微分積分 I a クラス (講義ノート 4)

倉田　和浩

平成 29 年 5 月 11 日

1　記号, 予備知識など

2　実数の基本的性質, 数列の極限

3　B-W の定理, コーシーの収束条件

4　関数の極限

5　連続関数

定義 5.1 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは, $f(x) \to f(a)$ $(x \to a)$ が成り立つことを言う. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ があって $|x-a| < \delta$ ならば, $|f(x)-f(a)| < \epsilon$ が成り立つことである.

次のことが成り立つことはほぼ以前に述べたことである.

命題 5.1 $f(x)$ が $x=a$ で連続であることは, $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ なるすべての数列 $\{x_n\}$ に対して, $f(x_n) \to f(a)$ $(n \to +\infty)$ が成り立つことである.

定義 5.2 $f(x)$ が区間 I 上で定義されていて, 任意の $a \in I$ に対して, $x=a$ で $f(x)$ が連続であるとき, $f(x)$ は区間 I 上で連続であるという. 連続関数であるとする

命題 5.2 $f(x), g(x)$ が区間 I 上で連続であるとき, $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ も連続関数となる. また $g(a) \neq 0$ のとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ も $x=a$ で連続となる.

例. $f(x)=x$ が $\mathbb{R}$ 上で連続となることがわかるので, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $g(x)=x^n$ も連続である. 従ってまた, 多項式も $\mathbb{R}$ 上で連続となる. さらに, 有理関数

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x), Q(x) \text{ は多項式}$$

は $Q(a) \neq 0$ となる a 以外で連続関数となる.

例. $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である.

$$\sin x - \sin a = \sin\left(\frac{1}{2}(x+a) + \frac{1}{2}(x-a)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}(x+a) - \frac{1}{2}(x-a)\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{1}{2}(x+a)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-a)\right)$$

より

$$|\sin x - \sin a| \le 2|\sin(\frac{1}{2}(x-a))| \le |x-a|$$

となるので, $\sin x \to \sin a$ $(x \to a)$ を得る. よって $f(x) = \sin x$ は連続関数であることがわかる. $g(x) = \cos x$ の連続性の証明も同様なので省略する.

定理 5.1 有界閉区間 $I := [a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は, 区間 I 上で最大値および最小値をもつ. すなわち, ある $c, d \in I$ が存在して次が成り立つ：

$$f(d) \le f(x) \le f(c)\ (\forall x \in I).$$

(証明).
　集合

$$A := \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

を考えよう（この集合のことを, f の値域という.)
step 1. この集合 A は上に有界な集合であることを示そう. もしそうでないなら, 任意の $M > 0$ に対して, $M < f(x)$ となるような $x \in [a, b]$ が存在することとなる. そこで, 特に $M = n$ $(n \in \mathbb{N})$ に対してその存在が保証される x のことを t_n と書くことにすれば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n < f(t_n)$ となる $t_n \in [a, b]$ が存在することとなる. ここで, $\{t_n\}$ は有界列なので, B-W の定理から, ある部分列 $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ とある c があって, $t_{n_k} \to c$ $(k \to +\infty)$ が成り立つ. 特に,

$$n_k < f(t_{n_k}) \quad (\forall k \ge 1)$$

が成り立っていることになる. $a \le t_{n_k} \le b$ なので, $a \le c \le b$, すなわち, $c \in I$ となる. このとき, $f(x)$ の連続性より $f(t_{n_k}) \to f(c)$ $(k \to +\infty)$ であり、$k \le n_k \to +\infty$ であることから, 上記の不等式から矛盾がでる.
step 2. そこで, $M := \sup A$ と置く. (step 1 の結果より, M は有限値である.) さて, 上限の性質から, ある $y_n \in A$ で $y_n \to M$ $(n \to +\infty)$ となる数列 $\{y_n\}$ が存在することになる. (第 1 回の講義ノートも参照されたい.) $y_n \in A$ より, ある $x_n \in [a, b]$ があって, $y_n = f(x_n)$ と書ける. 特に, $f(x_n) \to M$ $(n \to +\infty)$ が成り立つ. $\{x_n\}$ は有界列なので, B-W の定理から, ある部分列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ とある c が存在して $x_{n_k} \to c$ $(k \to +\infty)$ が成り立つ. $f(x)$ の連続性より, $f(x_{n_k}) \to f(c)$ $(k \to +\infty)$ となることから, $f(c) = M$ を得る. $a \le x_{n_k} \le b$ より $c \in [a, b]$ となる. このことは, $x = c \in [a, b]$ で $f(x)$ が最大値 M をとることを意味している.
最小値の存在についても同様の方針で, 集合 A が下に有界であることを示し, 下限 $m := \inf A$ を考えることで, $f(d) = m$ となる $d \in [a, b]$ の存在が同様に証明できる.

定理 5.2 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(a) < f(b)$ が成り立っているとする. このとき, $f(a) < u < f(b)$ なる任意の u に対して, $f(c) = u$ となる $c \in [a, b]$ が存在する.

(証明). (♣ 教科書の証明とは違う別証明を行ってみよう.)
$a_1 := a, b_1 := b, c_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ と置く. このとき, 3 つの場合分けをして. (i) $f(c_1) = u$ ならば, 証明おわり.
(ii) $f(c_1) < u$ ならば, $a_2 := c_1, b_2 := b_1$ と置く. よって $f(a_2) < u < f(b_2)$ が成り立つ.
(iii) $f(c_1) > u$ ならば, $a_2 := a_1, b_2 := c_1$ と置くと, やはり $f(a_2) < u < f(b_2)$ が成り立つ.
このとき $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ が成り立つことに注意しておく. さらに, (ii) または (iii) のとき, $c_2 := \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ として,　また先ほどの手順と同じく, $f(c_2) = u, f(c_2) < u, f(c_2) > u$ によって場合分けして, $f(c_2) < u$ ならば, $a_3 := c_2, b_3 := b_2$ とし, $f(c_2) > u$ ならば, $a_3 := a_2, b_3 := c_2$ とし, $c_3 := \frac{1}{2}(a_3 + b_3)$ と置く. このとき, $b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = (\frac{1}{2})^2(b_1 - a_1)$ となる. 以上の手順を繰り返し, $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$ を順次作っていく. 途中にある k で $f(c_k) = u$ となる場合は定理の証明がそこで終わることとなるが, そうでない場合は, すべての k に対して, $f(c_k) \neq u$ であって,

$$f(a_k) < u < f(b_k), \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1,$$

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = (\frac{1}{2})^{k-1}(b_1 - a_1) \to 0 \ (k \to +\infty)$$

が成り立つこととなる.　従って, 公理 II より, $a_k \leq c \leq b_k$ $(\forall k \geq 1)$ となる c がただ 1 つ存在することとなる. このとき, $a_k \to c, b_k \to c$ $(k \to +\infty)$ であって, $f(a_k) < u < f(b_k)$ で $k \to +\infty$ として, $f(c) \leq u \leq f(c)$ を得る. よって $f(c) = u$ を得る.
♣ 中間値の定理は当たり前に成り立つような定理でもあるが, 時として, 直感的には説明しずらい様な主張を導くこともできる. 次の例など, いかがであろうか？

例題 5.1 $f(x)$ は区間 $I = [0, 1]$ 上で連続であって, $f(0) = f(1)$ を満たすとする. このとき,

$$f(x) = f(y), \ |x - y| = \frac{1}{2}$$

となる $x, y \in I$ が存在することを示せ.

(解答). $g(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x), \ x \in [0, \frac{1}{2}]$ とおくと, $g(x)$ は区間 $J = [0, \frac{1}{2}]$ 上の連続関数となる. また, 仮定から,

$$g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0), \quad g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2})$$

となる. よって, $g(0) = -g(\frac{1}{2})$. もし $f(0) = f(\frac{1}{2})$ が成り立つときは, $x = 0, y = \frac{1}{2}$ として主張が成り立つ. もし $f(0) \neq f(\frac{1}{2})$ のときは, $g(0) = -g(\frac{1}{2})$ より, $g(0) > 0 > g(\frac{1}{2})$ または $g(0) < 0 < g(\frac{1}{2})$ が成り立つこととなる. このとき, 中間値の定理より, $g(x) = 0$ となる $x \in [0, \frac{1}{2}]$ が存在する. このことは, $f(x + \frac{1}{2}) - f(x) = 0$ となるので, $y = x + \frac{1}{2}$ として, 主張がなりたつこととなる. 以上より, いずれの場合も, 主張が成り立つこととなる.

定理 5.3 (連続関数の合成関数) $y = f(x)$ が $x = a$ で連続で, $b = f(a)$ とし, $z = g(y)$ が $y = b$ で連続であるとき, 合成関数 $h(x) = g(f(x))$ は $x = a$ で連続となる.

(証明). $x_n \to a(n \to +\infty)$ として, $h(x_n) \to h(a)$ $(n \to +\infty)$ を示せばよい. 今, 仮定より, $f(x_n) \to f(a) = b$ $(n \to +\infty)$ となり, よって, さらに, $g(f(x_n)) \to g(b) = g(f(a)) = h(a)$ $(n \to +\infty)$ となるので, $h(x_n) \to h(a)$ $(n \to +\infty)$ が示された.

5.1 単調関数の逆関数, 逆三角関数

定義 5.3 $f(x)$ が区間 I 上で単調増加関数であるとは, $x, y \in I$ で $x < y$ ならば, $f(x) < f(y)$ が成り立つことを言う. 同様に, $f(x)$ が区間 I 上で単調減少関数であるとは, $x, y \in I$ で $x < y$ ならば, $f(x) > f(y)$ が成り立つことを言う. 区間 I 上で単調増加関数であるか, 単調減少関数のいずれかであるとき, 単に, $f(x)$ は区間 I 上の単調関数であるという.

5.2 単調連続関数の逆関数

今, $y = f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ 上で単調増加な連続関数 (以下, 単に, 単調増加連続関数という) としよう. このとき, $m = f(a), M = f(b)$ とおくと, m および M は, それぞれ $f(x)$ の I 上での最小値, 最大値となる. さらに $f(x)$ が区間 I 上で連続であることより, 中間値の定理から, $m < y < M$ なる任意の y に対して, $f(x) = y$ となる $x \in (a, b)$ が存在することがわかり, 単調増加であるので, このような x はただ 1 つに定まることとなる. $y = m$ に対しても, $f(x) = y$ となる x は $x = a$ がただ 1 つ定まり, $y = M$ に対しても, $f(x) = y$ となる x は $x = b$ がただ 1 つ定まる. このようにして, $m \le y \le M$ なる y に対して, $f(x) = y$ を満たす $x \in I$ がただ 1 つ定まるので, この y から x への対応を $x = f^{-1}(y)$ と表し, $y = f(x)$ の逆関数という. この逆関数 $x = f^{-1}(y), m \le y \le M$ は その定義から区間 $[m, M]$ 上で単調増加関数となる. さらに次が成り立つ.

定理 5.4 閉区間 $I = [a, b]$ 上の単調増加連続関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y), y \in [m, M]$ は区間 $[m, M]$ 上の単調増加連続関数となる. (ここで, $m = f(a), M = f(b)$ である.)
同様に, 閉区間 $I = [a, b]$ 上の単調減少連続関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y), y \in [m, M]$ は区間 $[m, M]$ 上の単調減少連続関数となる. (ただし, この場合は, $m = f(b), M = f(a)$ である.)

(証明) (数列を用いた連続性に基づいて, 教科書と少し違う証明を与えてみる.)
$a \le c \le b, d = f(c)$ とする. $c = f^{-1}(d)$ であるが, $f^{-1}(y)$ が $y = d$ で連続であることを示す. それには, $y_n \to d$ $(n \to +\infty)$ として $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(d) = c$ $(n \to +\infty)$ なることを示せばよい. $x_n = f^{-1}(y_n)$ とおくとき, $x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ を示せばいい.
背理法で示そう. もし $x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ を否定すると, ある $\epsilon_0 > 0$ があって, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, $n \ge N$ であって $|x_n - c| \ge \epsilon_0$ となるような n が存在することとになる.
そこで任意の $k \in \mathbb{N}$ をとって, $N = k$ とすることで, ある $n_k \ge k$ で $|x_{n_k} - c| \ge \epsilon_0$ となるような部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在することとなる. このとき, $x_{n_k} \le c - \epsilon_0$ もしくは $x_{n_k} \ge c + \epsilon_0$

のどちらかが成り立つことになる．さらに $f(x)$ が単調増加であるので，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$f(x_{n_k}) \leq f(c-\epsilon_0)$ または，$f(x_{n_k}) \geq f(c+\epsilon_0)$ が成りたつこととなる．ここで，

$$\epsilon := \frac{1}{2}\min\Bigg(f(c+\epsilon_0)-f(c), f(c)-f(c-\epsilon_0)\Bigg) > 0$$

とおくとき，$f(x_n) = y_n \to d = f(c)$ $(n \to +\infty)$ であったので，ある N があって，$n \geq N$ なる任意の n に対して，

$$|f(x_n) - f(c)| < \epsilon$$

が成り立つ．よってある K があって $k \geq K$ ならば $n_k \geq N$ となるので，

$$f(c) - \epsilon < f(x_{n_k}) < f(c) + \epsilon \ (\forall k \geq K)$$

が成り立つこととなる．
そこで，$f(x_{n_k}) \leq f(c-\epsilon_0)$ なる場合には，$\epsilon \leq \frac{1}{2}(f(c) - f(c-\epsilon_0))$ より

$$f(c) - \frac{1}{2}(f(c) - f(c-\epsilon_0)) \leq f(c) - \epsilon < f(x_{n_k}) \leq f(c-\epsilon_0)$$

から，$f(c) < f(c-\epsilon_0)$ が導かれてしまい矛盾．また，$f(x_{n_k}) \geq f(c+\epsilon_0)$ なる場合には，$\epsilon \leq \frac{1}{2}(f(c+\epsilon_0) - f(c))$ より

$$f(c+\epsilon_0) \leq f(x_{n_k}) \leq f(c) + \epsilon \leq f(c) + \frac{1}{2}(f(c+\epsilon_0) - f(c))$$

から，$f(c+\epsilon_0) < f(c)$ が導かれてしまい，やはり矛盾．以上より，$x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ となることが示された．

5.3 指数関数と対数関数

まず，自然数 N に対して，$y = x^n$ $(x \geq 0)$ の逆関数として，$x = y^{\frac{1}{n}}$ $(y \geq 0)$ が定まる．特に，改めて関数 $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $(x \geq 0)$ は連続関数となることがわかる．
$a > 1$ とする．このとき，$x \in \mathbb{Q}$ に対して，a^x は，$x > 0, x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ のとき，$a^x = (a^{\frac{1}{p}})^q$ と定義され，$x < 0, x \in \mathbb{Q}$ のときは，$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ として定義される．

定義 5.4 (指数関数の厳密な定義) さて，$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対して，有理数の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ で $\{x_n\}$ は単調増加かつ $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ となるものが存在するが，$\{a^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であり，また $x < x_0$ なる $x_0 \in \mathbb{Q}$ を *1* つとることで $x_n \leq x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ なので $a^{x_n} \leq a^{x_0}$ が成り立つ．つまり，$\{a^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加かつ上に有界な数列となる． よってその極限が存在するので、

$$a^x := \lim_{n \to +\infty} a^{x_n}$$

と定める．

この極限は, $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ で単調増加かつ $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ なる $\{x_n\}$ の取り方によらずに定まることに注意しよう. 2つの単調増加列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{Q}$ で $x_n \to x, y_n \to x$ $(n \to +\infty)$ なる数列に対して $\alpha := \lim_{n\to+\infty} a^{x_n}$, $\beta := \lim_{n\to+\infty} a^{y_n}$ とするとき, $\alpha = \beta$ となることを確かめよう. 任意の $n \in \mathbb{N}$ を固定するとき, ある M が存在して $m \geq M$ に対して, $x_n \leq y_m$ が成り立つ. よって $a^{x_n} \leq a^{y_m}$ $(\forall m \geq M)$ となる. $m \to +\infty$ として, $a^{x_n} \leq \beta$ を得る. ここで $n \to +\infty$ として, $\alpha \leq \beta$ を得る. $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の役割を交換することで, $\beta \leq \alpha$ が成り立つことにもなるので, $\alpha = \beta$ を得る.
♣ $x \in \mathbb{Q}$ に対しても, $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ で単調増加かつ $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ なる数列にたいして, $a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n}$ が成り立つことが, $a^{\frac{1}{m}} \to 1$ $(m \to +\infty)$ からわかる. 特に, $x_n = x \in \mathbb{Q}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ なる数列に対して $a^{x_n} = a^x$ なので, 最初の述べた有理数 x に対する a^x の定義と一致する.

命題 5.3 $a > 1$ とする.
(1) このとき, 関数 $y = a^x$ は単調増加連続関数となる.
(2) また, 次の指数法則が成り立つ:

$$a^x a^t = a^{x+t} \ (x, t \in \mathbb{R}),$$

$$(a^x)^t = a^{xt} \ (x, t \in \mathbb{R}).$$

step 1. a^x **が単調増加関数であることを示す**. $t, u \in \mathbb{Q}$ で $t < u$ なるとき, $a^t < a^u$ となることは既知として証明を与える. いま, $x < y, x, y \in \mathbb{R}$ とするとき, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{Q}$ で $x_n \to x, y_n \to y$ となる単調増加列を1つとるとき, ある N が存在して $n \geq N$ に対して $x_n \leq x < y_N \leq y_n \leq y$ となるので, $a^{x_n} < a^{y_N} \leq a^{y_n}$ $(\forall n \geq N)$. よって $n \to +\infty$ として, $a^x \leq a^{y_N} \leq a^y$ を得る. よって $a^x < a^y$ が成り立つ.
step 2. $a^x a^t = a^{x+t}$ $(x, t \in \mathbb{R})$ **を示す**. これも $x, t \in \mathbb{Q}$ ならば成り立つことは既知として証明を与える. $\{x_n\}, \{t_n\} \subset \mathbb{Q}$ で $x_n \to x, t_n \to t$ となる単調増加列を1つとるとき, $x_n + t_n \in \mathbb{Q}$ で, $x_n + t_n \to x + t$ $(n \to +\infty)$ であるので, 定義より,

$$a^{x_n} \to a^x, \ a^{t_n} \to a^t, \ a^{x_n+t_n} \to a^{x+t} \ (n \to ; \infty)$$

が成り立つ. 従って $a^{x_n} a^{t_n} = a^{x_n+t_n}$ なので, この式で $n \to +\infty$ として, $a^x a^t = a^{x+t}$ を得る.
step 3. a^x **が連続であることを示そう**. $x \to t$ のとき, $a^x \to a^t$ を示せばよいが, $a^x = a^{x-t} a^t$ なので, $y \to 0$ のときに $a^y \to 1$ となることを示せればよいこととなる. 背理法で示そう. そうでないなら, ある $\epsilon_0 > 0$ があって, 任意の $\delta > 0$ に対して $|y| < \delta$ であって $|a^y - 1| \geq \epsilon_0$ となる y が存在することになる. δ として, $\delta = \frac{1}{m}$ $(m \in \mathbb{N})$ として, $|y_m| < \frac{1}{m}$ かつ $|a^{y_m} - 1| \geq \epsilon_0$ となる数列 $\{y_m\}$ が存在することとなる. このとき

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{-\frac{1}{m}} < a^{y_m} < a^{\frac{1}{m}} \ (\forall m \in \mathbb{N})$$

となるが, $a^{\frac{1}{m}} \to 1$ $(m \to +\infty)$ であるので, $a^{y_m} \to 1 (m \to +\infty)$ となってしまうが, これより $0 \geq \epsilon_0 > 0$ となって矛盾.

step 4. 最後に, $(a^x)^t = a^{xt}$ $(x, t \in \mathbb{R})$ を示そう．まず $t \in \mathbb{Q}$ のとき, $(a^x)^t = a^{xt}$ $(x \in \mathbb{R})$ を示す．まず, $t = \frac{1}{n}$ とする．$(a^{\frac{x}{n}})^n = a^x$ なので, $a^{\frac{x}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}}$ が成り立つ．次に, $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ のとき,

$$a^{x\frac{m}{n}} = (a^{\frac{x}{n}})^m = a^{\frac{x}{n}} \times \cdots \times a^{\frac{x}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}} \times \cdots \times (a^x)^{\frac{1}{n}} = (a^x)^{\frac{m}{n}}$$

となるので正しい．これより、$(a^x)^t = a^{xt}$ $(\forall t \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R})$ となることがわかる．今, $t \in \mathbb{R}$ に対して, $t_n \in \mathbb{Q}$ で $t_n \to t$ $(n \to +\infty)$ となる単調増加列 $\{t_n\}$ を考えれば,

$$(a^x)^{t_n} = a^{xt_n}$$

において $n \to +\infty$ とすれば, $f(x) = a^x$ の連続性より

$$(a^x)^t = a^{xt}$$

を得る.

注意 5.1 $0 < a < 1$ のときは, $a = \frac{1}{b}$ とおくと, $b > 1$ なので

$$a^x = (\frac{1}{b})^x = \frac{1}{b^x}$$

と定める．このとき a^x は単調減少連続関数となる．また $a = 1$ のとき, $a^x = 1^x = 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ と定める.

$a > 0$ に対して, $y = a^x$ の逆関数を $x = \log_a y$ $(y > 0)$ と書いて, 底を a とする対数関数という． 特に, $a = e$(ネイピアの数）のとき, $y = e^x$ の逆関数を $x = \log_e y = \log y$ と書いて, 自然対数と呼ぶ.

命題 5.4 次が成り立つ.

(1)

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (\forall a, b > 0).$$

(2)

$$a \log b = \log(b^a) \quad (\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0).$$

特に,

$$b^a = e^{a \log b}$$

が成り立つ.

(3) $a \in \mathbb{R}$ を定数として, 関数 $y = x^a$ $(x > 0)$ は連続関数となる.

(証明）. (1) $x = \log a, y = \log b$ とおくとき, $e^x = a, e^y = b$ である．よって指数法則から $ab = e^x e^y = e^{x+y}$ となる．これから $x + y = \log(ab)$ となる.

(2) 指数法則より,

$$e^{a \log b} = (e^{\log b})^a = b^a$$

となるので, $a \log b = \log(b^a)$ となる.

(3) $y = x^a = e^{a \log x}$ なので, 連続関数の合成関数として, 連続関数であることがわかる.

5.4 逆三角関数

逆三角関数については, 定義域を適当に制限することで, 単調関数となる区間で, その逆関数を考えることができる. 制限する区間として, 以下の標準的なものを考える.

$y = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ は単調増加連続関数なので, その逆関数を $x = \sin^{-1} y$ $(-1 \leq y \leq 1)$ と書いて, アークサイン関数と呼ぶ. $x = \mathrm{Arcsin}\ y$ とも書く.

注意 5.2 この記号は誤解を招きやすく, アークサイン　$\sin^{-1} y$ は, $\frac{1}{\sin y}$ ではないので注意されたい！

$y = \cos x$ $(0 \leq x \leq \pi)$ は単調減少連続関数なので, その逆関数を $x = \cos^{-1} y$ $(-1 \leq y \leq 1)$ と書いて, アークコサイン関数と呼ぶ. $x = \mathrm{Arccos}\ y$ とも書く. $y = \tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ は単調増加連続関数なので, その逆関数を $x = \tan^{-1} y$ $(-\infty < y < +\infty)$ と書いて, アークタンジェント関数と呼ぶ. $x = \mathrm{Arctan}\ y$ とも書く.

● 逆三角関数はのちに積分計算においても, また様々な応用問題においても重要な役割を果たすこととなる.

5.5 一様連続性

定義 5.5 関数 $f(x)$ が区間 I 上で一様連続であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - t| < \delta$ なる任意の $x, t \in I$ に対して $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ が成り立つことという.

♣ $f(x)$ が区間 I 上で一様連続であれば, 各点 $a \in I$ に対して, $f(x)$ は $x = a$ で連続となる. 逆の命題は一般に正しくない. つまり, 区間 I 上の各点で連続な関数であっても, 必ずしも, 区間 I 上で一様連続とは限らない.

例. $I = (0, 1)$ とする. $f(x) = \frac{1}{x}$ は, 区間 I 上で連続である. しかしながら, 区間 I 上で一様連続ではない. 例えば, いかなる $\delta > 0$ に対しても $\frac{1}{n} < \delta$ なるよう n を大きくとるとき, $x_n = \frac{1}{n}, t_n = \frac{1}{n+1}$ とすれば $|x_n - t_n| = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n} < \delta$ となるが, $|f(x_n) - f(t_n)| = |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{t_n}| = 1$ が成り立つ. このことは, $f(x) = \frac{1}{x}$ が区間 $I = (0, 1)$ 上で一様連続でないことを示している.

しかしながら, 次のことは成り立つ.

定理 5.5 有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は, 区間 I 上で一様連続である.

(証明). 背理法で示す. 主張を否定すると, ある $\epsilon_0 > 0$ があって, 任意の $\delta > 0$ に対して, $|x - t| < \delta, x, t \in I$ であって, $|f(x) - f(t)| \geq \epsilon_0$ となる x, t が存在することとなる. そこで δ として, $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすることで, $|x_n - t_n| < \frac{1}{n},\ x_n, t_n \in I$ かつ

$$|f(x_n) - f(t_n)| \geq \epsilon_0$$

となるような数列 $\{x_n\}, \{t_n\}$ が存在することとなる．このとき, $\{x_n\} \subset I = [a, b]$ は有界列なので, B-W の定理からある部分列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ とある $x \in [a, b]$ があって, $x_{n_k} - x| \to 0$ $(k \to +\infty)$ が成り立つ．このとき

$$|t_{n_k} - x| \leq |t_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x| \to 0 \ (k \to +\infty)$$

となる．ところが $f(x)$ は連続なので

$$|f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})| \geq \epsilon_0$$

において, $f(x_{n_k}) \to f(x)$, $f(t_{n_k}) \to f(x)$ $(k \to +\infty)$ なので $0 \geq \epsilon_0 > 0$ となり矛盾.