微分積分Ｉａクラス (講義ノート11)

倉田　和浩

平成29年7月5日

1　記号, 予備知識など

2　実数の基本的性質, 数列の極限

3　B-Wの定理, コーシーの収束条件

4　関数の極限

5　連続関数

6　導関数

7　平均値の定理とテイラーの定理

8　コーシーの平均値の定理・ロピタルの定理

9　積分の定義

10　不定積分

11　定積分

12　広義積分

13　広義積分

13.1　広義積分の定義

今までは, 有界閉区間上の連続関数の定積分について学んできたが, 半開区間 $[a,b)$ 上で連続であって, $\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$ である場合や, $f(x)$ が無限区間 $[a,+\infty)$ 上で連続で

ある場合に, 広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

などの定義やその存在条件を学ぼう.

♣ 広義積分は, 高校での数 III では扱えなかった話題で, しかし無限領域の面積の計算など重要な話題である.

定義 13.1 *(1)* $f(x)$ が半開区間 $[a,b)$ で連続で, $x \to b$ で有界でないとき, $\epsilon > 0$ として, 極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

が（有限値として）存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

と定める. 極限が存在しないとき, 広義積分は発散するという.

あるいは, 同じことであるが, $a < t < b$ なる t をとって, 極限

$$\lim_{t \to b-0} \int_a^t f(s)\,ds$$

が存在するとき, 広義積分は収束するといっても同じことである.

(2) $f(x)$ が半開区間 $(a,b]$ で連続で, $x \to a$ で有界でないとき, $\epsilon > 0$ として, 極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

が（有限値として）存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

と定める.

(3) $f(x)$ が開区間 (a,b) で連続で, $x \to a$ および $x \to b$ で有界でないとき, $a < c < b$ を 1 つとる. $\epsilon > 0$ として, 極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{c} f(x)\,dx$$

と,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{c}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

がともに存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{c}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

と定める. *(このとき, c の取り方によらずに, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の値は定まることがわかるので, c のとり方は何でも良い.)*

定義 13.2 $f(x)$ が半開区間 $[a,+\infty)$ で連続であるとき, $M>a$ として, 極限

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

が（有限値として）存在するとき, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

と定める. もし極限値が存在しないとき, その広義積分は発散するという.
同様に, 広義積分

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

の収束・発散も定義される.

13.2 広義積分の例

• 以下の 3 つの例は, 典型的な広義積分の例として, その収束・発散の条件とともに, 重要である.

例題 13.1 $\alpha>0$ として, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ は区間 $(0,1]$ 上で連続である. このとき, 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するための必要十分条件は, $\alpha<1$ であることである.

(証明) このことを, 以下確かめよう. $1>\epsilon>0$ とする. $\alpha\neq 1$ の場合,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_{x=\epsilon}^{x=1} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\epsilon^{1-\alpha})$$

となる. よって $0<\alpha<1$ ならば, $\epsilon\to 0$ で極限値 $\frac{1}{1-\alpha}$ をもち, $\alpha>1$ なら, $\epsilon\to 0$ で $+\infty$ となる. また, $\alpha=1$ の場合,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_{x=\epsilon}^{x=1} = -\log\epsilon \to +\infty\ (\epsilon\to 0)$$

となる. 以上より, 最初の主張を得る.

例題 13.2 $\beta>0$ として, $f(x)=\frac{1}{x^\beta}$ は区間 $[1,+\infty)$ 上で連続である. このとき, 広義積分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

が収束するための必要十分条件は, $\beta>1$ であることである.

(証明) $M>1$ とする. $\beta \neq 1$ の場合,

$$\int_1^M \frac{1}{x^\beta}\,dx = \left[\frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\right]_{x=1}^{x=M} = \frac{1}{1-\beta}(M^{1-\beta}-1)$$

となる. よって $\beta>1$ ならば, $M\to+\infty$ で極限値 $\frac{1}{\beta-1}$ をもち, $\beta<1$ なら, $M\to+\infty$ で $+\infty$ となる. また, $\beta=1$ の場合,

$$\int_1^M \frac{1}{x^\beta}\,dx = \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \left[\log x\right]_{x=1}^{x=M} = \log M \to +\infty\ (M\to+\infty)$$

となる. 以上より, 最初の主張を得る.

例題 13.3 次の広義積分は収束して, その値も次の通り.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

実際, $M>0$ として,

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^M = 1-e^{-M} \to 1\ (M\to+\infty)$$

となるからである.

13.3 広義積分の収束条件, 比較判定法

• 広義積分が収束するための条件を, 次のコーシーの収束条件として理解することは重要である.

命題 13.1 $f(x)$ は半開区間 $(a,b]$ 上で連続であるとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための必要十分条件は次の条件が成り立つことである:
「任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, $a<x<t<a+\delta$ なる任意の x,t に対して,

$$\left|\int_x^t f(s)\,ds\right| < \epsilon$$

が成り立つ.」

(証明)

$$g(t) := \int_t^b f(s)\,ds\ (a<t<b)$$

と定義する. このとき, 定義により, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束することは, 極限 $\lim_{t\to a} g(t)$ が存在することである. ここで, 極限の存在をコーシーの条件で書くと, 次のようになることを思い出そう:

「任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ があって, $a < t < t' < a + \delta$ なる t, t' に対して

$$|g(t) - g(t')| < \epsilon$$

が成り立つ.」. このとき, $g(t)$ の定義から

$$|g(t) - g(t')| = |\int_t^b f(s)\,ds - \int_{t'}^b f(s)\,ds| = |\int_t^{t'} f(s)\,ds|$$

であることに注意すれば, 命題の主張が成り立つことがわかる.

命題 13.2 $f(x)$ は半開区間 $(a, b]$ 上で連続であるとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束すれば, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ も収束する

(証明). 仮定と命題 13.1 より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $a < x < t < a + \delta$ なる任意の x, t に対して,

$$\int_x^t |f(s)|\,ds < \epsilon$$

が成り立つ. このとき, $a < x < t < a + \delta$ なる任意の x, t に対して,

$$|\int_x^t f(s)\,ds| \leq \int_x^t |f(s)|\,ds < \epsilon$$

が成り立つことになるので, 命題 13.1 より, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束すると言える.

定義 13.3 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束するとき, **広義積分** $\int_a^b f(x)\,dx$ **は絶対収束する**という.

- $f(x) \geq 0$ なる関数 $f(x)$ に対する広義積分の収束条件については, 次の条件が成り立つことであるといっても良い.

命題 13.3 $f(x)$ は半開区間 $(a, b]$ 上で連続であって, かつ $f(x) \geq 0$ $(a < x \leq b)$ であるとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための必要十分条件は次の条件が成り立つことである:
「ある $M > 0$ が存在して, 任意の $t \in (a, b)$ に対して,

$$\int_t^b f(s)\,ds \leq M$$

が成り立つ.」

(証明).

$$g(t) := \int_t^b f(s)\,ds \ (a < t < b)$$

と定義する. と, 仮定 $f(x) \geq 0$ $(a < x \leq b)$ より, $g(t)$ は t の単調関数である. つまり, $a < t_1 < t_2 < b$ ならば, $g(t_1) \geq g(t_2)$ が成り立つ. 従って, 極限 $\lim_{t \to a} g(t)$ が存在することと, 上記の条件を満たすこととは同値であることに注意すればよい.

命題 13.4 (比較判定法) $f(x), g(x)$ は半開区間 $(a, b]$ 上で連続であって,

$$|f(x)| \leq g(x) \ (a < x \leq b)$$

を満たすとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b g(x)\,dx$ が収束しれば, 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ も収束する

(証明) 仮定と命題 13.3 から, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $t \in (a, b)$ に対して, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $t \in (a, b)$ に対して,

$$\int_t^b f(s)\,ds \leq M$$

が成り立つ. このとき,

$$\int_t^b |f(s)|\,ds \leq \int_t^b g(s)\,ds \leq M \ (\forall t \in (a, b))$$

となるので, 命題 13.3 から結論を得る.

注意 13.1 命題 *13.2, 13.3, 13.4* は, $[a, b)$ や $[a, +\infty)$ などの広義積分に対しても, 同様に成り立つことに注意しておく.

比較判定法を活用した典型的な判定条件を学んでおこう.

命題 13.5 $f(x)$ は半開区間 $(a, b]$ 上で連続であるとする.
(1) もし, ある $M > 0$ とある $p \in (0, 1)$ があって,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(x-a)^p} \ (a < x \leq b)$$

が成り立つならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する
(2) もしある $p \in (0, 1)$ があって,

$$\lim_{x \to a} (x-a)^p f(x)$$

が存在するならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する.

(証明) (1) $p \in (0, 1)$ なので, 広義積分

$$\int_a^b \frac{M}{(x-a)^p}\,dx$$

が収束することは直ぐにわかる. よって, 比較判定法より, 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ は収束する, 従って, また広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ も収束する

(2) 仮定から, $A := \lim_{x\to a}(x-a)^p f(x)$ として, $\epsilon-\delta$ 論法で $\epsilon=1$ に対して）ある $\delta>0$ が存在して, $a<x<a+\delta$ に対して

$$|(x-a)^p f(x) - A| \leq 1$$

が成り立つ. 特に,

$$|(x-a)^p f(x)| \leq A+1 \ (a < \forall x < a+\delta)$$

が成り立つ. 従って, $M=A+1$ として, (1) から広義積分 $\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx$ が収束する. $f(x)$ は, $[a+\delta, b]$ 上では連続なので, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ も収束することとなる.

命題 13.6 $a>0$ とする. $f(x)$ は半開区間 $[a,+\infty)$ 上で連続であるとする.
(1) もし, ある $M>0$ とある $q>1$ があって,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{x^q} \ (a \leq x < +\infty)$$

が成り立つならば, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ は収束する
(2) もしある $q>1$ があって,

$$\lim_{x\to+\infty} x^q f(x)$$

が存在するならば, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ は収束する.

(証明) (1) $q>1$ なので, 広義積分

$$\int_a^{+\infty} \frac{M}{x^q}\,dx$$

が収束することは直ぐにわかる. よって, 比較判定法より, 広義積分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ は収束する, 従って, また広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ も収束する
(2) 仮定から, $B := \lim_{x\to+\infty} x^q f(x)$ として, ある $M>0$ が存在して,

$$|x^q f(x)| \leq B+1 \ (M \leq \forall x < +\infty$$

が成り立つ. 従って, $M := B+1$ として, (1) から広義積分 $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ が収束する. $f(x)$ は, $[a, M]$ 上では連続なので, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ も収束することとなる.

例題 13.4 次の広義積分は収束する.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x^2)\,dx.$$

なぜなら, $f(x) := e^{-x}\cos(x^2)$ とおくとき,

$$|f(x)| \leq e^{-x} \ (0 \leq x < +\infty)$$

であって, 広義積分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ が収束するので, 比較判定法により, 上記の広義積分も収束する.

♣ 定義に従って, まず $M>0$ に対して

$$\int_0^M e^{-x}\cos(x^2)\,dx$$

を計算しようとしても, 難しい. 広義積分の収束・発散の判定には, 比較判定法が便利である.

例題 13.5 次の広義積分は発散する.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx.$$

この例の場合, 定義に従って, $\epsilon>0$ として

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx$$

を計算して, $\epsilon\to 0$ での極限を調べても出来るが, 比較判定法を用いた方がよい. 今,

$$\frac{1}{(1-x)(1+x^2)} \geq \frac{1}{(1-x)(1+1)} = \frac{1}{2(1-x)}\ (0<x\leq 1)$$

が成りたち, 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$$

が発散するので, 比較判定法により, 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx.$$

も発散する.

13.4　応用例

例題 13.6 広義積分

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$$

は収束し, その値は

$$I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

となる.

(証明) まず, $f(x) := \log(\sin x)$ は, $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ で連続であることに注意しよう. さらに, ロピタルの定理より,

$$\lim_{x \to +0} \sqrt{x}(\log(\sin x)) = \lim_{x \to +0} \frac{\log(\sin x)}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x \to +0} \frac{(\frac{\cos x}{\sin x})}{(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to +0} (-2)(\cos x) \times \frac{x}{\sin x} \times \sqrt{x} = 0$$

であるので, ある $\delta > 0$ があって

$$|\log(\sin x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \ (0 < x \leq \delta)$$

を得る. このことから, 広義積分 I が収束することがわかる.
次に, 広義積分 I の値を求めてみよう. (オイラーによる計算といわれている.) $\epsilon > 0$ とする. 変数変換 $x = \pi - t$ により, $\sin(\pi - t) = \sin t$ に注意して,

$$I = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\pi - \epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(\pi - t))\, (-1) \times dt$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \epsilon} \log(\sin t)\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \log(\sin t)\, dt$$

となる. 一方, 変数変換 $x = \frac{\pi}{2} - t$ により, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ に注意して,

$$I = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\frac{\pi}{2} - \epsilon}^{0} \log(\sin(\frac{\pi}{2} - t))\, (-1) \times dt$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{0}^{\frac{\pi}{2} - \epsilon} \log(\cos t)\, dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t)\, dt$$

を得る. よって, 最初の式から

$$2I = \int_0^{\pi} \log(\sin x)\, dx,$$

となり, ここで $x = 2t$ と変数変換すれば (簡単のため, 広義積分のまま変数変換の公式を使う)

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t)) \times 2\, dt$$

なので

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin(2t))\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2 \sin t \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\log 2 + \log(\sin t) + \log(\cos t) \Big)\, dt = (\log 2)\frac{\pi}{2} + 2I$$

となる．ここで, 上で示した

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t)\, dt$$

を用いた．従って,

$$I = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

を得る．

例題 13.7 (ガンマ関数) $s > 0$ に対して,

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

は収束する．これをガンマ関数という．さらに, 次の公式が成り立つ:
(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s > 0)$.
(2) 自然数 n に対して, 次が成り立つ．

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

(証明). まず広義積分の収束を確かめよう．

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

である．

$$x^{s-1} e^{-x} \le x^{s-1} \ (0 < x \le 1)$$

であって, 仮定の $s > 0$ より, $1 - s < 1$ となることから, $\int_0^1 x^{s-1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-s}}\, dx$ が収束することがわかる．よって, 比較判定法により, 広義積分

$$\int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

は収束する．$x \ge 1$ の場合, まず e^x のマクローリン展開より, 任意の自然数 m に対して

$$e^x \ge \frac{x^m}{m!} \ (x > 0)$$

が成り立つことを用いる．$s > 0$ に対して $m > s$ であるような自然数 m をとると,

$$x^{s-1} e^{-x} \le x^{s-1} \frac{m!}{x^m} = \frac{m!}{x^{m+1-s}} \ (x \ge 1)$$

であって, $m + 1 - s > 1$ であるので広義積分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{m+1-s}}\, dx$ が収束する．よって, 比較判定法により, 広義積分

$$\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

も収束することがわかる．(授業での説明を少し違う説明を行った.)

(1)

$$\Gamma(s+1) = \lim_{\epsilon\to 0, M\to+\infty} \int_\epsilon^M x^s e^{-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0, M\to+\infty} \int_\epsilon^M x^s(-e^{-x})'\,dx$$

であって, 部分積分することで,

$$\int_\epsilon^M x^s(-e^{-x})'\,dx = \Big[x^s(-e^{-x})\Big]_{x=\epsilon}^{x=M} - \int_\epsilon^M (x^s)'(-e^{-x})\,dx$$

$$= (\epsilon^s e^{-\epsilon} - M^s e^{-M}) + s\int_\epsilon^M x^{s-1}e^{-x}\,dx$$

$$\to 0 + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\Gamma(s)\ (\epsilon\to 0, M\to+\infty)$$

を得る. 以上より $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s>0)$ を得る.
(2) (1) の公式より

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = n!\Gamma(1)$$

となる. また $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$ であるので $\Gamma(n+1) = n!$ を得る.