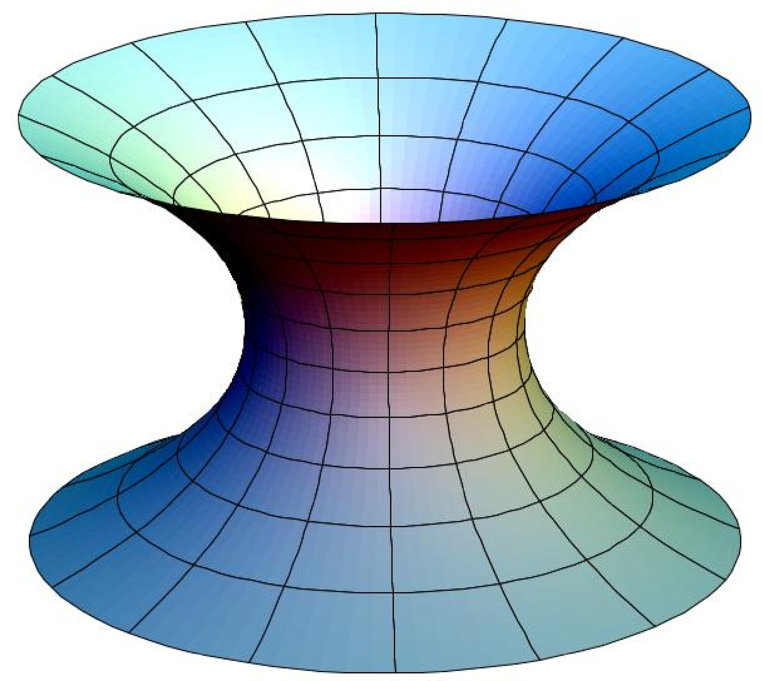
V : 変分ベクトル場

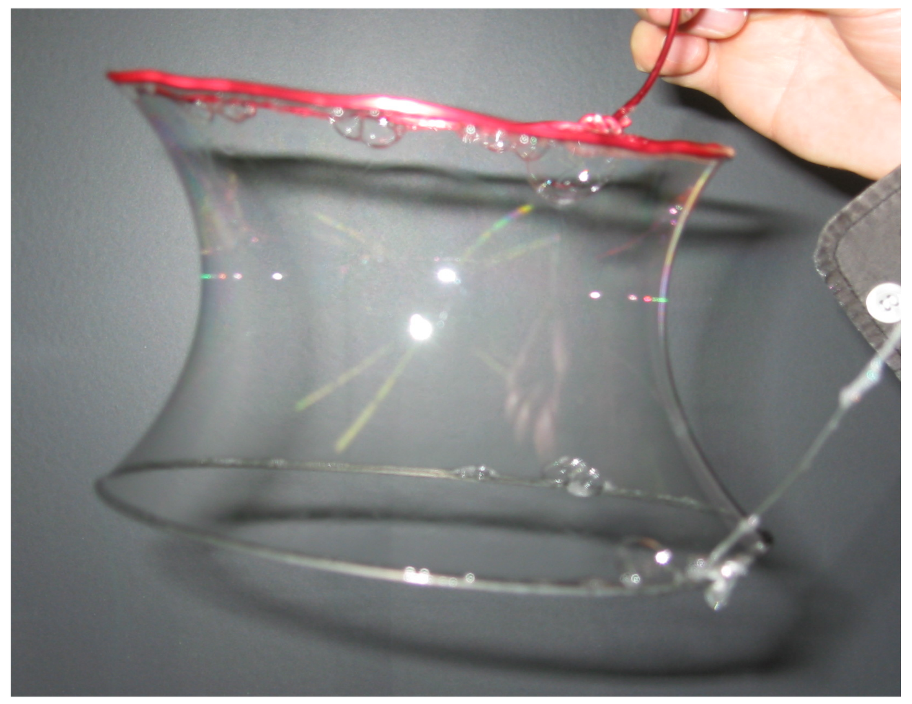


$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Vol}(M_t) = 0 \ \text{ for } \forall V \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{H} \equiv 0$$

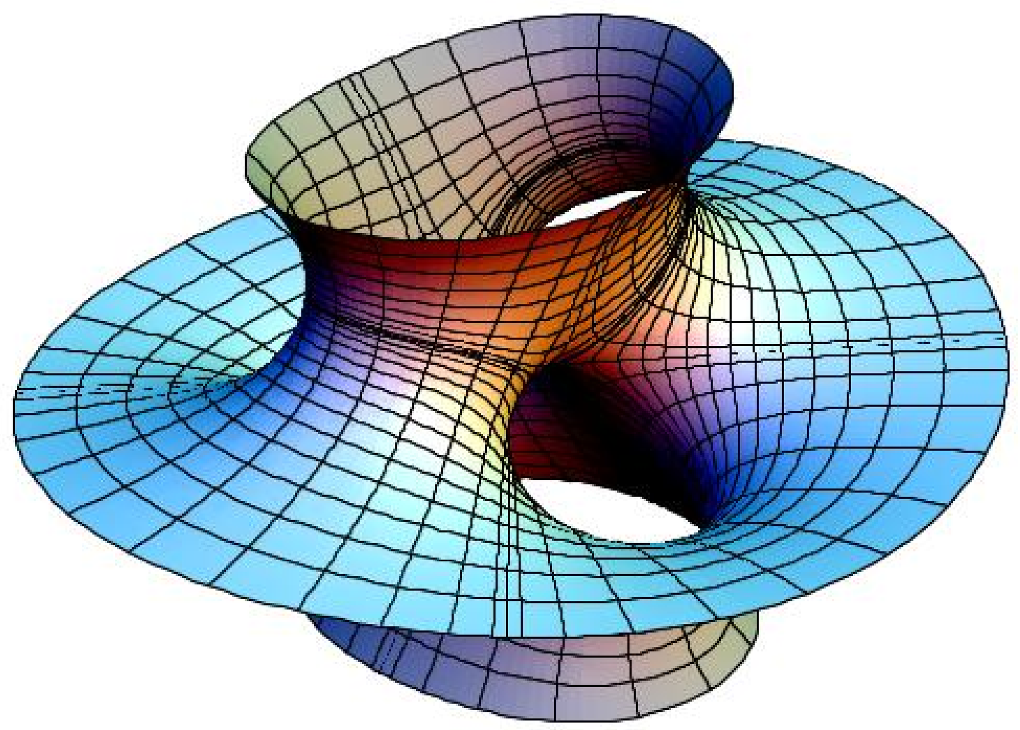
極小部分多様体

極小曲面の例

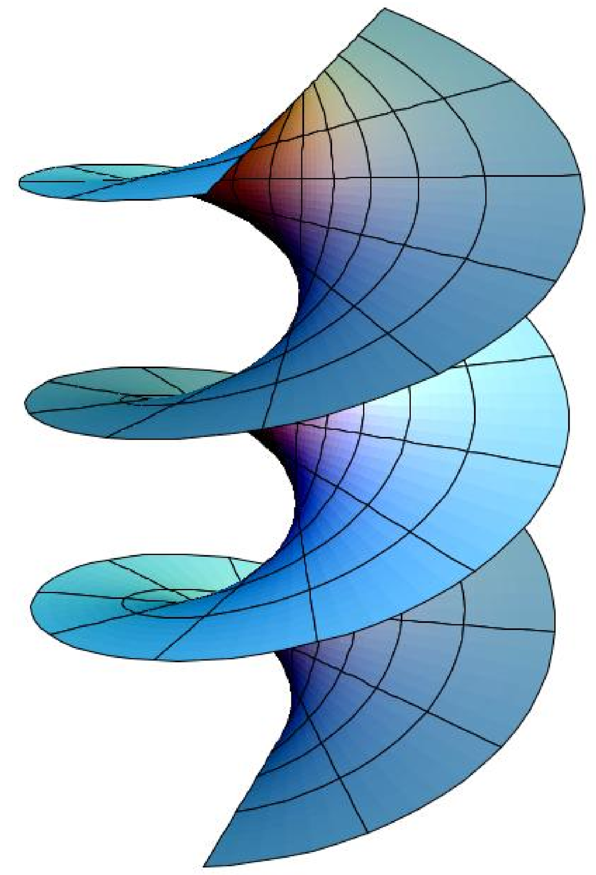


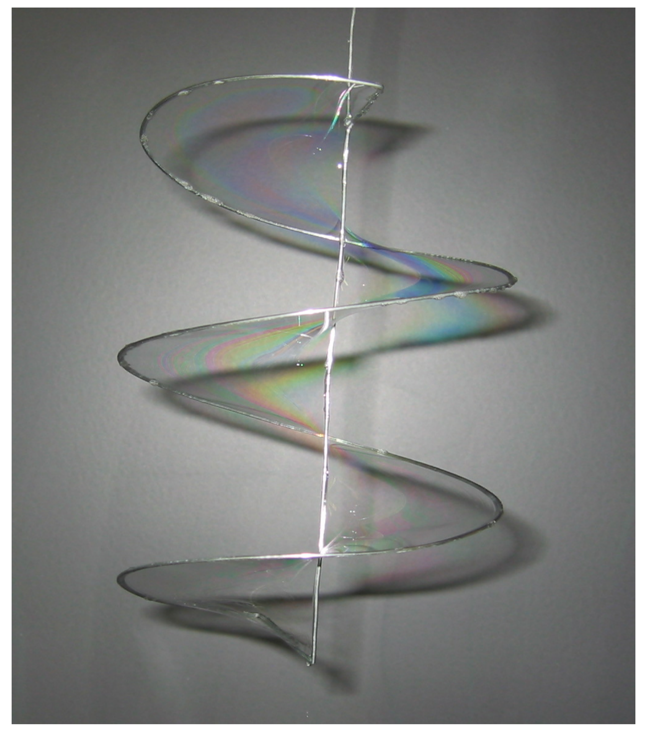


懸垂面　（カテノイド）



Costaの極小曲面





常螺旋面　（ヘリコイド）

まとめと展望

- 数学の問題に限らず自然界の多くの現象は変分問題として捉えることができる．
- 汎関数の極値問題に対しては変分法が有効である．
- 極小部分多様体の研究は偏微分方程式，表現論，複素解析，可積分系など数学の様々な分野と密接に関係している．

展望

Lie理論的な手法をもとに，キャリブレーションや積分幾何を使って，Riemann等質空間内の大域的体積最小性をもつ部分多様体の研究を行いたい．