微分積分 I a クラス (講義ノート13)

倉田　和浩

平成29年7月19日

1　記号, 予備知識など

2　実数の基本的性質, 数列の極限

• この講義は教科書「微分積分学」(難波 誠著) に沿って行うので, この講義ノートは教科書と内容に重複が多い. しかし逆に, 教科書の定理や命題の番号とは独自に番号付けしているので注意されたい. 定理の番号が重要なのではなく, 内容が重要なので混乱はないと思う. 教科書の証明や説明などを補足したり, かみ砕いたりしてできるだけ理解の助けになるよう, 心がけたつもりである. 時間の関係で授業では十分に説明できなくて説明を省略する部分の解説もこの講義ノートに記載しておく. 実際の授業での説明に即した覚書でもあり, 冗長すぎる箇所もあろうかと思うが, 復習に役立ててほしい.

3　記号, 予備知識など

3.1　集合の記号

• $A \subset B$ とは, $a \in A$ ならば, $a \in B$ が成り立つことをいう. $A = B$ とは, $A \subset B$ かつ $B \subset A$ なることである.
集合 A と B の共通集合 $A \cap B$ および和集合 $A \cup B$ は, それぞれ

$$A \cap B := \{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$

$$A \cup B := \{x \in X \mid x \in A \text{ または } x \in B\},$$

で定義される.
• 集合 A から集合 B の元を抜いてできる集合を

$$A - B := \{a \in A \mid a \notin B\}.$$

本によっては, $A \setminus B$ という記号を用いることもある. 全体集合が X であるとき, 集合 $A \subset X$ の補集合は

$$A^c := X - A$$

で定義される.
• $\mathbb{N}$: 自然数全体からなる集合, $\mathbb{Z}$: 整数全体からなる集合, $\mathbb{Q}$: 有理数全体からなる集合をそれぞれ表し, 特に

$$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid q \neq 0, p, q \in \mathbb{Z}\}.$$

• $\mathbb{R}$: 実数全体からなる集合を表す. 高校では, 実数は無限小数で表せる数. (有理数 $x = \frac{p}{q}$ は, 有限小数または循環無限小数で表される.) 実数は, 有理数と無理数からなり, 無理数は循環しない無限小数で表される数. 無理数の例:

$$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots, \quad \pi = 3.141592\cdots.$$

• 特に断りなく, ∞ と書くときは, $+\infty$ のことを意味する. 従って, $n \to +\infty$ と書くかわりに, $n \to \infty$ と書くことが多い. $+\infty$ や $-\infty$ は, 特に強調したい場合に明記することがある. また, $\epsilon := \frac{1}{2}|a-b|$ というように, $:=$ という記号は, 左辺にある ϵ を右辺の量で定義するという記号として用いる.

3.2 二項定理, 不等式

命題 3.1 (2 項定理) 2 つの実数 a, b と自然数 n に対して, 次が成り立つ:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}.$$

特に, 2 項定理で $a = x, b = 1$ とすることで, 次の不等式が成り立つ.

命題 3.2 (ベルヌイの不等式) 正の実数 x と自然数 n に対して, 次が成り立つ:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

注意: $a \geq b$ は, $a \geqq b$ と同じ意味で使うこととする. 同様に, $a \leq b$ は, $a \leqq b$ と同じ意味で用いる.
• 上記の不等式において, $x = 1$ とすることで, $2^n > n$ がすべての自然数 n に対して成り立つことがわかる.

3.3 証明と論理

• 主な証明法に**数学的帰納法**, **背理法**がある. 命題 P と Q があって, P ならば Q が成り立つことを示すのに, P のもとで, もし Q が成り立たないと仮定して議論を進め, 矛盾を導くことで, Q が成り立つことを示す論法が**背理法**である. また, P ならば Q を示すのに, その対偶をとって, 「Q でない」ならば「P でない」ことを示しても良い.
• 命題の**否定命題**を正しく言えることは大事である. 例えば, 実数 x に関するある性質を $P(x)$ で表すとき, 命題「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」という命題の否定命題は, 「ある x が存在して $P(x)$ が成り立たない」である.

また, 実数 x, k に関するある性質を $P(x,k)$ で表すとき, 命題「すべての x に対して, ある k が存在して $P(x,k)$ が成り立つ」の否定命題は, 「ある x が存在して, すべての k に対して $P(x,k)$ が成り立たない」となる.

• **定理, 命題, 主張などの言い換えを柔軟にできた方がよい.** 例えば, 1 つの定理を, 正確に表現できるとともに, スローガン的にその本質的主張を一言で表現して理解を定着させることは重要である. また, 正確な表現にしても, 単純な言い換え表現や同値な表現の仕方がありえるので, それらが同じことを意味することを理解しておくことが, 理解の定着には不可欠であるといえる.

• **等号の証明**: (なにげないが重要な証明の作法)
例えば 2 つの関数 $f(x), g(x)$ が別々に定義されて, 実は $f(x) = g(x)$ となることを証明するのに, $f(x) \leq g(x)$ と $f(x) \geq g(x)$ を証明するという方針で示すことも多い. また, 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して, $a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ を証明するのに, $a_n \leq b_n$ なることと, $a_n \geq b_n$ なることを証明するという方針をとることも多い. それは, 例えば, $a_n \leq b_n$ を示すのは簡単であるが, $a_n \geq b_n$ を示すのは難しいというような場合がよくあるからである.

• ある実数 x に対して, $x = 0$ を証明するには, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x| \leq \epsilon$ が成り立つことを示せばよい. 簡単なことではあるが, x が複雑に定義されていて一見して $x = 0$ であることがわかりづらい場合などには, 有効な証明法である.

4 実数の基本的性質, 数列の極限

$\mathbb{R}$: 実数の集合 実数とは何かを論じる代わりに, 実数全体は有理数全体を含む数の体系で, その基本的性質として, 四則演算, 大小関係とさらに「**連続性**」を持つものとして理解する. また幾何学的イメージとして, 実数は数直線上の点と一対一に対応するものとして理解する. 「**連続性**」は, 次の 2 つの公理で定義する.

公理 I. 任意の $a, b > 0$ に対して, $b < Na$ を満たす自然数 N が存在する.

公理 II. 2 つの数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ において, 2 条件：
(i) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$,
(ii) $b_n - a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$
を満たすならば, すべての $n \in \mathbb{N}$ で $a_n \leq c \leq b_n$ が成り立つ数 c がただ 1 つ存在する.

定義 4.1 (数列の収束) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 a に収束するとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ なるすべての n に対して, $|a_n - a| < \epsilon$ が成立することをいう.
このとき, a を数列 $\{a_n\}$ の極限値といい, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ とか, $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ と書く.

注意 4.1 「n が限りなく大きくなるとき, a_n が限りなく a に近づくこと」を表現したものである. 上記の N は, $\epsilon > 0$ に対して決まる（取り替える必要がある）ので, $N = N(\epsilon)$ とも書く. ϵ をより小さく与えると, それに応じて N はより大きくとる必要がある.

● 数列 $\{a_n\}$ がある a に収束するとき, 数列 $\{a_n\}$ は収束する, あるいは, 収束列であるという. 収束しない数列を発散するという.

定義 4.2 任意の $M>0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ なるすべての n に対して, $a_n > M$ が成り立つとき, $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ あるいは $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ と書いて, $\{a_n\}$ は $+\infty$ に発散するという.

注意 4.2 勝手な $K>0$ を *1* つ固定する. このとき, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ なることは, 次の条件と同値である:
任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ なるすべての n に対して, $|a_n - a| \leq K\epsilon$ が成立すること.

注意 4.3 $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ を, 論理記号 $\forall, \exists$ を用いて表すと,
$\forall\epsilon$ に対して, $\exists N$ *s.t.* $\forall n \geq N$ に対して, $|a_n - a| < \epsilon$ が成り立つ. ここで. *s.t.* というのは, *such that* の略である.
あるいは, もっと簡潔に次のように表現できる:

$$\forall\epsilon(\ \exists N(\ \forall n \geq N(\ |a_n - a| < \epsilon\ )\ )\ ).$$

この否定命題は, $\forall$ と $\exists$ を逆にすることで次のようになる:

$$\exists\epsilon(\ \forall N(\ \exists n \geq N(\ |a_n - a| \geq \epsilon\ )\ )\ ).$$

もうすこし, 平たく表現すると, $\exists\epsilon > 0$ があって, $\forall N$ に対して, $\exists n \geq N$ *s.t.* $|a_n - a| \geq \epsilon$, となる.

命題 4.1 数列 $\{a_n\}$ が収束するとき, その極限値はただ *1* つに決まる.

(証明). $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ かつ $a_n \to b$ $(n \to +\infty)$ として, $a = b$ となることを示せばよい. 背理法で示そう. そこでもし, $a \neq b$ としよう. このとき, $\epsilon := \frac{1}{2}|a-b| > 0$ と置く. $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ より, 定義から, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ があって, $n \geq N_1$ ならば, $|a_n - a| < \epsilon$ が成り立つ. また, $b_n \to a$ $(n \to +\infty)$ より, 定義から, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ があって, $n \geq N_2$ ならば, $|a_n - a| < \epsilon$ が成り立つ. そこで $N := \max(N_1, N_2)$ とおくと, $n \geq N$ に対して, $|a_n - a| < \epsilon$ かつ $|a_n - b| < \epsilon$ が成り立つこととなる. しかしながら, このとき三角不等式より, $n \geq N$ に対して

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |a-b|$$

となり, 矛盾. よって示された.

命題 4.2 $a_n \to a\ (n \to +\infty)$ とする. もし

$$|b_n - a| \leq |a_n - a|\ (\forall n \geq 1)$$

が成り立つならば, $b_n \to a\ (n \to +\infty)$ が成り立つ.

(証明). $a_n \to a\ (n \to +\infty)$ より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ があって $n \geq N$ ならば, $|a_n - a| < \epsilon$ が成り立つ. よって仮定から, $|b_n - a| < \epsilon\ (\forall n \geq N)$ が成り立つ. これは, $b_n \to a\ (n \to +\infty)$ なることを示している.

命題 4.3

$$a_n \leq b_n\ (\forall n \geq 1)$$

であって, $a_n \to a\ (n \to +\infty)$ かつ $b_n \to b\ (n \to +\infty)$ ならば, $a \leq b$ が成り立つ.

(証明). 背理法で示す. $a > b$ とすると, $\epsilon := \frac{1}{2}(a-b) > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ があって,

$$|a_n - a| < \epsilon, \quad |b_n - b| < \epsilon\ (\forall n \geq N)$$

が成り立つ. (数直線上で様子を図示すれば, ϵ の定め方より矛盾が出ることが直ぐにわかるのであるが, そのことを式変形で以下に論証してみることにする.)
一般に $c \geq -|c|$ なので,

$$a_n - a \geq -|a_n - a| > -\epsilon = -\frac{1}{2}(a-b).$$

よって,

$$a_n > \frac{1}{2}(a+b)\ (\forall n \geq N).$$

また

$$b - b_n \geq -|b - b_n| > -\epsilon = -\frac{1}{2}(a-b)$$

より,

$$b_n < b + \epsilon = \frac{1}{2}(a+b)\ (\forall n \geq N)$$

を得る. よって, $n \geq N$ に対して, $b_n < \frac{1}{2}(a+b) < a_n$ が成り立つことになり $a_n \geq b_n\ (\forall n \geq 1)$ であったことに矛盾.

命題 4.4 (はさみうちの原理)

$$a_n \leq c_n \leq b_n\ (\forall n \geq 1)$$

であって, $a_n \to a\ (n \to +\infty)$ かつ $b_n \to a\ (n \to +\infty)$ ならば, $c_n \to a\ (n \to +\infty)$ が成り立つ.

(証明).

$$-|a_n - a| \le a_n - a \le c_n - a \le b_n - a \le |b_n - a|$$

より,

$$|c_n - a| \le \max(|a_n - a|, |b_n - a|) \le |a_n - a| + |b_n - a|$$

を得る. 従って, $|c_n - a| \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成り立つ.

例題 4.1 $b > 0$ として, $a_n = \frac{b}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき, $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成り立つ.

(証明). (このごく当たり前の事実は, 公理 I から導くことができる.)
公理 I より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある自然数 N があって, $b < \epsilon N$ が成り立つ. このとき, 任意の $n \ge N$ に対して, $b < \epsilon n$ が成り立つので,

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{b}{n} < \epsilon \ (\forall n \ge N)$$

となる.

例題 4.2

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \ (n \to +\infty).$$

(証明). 不等式 $2^n > n$ より,

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. $\frac{1}{n} \to 0$ $(n \to +\infty)$ なので, はさみうちの原理から結論を得る.

命題 4.5 $a_n \to a, b_n \to b$ $(n \to +\infty)$ とするとき, 次が成り立つ.
(1) $a_n + b_n \to a + b$ $(n \to +\infty)$.
(2) $a_n b_n \to ab$ $(n \to ; \infty)$.
(3) $b \ne 0$ のとき,

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \ (n \to +\infty).$$

(証明) ここでは省略する. 教科書の演習問題. 数列の収束の定義を用いてどう論証するかの練習問題として, 教科書の解答を参考にして味わってみてほしい.
例. $p \in \mathbb{N}$ を固定するとき,

$$(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{p}{n}) \to 1 \ (n \to +\infty)$$

が成り立つ. また

$$(1 + \frac{1}{n})^p \to 1 \ (n \to +\infty).$$

4.1 上に有界, 上界, 上限（下に有界, 下界, 下限）

定義 4.3 部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ を考える.
(1) S が上に有界であるとは, ある M があって,

$$x \leq M \ (\forall x \in S)$$

が成り立つことをいう. このような M を集合 S の上界という. *(*M が S の上界ならば, $M' > M$ なる任意の M' も S の上界となる.*)*
(2) S が下に有界であるとは, ある L があって,

$$x \geq M \ (\forall x \in S)$$

が成り立つことをいう. このような L を集合 S の下界という. *(*L が S の下界ならば, $L' < L$ なる任意の L' も S の下界となる.*)*
(3) S が上に有界かつ下に有界であるとき, 単に S は有界であるという.

- 数列 $\{a_n\}$ に対して, $S = \{a_n\}$ として上に有界であるとき, 上に有界な数列という.

定理 4.1 (ワイヤシュトラースの定理) *(1)* 空でない部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとする. このとき, 最小の上界が存在する. これを S の上限といって $\alpha = \sup S$ と書く. *(supremum* の頭文字を取ったものである.*)*
(2) 空でない部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ が下に有界であるとする. このとき, 最大の下界が存在する. これを S の下限といって $\beta = \inf S$ と書く. *(infimum* の頭文字を取ったものである.*)*

(証明). S の上界の 1 つを b とし, また上界でない a を 1 つとる. $a < b$ である. $c := \frac{1}{2}(a+b)$ と置く. c が S の上界ならば, $a_1 = a, b_1 = c$ とし, c が S の上界でないならば, $a_1 = c, b_1 = b$ として, a_1, b_1 を定める. このとき,

$$a \leq a_1 \leq b_1 \leq b, \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$$

が成り立つ. $c_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ として, c_1 が S の上界ならば, $a_2 = a_1, b_2 = c_1$ とし, c_1 が S の上界でないならば, $a_2 = c_1, b_2 = b_1$ として, a_2, b_2 を定める. このとき,

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1 \leq b, \quad b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = (\frac{1}{2})^2(b-a)$$

が成り立つ. 同様に帰納的に a_n, b_n を定めると, 各 a_n は S の上界でなく, 各 b_n は S の上界であって, 次を

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = (\frac{1}{2})^n(b-a).$$

公理 II より, ある c があって, $a_n \leq c \leq b_n \ (\forall n \geq 1)$ が成り立つ. ここで

$$0 \leq c - a_n \leq b_n - a_n \to 0 \ (n \to +\infty),$$

$$0 \leq b_n - c \leq b_n - a_n \to 0 \ (n \to +\infty),$$

となるので, $a_n \to c \ (n \to +\infty)$ かつ $b_n \to c \ (n \to +\infty)$ を得る.
主張 1: c は S の上界である.
そうでないなら, ある $x \in S$ があって, $c < x$ となる. 一方, $b_n \geq c$ であって, $b_n \to c \ (n \to +\infty)$ なので, ある N があって, $n \geq N$ に対して

$$c \leq b_n < x$$

となるが, この b_n は S の上界でないことになり矛盾. よって主張 1 が示された.
主張 2: c は S の最小上界である.
もし $d < c$ なる上界 d があるとする. $a_n \leq c, a_n \to c \ (n \to +\infty)$ より, ある N があって

$$d < a_n \leq c \ (\forall n \geq N)$$

となるが, この a_n は S の上界となることになり矛盾. よって主張 2 が示された.
ゆえに, 定理の証明ができたこととなる.

♣ 上に有界な集合 S は, 上限 $\alpha = \sup S$ をもつ.

注意 4.4 S に最大値が存在するならば, それが上限に一致する. また, S に最小値が存在するならば, それが下限に一致する.

例.

$$S_1 := [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad S_2 := [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$
$$S_3 := (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$

とおくとき, $\max S_1 = b = \sup S_1, \min S_1 = a = \inf S_1$ であり, $\max S_2$ は存在しないが $b = \sup S_2$ である. また $\min S_2 = a = \inf S_2$. $\min S_3$ も $\max S_3$ も存在せず, $\inf S_3 = a, \sup S_3 = b$ となる.

注意 4.5 $\alpha = \sup S$ は次の *2* つの性質で規定される*:*
(a) $x \le \alpha$ $(\forall x \in S)$ *(*α が S の上界であること*.)*
(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\alpha - \epsilon < x$ なる $x \in S$ が存在すこと. *(*α が上界の中で最小であることを意味する*.)*
またこのことから, $x_n \in S$ で, $x_n \to \alpha$ $(n \to +\infty)$ となる数列 $\{x_n\}$ が存在することになる. なぜなら, 性質 *(b)* で $\epsilon = \frac{1}{n}$ に対して $\alpha - \frac{1}{n} < x$ なる $x \in S$ が存在するのでそれを x_n と名づけると,

$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n \le \alpha \ (\forall n \ge 1)$$

が成り立つことになる. よって $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$ $(\forall n \ge 1)$ となるので, $x_n \to \alpha$ $(n \to +\infty)$ を得る.
同様に, $\beta = \inf S$ は次の *2* つの性質で規定される*:*
(a) $\beta \le x$ $(\forall x \in S)$ *(*α が S の下界であること*.)*
(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $x < \beta + \epsilon$ なる $x \in S$ が存在すこと. *(*α が下界の中で最大であることを意味する*.)*
またこのことから, $x_n \in S$ で, $x_n \to \beta$ $(n \to +\infty)$ となる数列 $\{x_n\}$ が存在することになる.

命題 4.6 $\{a_n\}$ が収束するならば, $\{a_n\}$ は有界となる.

(証明). 1 つの $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ があって, $n \ge N$ ならば

$$|a_n| - |a| \le |a_n - a| < \epsilon$$

が成り立つ. よって

$$|a_n| < |a| + \epsilon \ (\forall n \ge N).$$

従って,

$$M := \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |a| + \epsilon)$$

とおけば $|a_n| \le M$ $(\forall n \ge 1)$ となる.

注意 4.6 逆の命題は成り立たない. すなわち, 有界な数列であっても必ずしも収束しない. 例えば, $a_n = (-1)^n$ という数列は, $|a_n| \le 1$ $(\forall n \ge 1)$ なので有界な数列であるが, 収束しない.

定理 4.2 数列 $\{a_n\}$ が単調増加数列*:*

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le \cdots$$

であるとし, 上に有界ならば, $\{a_n\}$ は収束する. またその極限値は上限に等しい.
また, 上に有界でなければ, $+\infty$ に発散する.

(証明). $S=\{a_n\}$ とし, 上に有界とする. $\alpha=\sup S$ とおく. よって $a_n \le \alpha$ $(\forall n \ge 1)$. このとき, $a_n \to \alpha$ $(n \to +\infty)$ を示す. そうでないなら, ある $\epsilon > 0$ があって, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対しても, $n \ge N$ なる n で $a - a_n = |a_n - a| \ge \epsilon$ なるものが存在することとなる. このとき $\{a_n\}$ は単調増加なので,

$$a \ge a_n + \epsilon \ge a_N + \epsilon$$

を得る. N は任意なので, $a-\epsilon \ge a_N$ $(\forall N \ge 1)$ となるが, これは $a-\epsilon$ が S の上界であることとなり, a が上限であることに矛盾する. 以上より, $a_n \to \alpha$ $(n \to +\infty)$ が成り立つことになる.
$S=\{a_n\}$ が上に有界でないなら, 任意の $M>0$ に対して $M \le a_N$ となる N が存在する. $\{a_n\}$ は単調増加列なので $M \le a_n$ $(\forall n \ge N)$ が成り立つ. このことより, $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ となる.

♣ 単調増加で上に有界な数列 $\{a_n\}$ は収束する. 同様に, 単調減少で下に有界な数列 $\{a_n\}$ は収束する.

例題 4.3

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n,$$

$$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

とおくとき, ともに単調増加で上に有界な数列であり,

$$e := \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 2.718\cdots$$

が成り立つ.

(証明). 試しに数項しらべてみる. 2 項定理より

$$a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2, a_2 = (1+\frac{1}{2})^2 = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{2}) > a_1,$$

$$a_3 = (1+\frac{1}{3})^3 = 1 + 3\cdot\frac{1}{3} + \frac{3\cdot 2}{2!}(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^3$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{3}) > 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{2}) = a_2$$

となる. （確かに単調増加数列となっていそうである！最終的な以下の証明においてはこの考察は不要であるが,　命題や定理が述べられたとき, 正しいかどうかを確かめたり, 推測したりする試行錯誤のプロセスは定理の主張や証明を理解するのに重要となる. ）
一般に, 2 項定理より

$$a_n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}(\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{1}{n})^3 + \cdots + \frac{n!}{n!}(\frac{1}{n})^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

と書けるので,

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

となるので, a_n の表現と a_{n+1} の表現の最初の n 項を比較することで,

$$a_{n+1} > a_n$$

であることがわかる. また,

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$\leq 1 + \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3$$

を得る. よって $\{a_n\}$ は上に有界な数列である. 以上より, $\{a_n\}$ は収束することがわかり, その極限値を

$$e := \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n (= 2.718\cdots)$$

と表す. (e はネイピアの数と呼ばれる.)
また $b_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ に対して, 上記の不等式より $a_n < b_n < 3$ $(\forall n \geq 1)$ あることがわかる. さらに $\{b_n\}$ が単調増かな数列であることは明らかである従って $b := \lim_{n\to+\infty} b_n$ が存在して, $e \leq b$ が成り立つことがわかる.
主張: $b = e$ が成り立つ.
$e \geq b$ を示せばよい. 任意の自然数 p を固定する. このとき $n > p$ に対して, 先ほどの a_n の表現から

$$a_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{p-1}{n})$$

が成り立つことに注意しよう. このとき $n \to +\infty$ なる極限をとることで, 右辺も収束することがわかり

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{p!} = b_p$$

が成り立つこととなる. この不等式は任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して成り立つので, ここで $p \to +\infty$ の極限をとることで, $e \geq b$ を得る.

例題 4.4 $a > 0$ とする．

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + \frac{a}{b_n})\ (n \geq 1)$$

で数列 $\{b_n\}$ を定める．このとき, $\{b_n\}$ は下に有界で単調減少な数列であって,

$$b_n \to \sqrt{a}\ (n \to +\infty)$$

が成り立つ．

(証明)． まず $b_n > 0\ (n \geq 1)$ となることは明らかである．そこで相加・相乗平均の不等式：

$$\frac{1}{2}(a+b) \geq \sqrt{ab}\ (a, b > 0)$$

を用いて,

$$b_{n+1} \geq \sqrt{b_n \cdot \frac{a}{b_n}} = \sqrt{a}\ (n \geq 1).$$

よって $\{b_n\}$ は下に有界な数列である．また,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}(\frac{a}{b_n} - b_n) = \frac{a - b_n^2}{2b_n} \leq 0\ (\forall n \geq 2)$$

となるので, $b_{n+1} \leq b_n\ (\forall n \geq 2)$. 以上より $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ は下に有界で単調減少な数列なので収束する．そこで $\alpha := \lim_{n\to+\infty} b_n$ と置く．$b_n \geq \sqrt{a}\ (n \geq 2)$ であったので, $\alpha \geq \sqrt{a}$ となる．さらに漸化式で $n \to ;\infty$ の極限をとることで

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{a}{\alpha})$$

となる．これより $\alpha^2 = a$ となるが, $\alpha \geq \sqrt{a}$ より $\alpha = \sqrt{a}$ となる．
♣ この数列は, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ など $\sqrt{a}$ の近似計算に良く用いられる．

5 B-W の定理, コーシーの収束条件

6 B-W の定理, コーシーの収束条件

6.1 B-W の定理

定理 6.1 (ボルツァーノ- ワイヤシュトラースの定理, 以下 B-W の定理と略記) $S \subset \mathbb{R}$ は, 有界な無限集合 (無限個の元をもつこと）であるとする．このとき, S に互いに異なる点からなる数列 $\{x_n\} \subset S$ で, ある数に収束するものが存在する．

(証明). まず S は有界なので, $a := \inf S, b := \sup S$ が存在する. S が無限集合なので, $a < b$ となる. ($a \leq b$ は定義より常に成り立ち, $a = b$ なら, S は $a(= b)$ という 1 点からなる集合となってしまうから.)
そこで, $a_1 := a, b_1 := b$ とし, $c_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ と置く. $x_1 \in S$ をどれでもいいので 1 つとる. このとき, S が無限集合であることより, **区間 $[a_1, b_1]$ を半分に分けた 2 つの半区間 $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ のどちらかは, $S - \{x_1\}$ の点を無限個含むこととなる. その無限個含むほうの区間をえらび, 改めてその区間を $[a_2, b_2]$ と名づけることとし**, $c_2 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ と置く. 次に, $[a_2, b_2]$ から $S - \{x_1\}$ の点 x_2 を 1 つ選ぶ. このとき,

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_2, \quad b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$$

$$a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad x_2 \in S - \{x_1\}$$

が成り立つことに注意しておく. **区間 $[a_2, b_2]$ を半分に分けた $[a_2, c_2], [c_2, b_2]$ の 2 つの区間の内どちらかは, $S - \{x_1, x_2\}$ の点を無限個ふくむことになる. その無限個含む方の区間をえらび, 改めてその区間を $[a_3, b_3]$ と名づけることとし**, $[a_3, b_3]$ から $S - \{x_1, x_2\}$ の点 x_3 を 1 つ選び, $c_3 = \frac{1}{2}(a_3 + b_3)$ と置く. このとき,

$$a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq b_3 \leq b_2 \leq b_2, \quad b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = (\frac{1}{2})^2(b_1 - a_1)$$

かつ

$$a_3 \leq x_3 \leq b_3, \quad x_3 \in S - \{x_1, x_2\}$$

を満たすこととなる. 同様に帰納的に数列 a_n, b_n, x_n を次の関係を満たすように定めることができる:

$$a_n \leq x_n \leq b, \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1,$$

$$b_n - a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}(b_1 - a_1) \to 0 \ (n \to +\infty),$$

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad x_n \in S - \{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}.$$

よって公理 II より, ある c が存在して, $a_n \leq c \leq b_n (\forall n \geq 1)$ が成り立つ. これより,

$$|a_n - c| = c - a_n \leq b_n - a_n \to 0 \ (n \to +\infty), \quad |b_n - c| = b_n - c \leq b_n - a_n \to 0 \ (n \to +\infty),$$

となるので, はさみうちの原理より, $x_n \to c \ (n \to +\infty)$ となる. 数列 $\{x_n\}$ はそのつくり方より, 異なる点からな数列であるので, このことは定理の主張を示したこととなる.

系 6.1 有界な数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, ある部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{a_n\}$ が存在して, ある c に収束する. すなわち,

$$a_{n_k} \to c \ (k \to +\infty)$$

が成り立つ. (この系も主張を *B-W* の定理と呼ばれ, よく用いられることとなる)

♣ 数列 $\{a_n\}$ の部分列とは, この順番にとびとびの番号の項を拾い上げたもので, それらを改めて番号付けた

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots \to +\infty_(k \to +\infty)$$

という添え字を用いて $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と表示されるものである. 従って特に,

$$k \leq n_k \ (\forall k \geq 1)$$

が成り立っていることに注意.
(証明). $S := \{a_n\}$ とおくと, S は有界な集合である. ただし, このとき, S は無限集合であるとは限らない. S が有限集合となる場合は, ある番号 $n_1 < n_2 < \cdots n_k < n_{k+1} < \cdots \to +\infty$ があって

$$a_{n_1} = a_{n_2} = \cdots = a_{n_k} = \cdots$$

が成り立つことになるので, その $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が求める収束列となるので, 主張は正しい.
よって, $S = \{a_n\}$ が無限集合である場合に示せばよいことになる. この場合は, 先ほどの B-W の定理が適用できる. その証明の中での x_1 は, 今の場合, ある番号 n_1 を用いて $x_1 = a_{n_1}$ とかける. 次の x_2 は, $\{a_n\}_{n=n_1+1}^{\infty}$ から選べばいいので, ある番号 $n_2 > n_1$ を用いて, $x_2 = a_{n_2}$ と書くことができる. 以上の手順を続けることで, B-W の定理にある収束数列 $\{x_k\}$ は

$$\{x_k\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad (n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$$

と書くことができる. 以上で系が示された.

例題 6.1 数列 $\{a_n\}$ として,

$$a_n = \sin(\frac{n\pi}{2}) \ (n \geq 1)$$

を考える. $|a_n| \leq 1 \ (n \geq 1)$ より $\{a_n\}$ は有界列である. このときは具体的に, 例えば, $n_1 = 1, n_2 = 5, \cdots, n_k = 4(k-1)+1, \cdots$ という部分列を考えると,

$$a_{n_k} = \sin(2(k-1)\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \ \to 1 \ (k \to +\infty)$$

となるので, 収束する部分列である. また, $n_1 = 2, n_2 = 4, \cdots, n_k = 2k, \cdots$ という部分列を考えると,

$$a_{n_k} = \sin(k\pi) = 0 \ \to 0 \ (k \to +\infty)$$

となるので, 別の収束する部分列である.
一方, $b_n = \sin n \ (n \geq 1)$ として, 数列 $\{b_n\}$ を定めるとき, $|b_n| \leq 1 \ (n \geq 1)$ なので, $\{b_n\}$ も有界列. よって, *B-W* の定理より, ある a とある部分列 $\{b_{n_k}\}$ が存在して,

$$b_{n_k} = \sin(n_k) \to a \ (k \to +\infty)$$

が成り立つこととなる. このときは, a がどんな値であるかとか, 部分列 $\{b_{n_k}\}$ がどんな部分列かどうかはわからない. しかし存在することは保証される.

6.2 コーシーの収束条件

● 数列 $\{a_n\}$ が収束することを極限値をあらわに用いることなく以下のように表現することができることは重要である.

定義 6.1 数列 $\{a_n\}$ が**コーシー列である**とは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m, n \geq N$ なるすべての m, n に対して

$$|a_m - a_n| < \epsilon$$

が成り立つことをいう.

定理 6.2 (コーシーの収束条件) 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は, 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることである.

注意 6.1 コーシー列が収束列となるという性質を, **完備性**という. この定理は, **実数全体の集合 $\mathbb{R}$ が完備性をもつ**, ということを意味している.

(証明). まず,$\{a_n\}$ **が収束列ならば, コーシー列となることを示そう**. （こちらは, 易しい.)
ある a があって, $a_n \to a$ $(n \to +\infty)$ とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ なるすべての n に対して

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つ. 従って, $m, n \geq N$ なるすべての m, n に対して, 3 角不等式より

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n) \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つ. つまり, $\{a_n\}$ はコーシ列となる.
次に, $\{a_n\}$ **がコーシー列ならば, 収束列となることを示そう**. (こちらが, 重要でもあり, 難しい.)
Step 1: まず $\{a_n\}$ がコーシー列ならば, 有界列となることを示す. 定義より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$|a_m - a_n| < \epsilon \ (\forall m, n \geq N)$$

が成り立つ. 特に, $\epsilon = 1$ に対する N を N_1 とかくことで,

$$|a_m| = |(a_m - a_{N_1}) + a_{N_1}| \leq |a_m - a_{N_1}| + |a_{N_1}| < 1 + |a_{N_1}| \ (\forall m \geq N_1)$$

を得る. よって, $K := \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_1 - 1}|, |a_{N_1}| + 1)$ として $|a_m| \leq K$ $(\forall m \geq 1)$ となるので $\{a_m\}$ は有界列となる.

Step 2: 改めて, $\{a_n\}$ がコーシー列であることより, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$|a_m - a_n| < \epsilon \ (\forall m, n \geq N) \tag{1}$$

が成り立つ. Step 1 より $\{a_m\}$ は有界列なので, B-W の定理より, ある部分列 $\{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ とある a が存在して

$$a_{m_k} \to a \ (k \to +\infty)$$

が成り立つ. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $L \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$|a_{m_k} - a| < \epsilon \ (\forall k \geq L) \tag{2}$$

が成り立つ. この L は $L \geq N$ となるようにとることができる. このとき, $k \geq L$ ならば $m_k \geq m_L \geq L \geq N$ であること注意すれば, $\forall n \geq N$, $\forall k \geq L$ で, $m_k \geq N$ なので, (1) より

$$|a_n - a_{m_k}| < \epsilon \ (\forall n \geq N, \forall k \geq L) \tag{3}$$

が成り立つこととなる. 以上より, $k = L$ と選ぶことで, $\forall n \geq N$ に対して, (2) と (3) から,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{m_L}| + |a_{m_L} - a| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

が成り立つ. このことは, $a_n \to a \ (n \to +\infty)$ なることを示している.

命題 6.1 (縮小写像の原理) ある $0 < k < 1$ があって,

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \ (x, y \in \mathbb{R})$$

を満たす関数 $f(x)$ があるとする. *(*このような $f(x)$ を**縮小写像**という. *)* 今, 勝手な実数 α をとって,

$$a_1 = \alpha,\ a_{n+1} = f(a_n) \ (n \geq 1)$$

によって, 数列 $\{a_n\}$ を定義する. このとき $\{a_n\}$ はコーシー列となる.
このとき, 極限 $\alpha := \lim_{n\to+\infty} a_n$ が存在するが, それは, $\alpha = f(\alpha)$ を満たす. *(*このような α のことを $f(x)$ **の不動点**とも言う.*)* $f(x)$ の不動点はただ 1 つであることもわかる.

(証明).

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq k|a_n - a_{n-1}|$$

が成り立つ. これより,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}| \leq k^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \cdots \leq k^n|a_2 - a_1|$$

を得る. さらに, $m > n$ に対して

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n)|a_2 - a_1|$$

$$= k^n(1 + k + \cdots + k^{m-n-1})|a_2 - a_1| = k^n\left(\frac{1 - k^{m-n}}{1 - k}\right)|a_2 - a_1|$$

$$< \frac{k^n}{1-k}|a_2 - a_1|$$

を得る, 以上から, $m > n \geq N$ に対して

$$|a_m - a_n| \leq \frac{k^N}{1-k}|a_2 - a_1|$$

となる. $0 < k < 1$ なので $k^N \to +\infty$ $(N \to +\infty)$. よって, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, N を十分おおきくとって

$$\frac{k^N}{1-k}|a_2 - a_1| < \epsilon$$

が成り立つようにできる. このとき,

$$|a_m - a_n| < \epsilon \ (\forall m, n \geq N)$$

が成り立つことがわかる.
よって極限が存在することになるので, $\alpha := \lim_{n\to+\infty} a_n$ と置くとき,

$$|f(a_n) - f(\alpha)| \leq k|a_n - \alpha|$$

より, $f(a_n) \to f(\alpha)$ $(n \to +\infty)$ となる. 従って, $a_{n+1} = f(a_n)$ から, $\alpha = f(\alpha)$ を得る. また, 不動点がほかにあったとして, $f(\beta) = \beta$ とするとき,

$$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leq k|\alpha - \beta|$$

となるが, $0 < k < 1$ より, $|\alpha - \beta| = 0$. すなわち $\beta = \alpha$ となる. これで不動点の一意性も示された.

例題 6.2 $a_1 = 1, a_{n+1} = \cos a_n$ $(n \geq 1)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ は収束して, その極限値 $\alpha := \lim_{n\to+\infty} a_n$ は $\alpha = \cos\alpha$ を満たす.

(証明). 三角関数の公式

$$\cos(c+d) = \cos c\cos d - \sin c\sin d, \quad \cos(c-d) = \cos c\cos d + \sin c\sin d$$

より, $x = c + d, y = c - d$ として

$$\cos x - \cos y = -2\sin c\sin d = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

となる. もし $|x|, |y| \leq 1$ ならば, $|\frac{x+y}{2}| \leq 1$ となるので

$$|\sin(\frac{x+y}{2})| \leq \sin 1 < 1$$

を得る. また, $|\sin x| \leq |x|$ $(|x| \leq \frac{\pi}{2})$ という性質も使うと, 特に

$$|\sin(\frac{x-y}{2})| \leq |\frac{x-y}{2}| \ (|x|, |y| \leq 1)$$

を得る. 以上より, $0 < k := \sin 1 < 1$ として,

$$|cosx - \cos y| \leq k|x-y| \ (|x|, |y| \leq 1)$$

が成り立つこととなる. $a_1 = 1$ と定義より, $0 < a_n \leq 1$ $(n \geq 1)$ となるので

$$|a_{n+1} - a_n| \leq k|a_n - a_{n-1}| \ (n \geq 2)$$

が成り立つ. 以上より, 先ほどの縮小写像の原理を用いることで結論を得る.

7　関数の極限

8　関数の極限

定義 8.1 関数 $f(x)$ が $x = a$ の近くで定義されているとする. ただし, $x = a$ では定義されていなくてもよい. このとき,　ある数 A があって, x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が A に限りなく近づくとは, **任意の** $\epsilon > 0$ **に対して, ある** $\delta > 0$ **が存在して,** $0 < |x-a| < \delta$ **ならば** $|f(x) - A| < \epsilon$ **が成り立つこと**, をいう. このとき, $f(x) \to A$ $(x \to a)$ あるいは, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ と書き, A を極限値という. （これを $\epsilon - \delta$ **論法による定義**という.)

例 1.

$$f(x) = x\sin(\frac{1}{x}) \quad (x \neq 0)$$

に対して, $f(x) \to 0$ $(x \to 0)$ が成り立つ.
なぜなら, まず

$$|f(x)| \leq |x| \quad (x \neq 0)$$

に注意しよう.　よって, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta = \epsilon$ ととれば, $0 < |x| < \delta$ ならば $|f(x)| \leq |x| < \epsilon$ が成り立つ. このことは, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ なることを示している.

例 2.

$$g(x) = \sin(\frac{1}{x}) \quad (x \neq 0)$$

に対しては, $\lim_{x\to 0} g(x)$ は存在しない.
なぜなら, $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと, $g(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$ $(n \to +\infty)$ であり, 一方, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とおくと,

$$g(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \to 1 \ (n \to +\infty)$$

となる. もし極限 $\lim_{x\to 0} g(x)$ が存在するなら, $x_n \to 0, y_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ であるので, $g(x_n)$ も $g(y_n)$ も同じある値に収束しなければならないのに, 上記の事実は矛盾する. 従って, $\lim_{x\to 0} g(x)$ は存在しないと結論できる.

• 上の例でもわかるように, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ が成り立つということは, x が a にいかなる近づき方をしても一定値 A に近づかなくてはならないのである. 次の命題はそのことを表現しており, また関数の極限を数列の極限の言葉で表現したもので, いくつかの証明の際に数列の極限についての既知の事実を用いることができて便利である.

命題 8.1 $f(x) \to A$ $(x \to a)$ であるための必要十分条件は, $x_n \neq a$ で $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, $f(x_n) \to A$ $(n \to +\infty)$ が成り立つ, ことである.

(証明). (step 1). まず $f(x) \to A$ $(x \to a)$ が成り立つとしよう. 定義から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < \epsilon$ が成り立つ. 今, $x_n \neq a$ で $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ をとってくると, 上の $\delta > 0$ に対して, ある N があって $n \geq N$ ならば $0 < |x_n - a| < \delta$ が成り立つ. よって

$$|f(x_n) - A| < \epsilon \ (\forall n \geq N)$$

が成り立つこととなる. これは, $f(x_n) \to A$ $(n \to +\infty)$ なることを示している.
(step 2.) 逆を背理法を用いて示す. **結論を否定すると, ある $\epsilon > 0$ があって, 任意の $\delta > 0$ に対して, $0 < |x - a| < \delta$ であって $|f(x) - A| \geq \epsilon$ となるような x が存在することとなる**. そこで, $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ として, その δ に対して上で存在する x を x_n と書くことにすれば,

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ であって } |f(x_n) - A| \geq \epsilon \ (n \geq 1)$$

なる数列 $\{x_n\}$ が存在することとなる. ところが, このとき仮定から $|f(x_n) - A| \to 0$ $(n \to +\infty)$ となることになるので, $0 \geq \epsilon > 0$ となって矛盾. 以上より, 命題が証明された.

命題 8.2 $x \to a$ で $f(x) \to A, g(x) \to B$ が成り立つとき, 次が成り立つ.
(1) $f(x) + g(x) \to A + B$ $(x \to a)$.
(2) $f(x)g(x) \to AB$ $(x \to a)$.
(3) さらに $B \neq 0$ ならば, $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ $(x \to a)$ が成り立つ.

(証明). (2) だけ, 先ほどの数列を用いての表現を活用した証明を与えてみよう. $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, $f(x_n)g(x_n) \to AB$ $(n \to +\infty)$ が成り立つことを示せばよいが, 仮定から $f(x_n) \to A, g(x_n) \to B$ $(n \to +\infty)$ となるので, 数列のときの事実より, $f(x_n)g(x_n) \to AB$ $(n \to +\infty)$ が成り立つことがわかる. 以上より, (2) が証明された. (1) や (39 も同様に証明できるので省略する.
♣ 教科書の証明は, 最初の $\epsilon - \delta$ 論法に基づいた証明であり, 上の証明は別証明となっている.
さて, 関数の極限についても, 以下のはさみうちの原理が成り立つ.

命題 8.3

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \ (\forall x \neq a)$$

が成り立っているとき, $f(x) \to A, g(x) \to A$ $(x \to a)$ ならば, $h(x) \to A$ $(x \to a)$ も成り立つ.

(証明). $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ となる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して,

$$f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n)\ (\forall n \ge 1)$$

であり, 仮定から $f(x_n) \to A, g(x_n) \to A$ $(n \to +\infty)$ となるので, 数列のはさみうちの原理より, $h(x_n) \to A$ $(n \to +\infty)$ を得る. このことは, $h(x) \to A$ $(x \to a)$ なることをを示している.

例 3. $\sqrt{1+x} \to 1$ $(x \to 0)$ が成り立つ.
この当たり前と思われることを, 証明してみよう. まず, $|x| \le \frac{1}{2}$ で, $1+x \ge 0$ であるので, $|x| \le \frac{1}{2}$ で考える. このとき

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}$$

なので,

$$|\sqrt{1+x} - 1| \le |x| \quad (|x| \le \frac{1}{2})$$

を得る. よって, はさみうちの原理より $|\sqrt{1+x} - 1| \to 0$ $(x \to 0)$ を得る.

定義 8.2 $x \to a$ で $f(x) \to +\infty$ であるとは, 任意の $M > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ があって, $0 < |x-a| < \delta$ ならば $M < f(x)$ が成り立つことをいう. このとき, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ と書く.
また, $x \to +\infty$ で $f(x) \to A$ とは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $R > 0$ があって, $R < x$ ならば $|f(x) - A| < \epsilon$ が成り立つことをいう. このとき, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$ と書く.

例 4. $\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = 0$ が成り立つ.
(証明). まず,

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$$

より

$$|\sqrt{1+x} - \sqrt{x}| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

となることに注意する. 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\frac{1}{\epsilon^2} < M$ なる M をとると, $\frac{1}{\sqrt{M}}, \epsilon$ となるので, $x > M$ に対して, $\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{M}} < \epsilon$ となるので,

$$|\sqrt{1+x} - \sqrt{x}| < \epsilon\ (\forall x > M)$$

を得る. このことは主張が成り立つことを意味する.

例題 8.1 次が成り立つ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(証明). 教科書参照. ただ, 途中の不等式で

$$x < \tan x \ (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

の証明がなぜ長々と説明されているかについて, コメントしておく. 高校の教科書だと, この不等式は, 面積の比較を用いて扇方の図形 OAB の面積は $\pi \times \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$ であり, 三角形 OBC の面積 $\frac{1}{2}\tan x$ と比較することで

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$$

から導かれている. 実は, この扇方の図形 OAB の面積を求めるのに, 半径 1 の円の面積が π であることを用いている. しかしながら, この面積が π であることの証明には, 三角関数の微分法を用いており, そこではこの例題の式を用いているという関係となっている. 従って, その説明では**循環論法** (ある命題 A を用いて, 命題 B を証明し, その命題 B を用いて命題 A を証明するということで, これでは, 命題 A も命題 B も正しいのかどうかわからないことになる）となっている恐れがある. それで, この教科書では, 面積の比較を用いず, 曲線の長さの定義（正確には教科書の後のほうで学ぶのではあるが）に基づいて, 上の不等式の成立を説明しているのである!

例題 8.2 次が成り立つ*: (1)*

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

(2)

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

(3)

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

(証明). (1) $x \geq 1$ に対して, $n \leq x < n+1$ なる自然数 $n \in \mathbb{N}$ がただ 1 つ存在する. この n を $n(x)$ と書くとき, $x \to +\infty$ で $n(x) \to +\infty$ となる. このとき, $1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leq 1+\frac{1}{n}$ となるが, 指数関数の単調増加性（後で証明するが,　ここでは先取りして用いる）から,

$$(1+\frac{1}{n+1})^n \leq (1+\frac{1}{n+1})^x < (1+\frac{1}{x})^x \leq (1+\frac{1}{n})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

が成り立つ. これを

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})} \times (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^n \times (1+\frac{1}{n})$$

と書き換えて, $x \to +\infty$ で, $n = n(x) \to +\infty$ なのではさみうちの原理より

$$(1+\frac{1}{x})^x \to e \ (x \to +\infty)$$

を得る.
(2) $x=-y$ とおくと, $x\to-\infty$ で $y\to+\infty$ となり,

$$(1+\frac{1}{x})^x=(1-\frac{1}{y})^{-y}(\frac{y-1}{y})^{-y}=(\frac{y}{y-1})^y$$
$$=(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}\times(1+\frac{1}{y-1})$$

と変形することで, (1) の結果から (2) が導かれる.
(3) $t=\frac{1}{x}$ とおくことで, $t\to 0$ において, $|x|\to+\infty$ となり, (1), (2) の結果より

$$(1+t)^{\frac{1}{t}}=(1+\frac{1}{x})^x\to e$$

が成り立つ.

定理 8.1 $x\to a$ で $f(x)$ がある値に収束するための必要十分条件は, 次の**コーシーの収束条件**で与えられる：
任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ があって, $0<|x-a|<\delta, 0<|t-a|<\delta$ なる任意の x,t に対して $|f(x)-f(t)|<\epsilon$ が成り立つこと.

(証明). まず, ある数 A があって, $\lim_{x\to a}f(x)=A$ ならば, 上記のコーシーの条件が成り立つことを示す. 仮定から, 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ があって, $0<|x-a|<\delta$ なる任意の x に対して $|f(x)-A|<\epsilon$ が成り立つ. このとき, $0<|x-a|<\delta, 0<|t-a|<\delta$ なる任意の x,t に対して

$$|f(x)-f(t)|\le|f(x)-A|+|A-f(t)|<\epsilon+\epsilon=2\epsilon$$

となる. このことは, コーシーの収束条件が成り立つことを意味している.
逆に, コーシーの収束条件が成り立つとしよう. このとき, まず, $x_n\neq a$ で $x_n\to a$ なる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して, 極限 $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)$ が存在することを示す. それは, 任意の $\epsilon>0$ に対して, コーシーの収束条件が成り立つ $\delta>0$ があるわけであるが, その $\delta>0$ に対して, ある N があって, $n\ge N$ ならば $0<|x_n-a|<\delta$ となる. よって

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\epsilon\ (\forall n,m\ge N)$$

が成り立つこととなる. このことは, 数列 $\{f(x_n)\}$ がコーシー列であることを示しているので, その極限 $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)$ が存在することがわかる.
次に, この極限値 $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)$ は $x_n\to a$ なる数列 $\{x_n\}$ の取り方によらずに一定であることを示す. すなわち, $x_n\to a, y_n\to a$ のとき, $\alpha:=\lim_{n\to+\infty}f(x_n), \beta:=\lim_{n\to+\infty}f(y_n)$ とおいて, $\alpha=\beta$ を示す. (このことが示せたら, 命題 8.1 より, 極限 $\lim_{x\to a}f(x)$ が存在することになる.)
• **$\alpha=\beta$ の証明:**
任意の $\epsilon>0$ に対して, コーシーの収束条件が成り立つ $\delta>0$ があるわけであるが, その $\delta>0$ に対して, ある N_1 があって, $n\ge N_1$ ならば $0<|x_n-a|<\delta$ となる. 同様に, ある

N_2 があって, $n \geq N_2$ ならば $0 < |y_n - a| < \delta$ となる. 従って, $N := \max(N_1, N_2)$ として, 任意の $n \geq N$ に対して

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$$

が成り立つことになる. 一方, ある N_3 があって $n \geq N_3$ に対して, $|f(x_n) - \alpha| < \epsilon$ となり, ある N_4 があって $n \geq N_4$ に対して, $|f(y_n) - \beta| < \epsilon$ となる. 以上より $N' := \max(N, N_3, N_4)$ として, $n \geq N'$ なる任意の n に対して

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - f(x_n) + |f(x_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - \beta| < 3\epsilon$$

を得る. よって, $|\alpha - \beta| < 3\epsilon$ $(\forall \epsilon > 0)$ となるので, $\alpha = \beta$ が結論される.

9 連続関数

10 連続関数

定義 10.1 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは, $f(x) \to f(a)$ $(x \to a)$ が成り立つことを言う. すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ があって $|x - a| < \delta$ ならば, $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ が成り立つことである.

次のことが成り立つことはほぼ以前に述べたことである.

命題 10.1 $f(x)$ が $x = a$ で連続であることは, $x_n \to a$ $(n \to +\infty)$ なるすべての数列 $\{x_n\}$ に対して, $f(x_n) \to f(a)$ $(n \to +\infty)$ が成り立つことである.

定義 10.2 $f(x)$ が区間 I 上で定義されていて, 任意の $a \in I$ に対して, $x = a$ で $f(x)$ が連続であるとき, $f(x)$ は区間 I 上で連続であるという. 連続関数であるとする

命題 10.2 $f(x), g(x)$ が区間 I 上で連続であるとき, $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ も連続関数となる. また $g(a) \neq 0$ のとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ も $x = a$ で連続となる.

例. $f(x) = x$ が $\mathbb{R}$ 上で連続となることがわかるので, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $g(x) = x^n$ も連続である. 従ってまた, 多項式も $\mathbb{R}$ 上で連続となる. さらに, 有理関数

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x), Q(x) \text{ は多項式}$$

は $Q(a) \neq 0$ となる a 以外で連続関数となる.
例. $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ は $\mathbb{R}$ 上で連続である.

$$\sin x - \sin a = \sin\left(\frac{1}{2}(x+a) + \frac{1}{2}(x-a)\right) - \sin\left(\frac{1}{2}(x+a) - \frac{1}{2}(x-a)\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{1}{2}(x+a)\right)\sin\left(\frac{1}{2}(x-a)\right)$$

より

$$|\sin x - \sin a| \leq 2|\sin(\frac{1}{2}(x-a))| \leq |x-a|$$

となるので, $\sin x \to \sin a$ $(x \to a)$ を得る．よって $f(x) = \sin x$ は連続関数であることがわかる．$g(x) = \cos x$ の連続性の証明も同様なので省略する．

定理 10.1 有界閉区間 $I := [a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は, 区間 I 上で最大値および最小値をもつ．すなわち, ある $c, d \in I$ が存在して次が成り立つ：

$$f(d) \leq f(x) \leq f(c) \ (\forall x \in I).$$

(証明).
　集合

$$A := \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

を考えよう（この集合のことを, f の値域という.)
step 1. この集合 A は上に有界な集合であることを示そう．もしそうでないなら, 任意の $M > 0$ に対して, $M < f(x)$ となるような $x \in [a,b]$ が存在することとなる．そこで, 特に $M = n$ $(n \in \mathbb{N})$ に対してその存在が保証される x のことを t_n と書くことにすれば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $n < f(t_n)$ となる $t_n \in [a,b]$ が存在することとなる．ここで, $\{t_n\}$ は有界列なので, B-W の定理から, ある部分列 $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ とある c があって, $t_{n_k} \to c$ $(k \to +\infty)$ が成り立つ．特に,

$$n_k < f(t_{n_k}) \quad (\forall k \geq 1)$$

が成り立っていることになる．$a \leq t_{n_k} \leq b$ なので, $a \leq c \leq b$, すなわち, $c \in I$ となる．このとき, $f(x)$ の連続性より $f(t_{n_k}) \to f(c)$ $(k \to +\infty)$ であり、$k \leq n_k \to +\infty$ であることから, 上記の不等式から矛盾がでる．
step 2. そこで, $M := \sup A$ と置く．(step 1 の結果より, M は有限値である.) さて, 上限の性質から, ある $y_n \in A$ で $y_n \to M$ $(n \to +\infty)$ となる数列 $\{y_n\}$ が存在することになる．(第 1 回の講義ノートも参照されたい.) $y_n \in A$ より, ある $x_n \in [a,b]$ があって, $y_n = f(x_n)$ と書ける．特に, $f(x_n) \to M$ $(n \to +\infty)$ が成り立つ．$\{x_n\}$ は有界列なので, B-W の定理から, ある部分列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ とある c が存在して $x_{n_k} \to c$ $(k \to +\infty)$ が成り立つ．$f(x)$ の連続性より, $f(x_{n_k}) \to f(c)$ $(k \to +\infty)$ となることから, $f(c) = M$ を得る．$a \leq x_{n_k} \leq b$ より $c \in [a,b]$ となる．このことは, $x = c \in [a,b]$ で $f(x)$ が最大値 M をとることを意味している．
最小値の存在についても同様の方針で, 集合 A が下に有界であることを示し, 下限 $m := \inf A$ を考えることで, $f(d) = m$ となる $d \in [a,b]$ の存在が同様に証明できる．

定理 10.2 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して, $f(a) < f(b)$ が成り立っているとする．このとき, $f(a) < u < f(b)$ なる任意の u に対して, $f(c) = u$ となる $c \in [a,b]$ が存在する．

(証明). (♣ 教科書の証明とは違う別証明を行ってみよう.)
$a_1 := a, b_1 := b, c_1 := \frac{1}{2}(a_1+b_1)$ と置く. このとき, 3 つの場合分けをして. (i) $f(c_1) = u$ ならば, 証明おわり.
(ii) $f(c_1) < u$ ならば, $a_2 := c_1, b_2 := b_1$ と置く. よって $f(a_2) < u < f(b_2)$ が成り立つ.
(iii) $f(c_1) > u$ ならば, $a_2 := a_1, b_2 := c_1$ と置くと, やはり $f(a_2) < u < f(b_2)$ が成り立つ.
このとき $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ が成り立つことに注意しておく. さらに, (ii) または (iii) のとき, $c_2 := \frac{1}{2}(a_2+b_2)$ として,　また先ほどの手順と同じく, $f(c_2) = u, f(c_2) < u, f(c_2) > u$ によって場合分けして, $f(c_2) < u$ ならば, $a_3 := c_2, b_3 := b_2$ とし, $f(c_2) > u$ ならば, $a_3 := a_2, b_3 := c_2$ とし, $c_3 := \frac{1}{2}(a_3+b_3)$ と置く. このとき, $b_3 - a_3 = \frac{1}{2}(b_2 - a_2) = (\frac{1}{2})^2(b_1 - a_1)$ となる. 以上の手順を繰り返し, $\{a_k\}, \{b_k\}, \{c_k\}$ を順次作っていく. 途中にある k で $f(c_k) = u$ となる場合は定理の証明がそこで終わることとなるが, そうでない場合は, すべての k に対して, $f(c_k) \neq u$ であって,

$$f(a_k) < u < f(b_k), \quad a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1,$$
$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = (\frac{1}{2})^{k-1}(b_1 - a_1) \to 0 \ (k \to +\infty)$$

が成り立つこととなる.　従って, 公理 II より, $a_k \leq c \leq b_k$ $(\forall k \geq 1)$ となる c がただ 1 つ存在することとなる. このとき, $a_k \to c, b_k \to c$ $(k \to +\infty)$ であって, $f(a_k) < u < f(b_k)$ で $k \to +\infty$ として, $f(c) \leq u \leq f(c)$ を得る. よって $f(c) = u$ を得る.
♣ 中間値の定理は当たり前に成り立つような定理でもあるが, 時として, 直感的には説明しずらい様な主張を導くこともできる. 次の例など, いかがであろうか？

例題 10.1 *$f(x)$ は区間 $I = [0,1]$ 上で連続であって, $f(0) = f(1)$ を満たすとする. このとき,*

$$f(x) = f(y), \ |x-y| = \frac{1}{2}$$

となる $x, y \in I$ が存在することを示せ.

(解答). $g(x) := f(x+\frac{1}{2}) - f(x), \ x \in [0, \frac{1}{2}]$ とおくと, $g(x)$ は区間 $J = [0, \frac{1}{2}]$ 上の連続関数となる. また, 仮定から,

$$g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0), \quad g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2})$$

となる. よって, $g(0) = -g(\frac{1}{2})$. もし $f(0) = f(\frac{1}{2})$ が成り立つときは, $x = 0, y = \frac{1}{2}$ として主張が成り立つ. もし $f(0) \neq f(\frac{1}{2})$ のときは, $g(0) = -g(\frac{1}{2})$ より, $g(0) > 0 > g(\frac{1}{2})$ または $g(0) < 0 < g(\frac{1}{2})$ が成り立つこととなる. このとき, 中間値の定理より, $g(x) = 0$ となる $x \in [0, \frac{1}{2}]$ が存在する. このことは, $f(x+\frac{1}{2}) - f(x) = 0$ となるので, $y = x + \frac{1}{2}$ として, 主張がなりたつこととなる. 以上より, いずれの場合も, 主張が成り立つこととなる.

定理 10.3 (連続関数の合成関数) *$y = f(x)$ が $x = a$ で連続で, $b = f(a)$ とし, $z = g(y)$ が $y = b$ で連続であるとき, 合成関数 $h(x) = g(f(x))$ は $x = a$ で連続となる.*

(証明). $x_n \to a (n \to +\infty)$ として, $h(x_n) \to h(a)$ $(n \to +\infty)$ を示せばよい. 今, 仮定より, $f(x_n) \to f(a) = b$ $(n \to +\infty)$ となり, よって, さらに, $g(f(x_n)) \to g(b) = g(f(a)) = h(a)$ $(n \to +\infty)$ となるので, $h(x_n) \to h(a)$ $(n \to +\infty)$ が示された.

10.1 単調関数の逆関数, 逆三角関数

定義 10.3 $f(x)$ が区間 I 上で単調増加関数であるとは, $x, y \in I$ で $x < y$ ならば, $f(x) < f(y)$ が成り立つことを言う．同様に, $f(x)$ が区間 I 上で単調減少関数であるとは, $x, y \in I$ で $x < y$ ならば, $f(x) > f(y)$ が成り立つことを言う．区間 I 上で単調増加関数であるか, 単調減少関数のいずれかであるとき, 単に, $f(x)$ は区間 I 上の単調関数であるという.

10.2 単調連続関数の逆関数

今, $y = f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ 上で単調増加な連続関数 (以下, 単に, 単調増加連続関数という) としよう．このとき, $m = f(a), M = f(b)$ とおくと, m および M は, それぞれ $f(x)$ の I 上での最小値, 最大値となる．　さらに $f(x)$ が区間 I 上で連続であることより, 中間値の定理から, $m < y < M$ なる任意の y に対して, $f(x) = y$ となる $x \in (a, b)$ が存在することがわかり, 単調増加であるので, このような x はただ 1 つに定まることとなる．$y = m$ に対しても, $f(x) = y$ となる x は $x = a$ がただ 1 つ定まり, $y = M$ に対しても, $f(x) = y$ となる x は $x = b$ がただ 1 つ定まる．このようにして, $m \leq y \leq M$ なる y に対して, $f(x) = y$ を満たす $x \in I$ がただ 1 つ定まるので, この y から x への対応を $x = f^{-1}(y)$ と表し, $y = f(x)$ の逆関数という．この逆関数 $x = f^{-1}(y), m \leq y \leq M$ は その定義から区間 $[m, M]$ 上で単調増加関数となる．さらに次が成り立つ.

定理 10.4 閉区間 $I = [a, b]$ 上の単調増加連続関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y), y \in [m, M]$ は区間 $[m, M]$ 上の単調増加連続関数となる．（ここで, $m = f(a), M = f(b)$ である．)
同様に, 閉区間 $I = [a, b]$ 上の単調減少連続関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y), y \in [m, M]$ は区間 $[m, M]$ 上の単調減少連続関数となる．（ただし, この場合は, $m = f(b), M = f(a)$ である．)

(証明)　(数列を用いた連続性に基づいて, 教科書と少し違う証明を与えてみる.)
$a \leq c \leq b, d = f(c)$ とする．$c = f^{-1}(d)$ であるが, $f^{-1}(y)$ が $y = d$ で連続であることを示す．それには, $y_n \to d$ $(n \to +\infty)$ として $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(d) = c$ $(n \to +\infty)$ なることを示せばよい. $x_n = f^{-1}(y_n)$ とおくとき, $x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ を示せばいい.
背理法で示そう．もし $x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ を否定すると, ある $\epsilon_0 > 0$ があって, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, $n \geq N$ であって $|x_n - c| \geq \epsilon_0$ となるような n が存在することとになる.
そこで任意の $k \in \mathbb{N}$ をとって, $N = k$ とすることで, ある $n_k \geq k$ で $|x_{n_k} - c| \geq \epsilon_0$ となるような部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ が存在することとなる．このとき, $x_{n_k} \leq c - \epsilon_0$ もしくは $x_{n_k} \geq c + \epsilon_0$ のどちらかが成り立つことになる．さらに $f(x)$ が単調増加であるので, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $f(x_{n_k}) \leq f(c - \epsilon_0)$ または, $f(x_{n_k}) \geq f(c + \epsilon_0)$ が成りたつこととなる．ここで,

$$\epsilon := \frac{1}{2} \min\Big(f(c + \epsilon_0) - f(c), f(c) - f(c - \epsilon_0) \Big) > 0$$

とおくとき, $f(x_n) = y_n \to d = f(c)$ $(n \to +\infty)$ であったので, ある N があって, $n \geq N$ なる任意の n に対して,

$$|f(x_n) - f(c)| < \epsilon$$

が成り立つ. よってある K があって $k \geq K$ ならば $n_k \geq N$ となるので,

$$f(c) - \epsilon < f(x_{n_k}) < f(c) + \epsilon \ (\forall k \geq K)$$

が成り立つこととなる.
そこで, $f(x_{n_k}) \leq f(c - \epsilon_0)$ なる場合には, $\epsilon \leq \frac{1}{2}(f(c) - f(c - \epsilon_0))$ より

$$f(c) - \frac{1}{2}(f(c) - f(c - \epsilon_0)) \leq f(c) - \epsilon < f(x_{n_k}) \leq f(c - \epsilon_0)$$

から, $f(c) < f(c - \epsilon_0)$ が導かれてしまい矛盾. また, $f(x_{n_k}) \geq f(c + \epsilon_0)$ なる場合には, $\epsilon \leq \frac{1}{2}(f(c + \epsilon_0) - f(c))$ より

$$f(c + \epsilon_0) \leq f(x_{n_k}) \leq f(c) + \epsilon \leq f(c) + \frac{1}{2}(f(c + \epsilon_0) - f(c))$$

から, $f(c + \epsilon_0) < f(c)$ が導かれてしまい, やはり矛盾. 以上より, $x_n \to c$ $(n \to +\infty)$ となることが示された.

10.3 指数関数と対数関数

まず, 自然数 N に対して, $y = x^n$ $(x \geq 0)$ の逆関数として, $x = y^{\frac{1}{n}}$ $(y \geq 0)$ が定まる. 特に, 改めて関数 $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ $(x \geq 0)$ は連続関数となることがわかる.
$a > 1$ とする. このとき, $x \in \mathbb{Q}$ に対して, a^x は, $x > 0, x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$ のとき, $a^x = (a^{\frac{1}{p}})^q$ と定義され, $x < 0, x \in \mathbb{Q}$ のときは, $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ として定義される.

定義 10.4 (指数関数の厳密な定義) さて, $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ に対して, 有理数の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ で $\{x_n\}$ は単調増加かつ $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ となるものが存在するが, $\{a^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であり, また $x < x_0$ なる $x_0 \in \mathbb{Q}$ を *1* つとることで $x_n \leq x_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ なので $a^{x_n} \leq a^{x_0}$ が成り立つ. つまり, $\{a^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加かつ上に有界な数列となる. よってその極限が存在するので、

$$a^x := \lim_{n \to +\infty} a^{x_n}$$

と定める.

この極限は, $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ で単調増加かつ $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ なる $\{x_n\}$ の取り方によらずに定まることに注意しよう. 2 つの単調増加列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{Q}$ で $x_n \to x, y_n \to x$ $(n \to +\infty)$ なる数列に対して $\alpha := \lim_{n \to +\infty} a^{x_n}$, $\beta := \lim_{n \to +\infty} a^{y_n}$ とするとき, $\alpha = \beta$ となることを確かめよう. 任意の $n \in \mathbb{N}$ を固定するとき, ある M が存在して $m \geq M$ に対して, $x_n \leq y_m$ が成り立つ. よって $a^{x_n} \leq a^{y_m}$ $(\forall m \geq M)$ となる. $m \to +\infty$ として, $a^{x_n} \leq \beta$ を得る. こ

こで $n \to +\infty$ として, $\alpha \leq \beta$ を得る. $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の役割を交換することで, $\beta \leq \alpha$ が成り立つことにもなるので, $\alpha = \beta$ を得る.
♣ $x \in \mathbb{Q}$ に対しても, $\{x_n\} \subset \mathbb{Q}$ で単調増加かつ $x_n \to x$ $(n \to +\infty)$ なる数列にたいして, $a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n}$ が成り立つことが, $a^{\frac{1}{m}} \to 1$ $(m \to +\infty)$ からわかる. 特に, $x_n = x \in \mathbb{Q}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ なる数列に対して $a^{x_n} = a^x$ なので, 最初の述べた有理数 x に対する a^x の定義と一致する.

命題 10.3 $a > 1$ とする.
(1) このとき, 関数 $y = a^x$ は単調増加連続関数となる.
(2) また, 次の指数法則が成り立つ:

$$a^x a^t = a^{x+t} \ (x, t \in \mathbb{R}),$$

$$(a^x)^t = a^{xt} \ (x, t \in \mathbb{R}).$$

step 1. a^x **が単調増加関数であることを示す**. $t, u \in \mathbb{Q}$ で $t < u$ なるとき, $a^t < a^u$ となることは既知として証明を与える. いま, $x < y, x, y \in \mathbb{R}$ とするとき, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{Q}$ で $x_n \to x, y_n \to y$ となる単調増加列を 1 つとるとき, ある N が存在して $n \geq N$ に対して $x_n \leq x < y_N \leq y_n \leq y$ となるので, $a^{x_n} < a^{y_N} \leq a^{y_n}$ $(\forall n \geq N)$. よって $n \to +\infty$ として, $a^x \leq a^{y_N} \leq a^y$ を得る. よって $a^x < a^y$ が成り立つ.
step 2. $a^x a^t = a^{x+t}$ $(x, t \in \mathbb{R})$ **を示す**. これも $x, t \in \mathbb{Q}$ ならば成り立つことは既知として証明を与える. $\{x_n\}, \{t_n\} \subset \mathbb{Q}$ で $x_n \to x, t_n \to t$ となる単調増加列を 1 つとるとき, $x_n + t_n \in \mathbb{Q}$ で, $x_n + t_n \to x + t$ $(n \to +\infty)$ であるので, 定義より,

$$a^{x_n} \to a^x, \ a^{t_n} \to a^t, \ a^{x_n+t_n} \to a^{x+t} \ (n \to ; \infty)$$

が成り立つ. 従って $a^{x_n} a^{t_n} = a^{x_n+t_n}$ なので, この式で $n \to +\infty$ として, $a^x a^t = a^{x+t}$ を得る.
step 3. a^x **が連続であることを示そう**. $x \to t$ のとき, $a^x \to a^t$ を示せばよいが, $a^x = a^{x-t} a^t$ なので, $y \to 0$ のときに $a^y \to 1$ となることを示せればよいこととなる. 背理法で示そう. そうでないなら, ある $\epsilon_0 > 0$ があって, 任意の $\delta > 0$ に対して $|y| < \delta$ であって $|a^y - 1| \geq \epsilon_0$ となる y が存在することになる. δ として, $\delta = \frac{1}{m}$ $(m \in \mathbb{N})$ として, $|y_m| < \frac{1}{m}$ かつ $|a^{y_m} - 1| \geq \epsilon_0$ となる数列 $\{y_m\}$ が存在することとなる. このとき

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{-\frac{1}{m}} < a^{y_m} < a^{\frac{1}{m}} \ (\forall m \in \mathbb{N})$$

となるが, $a^{\frac{1}{m}} \to 1$ $(m \to +\infty)$ であるので, $a^{y_m} \to 1 (m \to +\infty)$ となってしまうが, これより $0 \geq \epsilon_0 > 0$ となって矛盾.
step 4. 最後に, $(a^x)^t = a^{xt}$ $(x, t \in \mathbb{R})$ を示そう. まず $t \in \mathbb{Q}$ のとき, $(a^x)^t = a^{xt}$ $(x \in \mathbb{R})$ を示す. まず, $t = \frac{1}{n}$ とする. $(a^{\frac{x}{n}})^n = a^x$ なので, $a^{\frac{x}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}}$ が成り立つ. 次に, $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ のとき,

$$a^{x\frac{m}{n}} = (a^{\frac{x}{n}})^m = a^{\frac{x}{n}} \times \cdots \times a^{\frac{x}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}} \times \cdots \times (a^x)^{\frac{1}{n}} = (a^x)^{\frac{m}{n}}$$

となるので正しい．これより、$(a^x)^t = a^{xt}$ $(\forall t \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R})$ となることがわかる．今, $t \in \mathbb{R}$ に対して, $t_n \in \mathbb{Q}$ で $t_n \to t$ $(n \to +\infty)$ となる単調増加列 $\{t_n\}$ を考えれば,

$$(a^x)^{t_n} = a^{xt_n}$$

において $n \to +\infty$ とすれば, $f(x) = a^x$ の連続性より

$$(a^x)^t = a^{xt}$$

を得る．

注意 10.1 $0 < a < 1$ のときは, $a = \frac{1}{b}$ とおくと, $b > 1$ なので

$$a^x = (\frac{1}{b})^x = \frac{1}{b^x}$$

と定める．このとき a^x は単調減少連続関数となる．また $a = 1$ のとき, $a^x = 1^x = 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ と定める．

$a > 0$ に対して, $y = a^x$ の逆関数を $x = \log_a y$ $(y > 0)$ と書いて, 底を a とする対数関数という． 特に, $a = e$(ネイピアの数）のとき, $y = e^x$ の逆関数を $x = \log_e y = \log y$ と書いて, 自然対数と呼ぶ.

命題 10.4 次が成り立つ．

(1)

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad (\forall a, b > 0).$$

(2)

$$a \log b = \log(b^a) \quad (\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0).$$

特に,

$$b^a = e^{a \log b}$$

が成り立つ．

(3) $a \in \mathbb{R}$ を定数として, 関数 $y = x^a$ $(x > 0)$ は連続関数となる．

(証明）. (1) $x = \log a, y = \log b$ とおくとき, $e^x = a, e^y = b$ である．よって指数法則から $ab = e^x e^y = e^{x+y}$ となる．これから $x + y = \log(ab)$ となる．

(2) 指数法則より,

$$e^{a \log b} = (e^{\log b})^a = b^a$$

となるので, $a \log b = \log(b^a)$ となる．

(3) $y = x^a = e^{a \log x}$ なので, 連続関数の合成関数として, 連続関数であることがわかる．

10.4　逆三角関数

逆三角関数については, 定義域を適当に制限することで, 単調関数となる区間で, その逆関数を考えることができる. 制限する区間として, 以下の標準的なものを考える.

$y = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2})$ は単調増加連続関数なので, その逆関数を $x = \sin^{-1} y$ $(-1 \le y \le 1)$ と書いて, アークサイン関数と呼ぶ. $x = \mathrm{Arcsin}\ y$ とも書く.

注意 10.2 この記号は誤解を招きやすく, アークサイン　$\sin^{-1} y$ は, $\frac{1}{\sin y}$ ではないので注意されたい！

$y = \cos x$ $(0 \le x \le \pi)$ は単調減少連続関数なので, その逆関数を $x = \cos^{-1} y$ $(-1 \le y \le 1)$ と書いて, アークコサイン関数と呼ぶ. $x = \mathrm{Arccos}\ y$ とも書く. $y = \tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ は単調増加連続関数なので, その逆関数を $x = \tan^{-1} y$ $(-\infty < y < +\infty)$ と書いて, アークタンジェント関数と呼ぶ. $x = \mathrm{Arctan}\ y$ とも書く.

• 逆三角関数はのちに積分計算においても, また様々な応用問題においても重要な役割を果たすこととなる.

10.5　一様連続性

定義 10.5 関数 $f(x)$ が区間 I 上で一様連続であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - t| < \delta$ なる任意の $x, t \in I$ に対して $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ が成り立つことという.

♣ $f(x)$ が区間 I 上で一様連続であれば, 各点 $a \in I$ に対して, $f(x)$ は $x = a$ で連続となる. 逆の命題は一般に正しくない. つまり, 区間 I 上の各点で連続な関数であっても, 必ずしも, 区間 I 上で一様連続とは限らない.

例.　$I = (0, 1)$ とする. $f(x) = \frac{1}{x}$ は, 区間 I 上で連続である. しかしながら, 区間 I 上で一様連続ではない. 例えば, いかなる $\delta > 0$ に対しても $\frac{1}{n} < \delta$ なるよう n を大きくとるとき, $x_n = \frac{1}{n}, t_n = \frac{1}{n+1}$ とすれば $|x_n - t_n| = \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{1}{n} < \delta$ となるが, $|f(x_n) - f(t_n)| = |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{t_n}| = 1$ が成り立つ. このことは, $f(x) = \frac{1}{x}$ が区間 $I = (0, 1)$ 上で一様連続でないことを示している.

しかしながら, 次のことは成り立つ.

定理 10.5 有界閉区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は, 区間 I 上で一様連続である.

(証明). 背理法で示す. 主張を否定すると, ある $\epsilon_0 > 0$ があって, 任意の $\delta > 0$ に対して, $|x - t| < \delta, x, t \in I$ であって, $|f(x) - f(t)| \ge \epsilon_0$ となる x, t が存在することとなる. そこで δ として, $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ とすることで, $|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$, $x_n, t_n \in I$ かつ

$$|f(x_n) - f(t_n)| \ge \epsilon_0$$

となるような数列 $\{x_n\}, \{t_n\}$ が存在することとなる. このとき, $\{x_n\} \subset I = [a, b]$ は有界列なので, B-W の定理からある部分列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ とある $x \in [a, b]$ があって, $x_{n_k} - x| \to 0$ $(k \to +\infty)$ が成り立つ. このとき

$$|t_{n_k} - x| \leq |t_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x| \to 0 \ (k \to +\infty)$$

となる. ところが $f(x)$ は連続なので

$$|f(x_{n_k}) - f(t_{n_k})| \geq \epsilon_0$$

において, $f(x_{n_k}) \to f(x)$, $f(t_{n_k}) \to f(x)$ $(k \to +\infty)$ なので $0 \geq \epsilon_0 > 0$ となり矛盾.

11　導関数

12　導関数

12.1　微分可能性, 合成関数および逆関数の微分法

定義 12.1 $y = f(x)$ が $x = a$ の近くで定義されていて, 極限

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \right)$$

が存在するとき, $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるといい, その極限値を $f'(a)$ で表す. すなわち,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

であり, これを $x = a$ での微分係数という. このときまた, 点 $(a, f(a))$ での $y = f(x)$ の接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

で定められる. つまり, $f'(a)$ は接線の傾きを表す.

• $x = a$ での微分可能性は, 次のように表現しなおしておくと便利である.

定理 12.1 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるための必要十分条件は, ある定数 A と, $x = a$ で連続で $B(a) = 0$ となるある関数 $B(x)$ が存在して, $x = a$ の近くで次を満たすことである.

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + (x - a)B(x).$$

(このとき, 自動的に, $A = f'(a)$ となる.)

(証明). まず, $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能としよう. このとき, 関数 $B(x)$ を $B(a)=0$ で, $x\neq a$ に対しては,

$$B(x):=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)$$

で定義する. このとき, この定義から

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+B(x)(x-a)$$

が $x=a$ のときも含めて成立することがわかる. また微分可能性の定義から,

$$|B(x)|=\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|\to 0=B(a)\ (x\to a)$$

となるので, $B(x)$ は $x=a$ で連続な関数であることもわかる.
逆に, 上記のような A と連続関数 $B(x)$ が存在すれば,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=A+B(x)\ (x\neq a)$$

であり, $|B(x)|\to 0\ (x\to a)$ より

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-A\right|=|B(x)|\to 0\ (x\to a)$$

となる. よって $f(x)$ は $x=a$ で微分可能となり, $A=f'(a)$ となる.
• 以後, 微分可能性については, 定義と上記の表現を自由に用いる.

系 12.1 $y=f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば, $x=a$ で連続である.

微分可能性より, ある連続関数 $B(x)$ で $B(a)=0$ なるものを用いて

$$f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)+(x-a)B(x)$$

と書ける. これより,

$$|f(x)-f(a)|\leq|f'(a)||x-a|+|x-a||B(x)|\to 0\ (x\to a)$$

を得る. よって示された.

命題 12.1 $f(x)$ および $g(x)$ がともに $x=a$ で微分可能とする.
(1) $f(x)+g(x)$ や $f(x)g(x)$ も $x=a$ で微分可能で次が成り立つ.

$$(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a),\quad (fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

(2) さらに, $g(a)\neq 0$ であるとき, $\frac{f(x)}{g(x)}$ も $x=a$ で微分可能となり, 次が成り立つ.

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

証明は, 省略する. (高校でも既知であろうし, 教科書を参照されたい.)

定義 12.2 開区間 $I := (c, d)$ 上の各点 a で微分可能であるとき, $f(x)$ は区間 I 上で微分可能な関数であるという. また, $f(x)$ が閉区間 $J := [c, d]$ で定義されていて, $x = c$ で, 右側極限 ($x > c$ で $x \to c$ としたときの極限) :

$$\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

が存在するとき, $x = c$ で右から微分可能であるといい, その極限値を右微分係数という. 同様に, $x = d$ での左微分可能性および左微分係数も定義される. 閉区間 $J = [c, d]$ で $f(x)$ が微分可能であるということきは, $x = c$ では右微分可能であり, $x = d$ では左微分可能であることをいう.
$y = f(x)$ が区間 I 上の各点で微分可能であるとき, $x \in I$ に対する関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数といい, $\frac{df}{dx}$, あるいは $\frac{df(x)}{dx}$ とも書く.

例題 12.1

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

また, $\cos x \neq 0$ なる x において

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

例題 12.2 $a > 0$ とする. $y = a^x$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であり, 次が成り立つ.

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log a.$$

特に, $a = e$ として, $e^x)' = e^x$ が成り立つ.

(証明) **step 1.** まず, 次を示す:

$$\frac{a^h - 1}{h} \to \log a \ (h \to 0).$$

$a = 1$ のときは明らかなので, $a \neq 1$ として示す. このとき, $a^h = 1 + t$ とかけ, $a > 1$ のときは, $t > 0$ であり, $0 < a < 1$ のときは, $t < 0$ となる. また, $h \to 0$ のとき, $t \to 0$ が成り立つ. また, $a^h = 1 + t$ の対数をとって, $h \log a = \log(1 + t)$ となり,

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{t}{\log(1 + t)} \times \log a = \frac{\log a}{\frac{1}{t} \log(1 + t)}$$
$$= \frac{\log a}{\log(1 + t)^{\frac{1}{t}}} \to \frac{\log a}{\log e} = \log a \ (h \to 0)$$

を得る.
step 2. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, 指数法則を用いて,

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \left(\frac{a^h - 1}{h} \right) \to a^x \log a \ (h \to 0)$$

を得る.

命題 12.2 (合成関数の微分法) $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能であり, $b = f(a)$ とし, $z = g(y)$ が $y = b$ で微分可能ならば, 合成関数 $z = g(f(x)$ は $x = a$ で微分可能となり, 次が成り立つ:

$$z'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

(証明). 仮定より, $B(a) = 0$ で $x = a$ で連続な $B(x)$ と $C(b) = 0$ で $y = b$ で連続な $C(x)$ が存在して, $x = a$ の近くで,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)B(x) = b + f'(a)(x-a) + (x-a)B(x)$$

と書け, $y = b$ の近くで

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + (y-b)C(y)$$

と書ける. よって, $x = a$ の近くで,

$$z = g(f(x)) = g(b) + g'(b)(f(x)-b) + (f(x)-b)C(f(x))$$

$$= g(f(a)) + g'(f(a))\Big[f'(a)(x-a) + (x-a)B(x)\Big] + \Big[f'(a)(x-a) + (x-a)B(x)\Big]C(f(x))$$

$$= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + (x-a)D(x)$$

と書ける. ただし, ここで $D(x)$ は

$$D(x) := g'(f(a))B(x) + \Big[f'(a) + B(x)\Big]C(f(x))$$

である. このとき, $x \to a$ で $f(x) \to f(a) = b$ なので, $B(x) \to 0, C(f(x)) \to C(b) = 0$ となることから,

$$D(x) \to 0 \ (x \to a)$$

が成り立つことになる. このことは, $z(x) = (g \circ f)(x)$ が $x = a$ で微分可能であり,

$$z'(a) = (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

となることを示している.

命題 12.3 (逆関数の微分法) $y = f(x)$ が開区間 I 上で単調関数であり, かつ微分可能であるとする. このとき, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ は, $f'(x) \neq 0$ となる $y(= f(x))$ で微分可能となり, 次が成り立つ.

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

(証明). 今, $f'(a) \neq 0$ で, $b = f(a)$ とする. このとき, $x = f^{-1}(y)$ は $y = b$ で微分可能となり,

$$\frac{d(f^{-1})}{dy}(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

となることを示そう.
仮定から, $x = a$ で連続な $B(x)$ があって, $x = a$ の近くで

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)B(x)$$

が成り立つ. よって, $x = f^{-1}(y)$ として,

$$y - b = f'(a)(x-a) + B(x)(x-a)$$

と書き換えられ, さらに $f'(a) \neq 0$ と $B(x) \to 0$ $(x \to a)$ より,

$$x - a = \frac{y-b}{f'(a) + B(x)}$$

となる. よって

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{x-a}{y-b} = \frac{1}{f'(a) + B(x)}$$

であり, $y \to b$ で $f^{-1}(y) = x \to f^{-1}(b) = a$ なので $B(x) \to 0$ となることから,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \to \frac{1}{f'(a)} \ (y \to b)$$

が成り立つ. つまり, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ を得る.

例題 12.3 $a > 0, a \neq 1$ とする. このとき, $y = a^x$ は単調関数でかつ微分可能である. よって, その逆関数 $x = \log_a y$ $(y > 0)$ は微分可能で

$$\frac{d}{dy}(\log_a y) = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x(\log a)} = \frac{1}{y \log a}$$

となる. 改めて, この対数関数の変数を x で書くと,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x(\log a)} \ (x > 0)$$

を得る. 特に, $a = e$ として, 次を得る.

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \ (x > 0).$$

また, $x < 0$ のとき, $\log|x| = \log(-x)$ なので, 合成関数の微分法も用いて

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{(-x)} \times (-1) = \frac{1}{x} \ (x < 0)$$

を得る. これらをまとめると, 次を得る.

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \ (x \neq 0).$$

例題 12.4 $a \in \mathbb{R}$ を定数として, $y = x^a$ $(x > 0)$ を考えると,

$$x^a = e^{a \log x}$$

であるので, 合成関数の微分法より,

$$(x^a)' = e^{a \log x} \times (a \log x)' = x^a \times \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

を得る. $a = n \in \ltimes$ のときの公式の一般化となっていることに注意されたい.

♣ $(a^x)' = a^x \log a$ と混同しないよう注意すること. これも $a^x = e^{x(\log a)}$ と書いて, 合成関数の微分法を用いると

$$(a^x)' = e^{x \log a} \times (\log a) = a^x (\log a)$$

となるわけなので, このようにいつでも導けるようにしておけば、間違えないであろう. (もちろん, ここで用いた $(e^x)' = e^x$ は, $(a^x)' = a^x(\log a)$ という公式から導いたものなので, 上記の計算は間違えないための検算的なものである！)

12.2 逆三角関数の微分法

$y = \sin^{-1} x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ に対して, $x = \sin y$ $(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$ であるが, $-1 < x < 1$ に対して, 微分可能となり次が成り立つ.

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{(\frac{dx}{dy})} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ (-1 < x < 1).$$

同様にして, $y = \cos^{-1} x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ に対して, $x = \cos y$ $(0 \leq y \leq \pi)$ であり, $-1 < x < 1$ のときに微分可能となり次が成り立つ.

$$(\cos^{-1} x)' = \frac{1}{(\frac{dx}{dy})} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \ (-1 < x < 1).$$

また, $y = \tan^{-1} x$ $(-\infty < x, +\infty)$ に対して, $x = \tan y$ $(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$ であり, $-\infty < x < +\infty$ のときに微分可能となり次が成り立つ.

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{(\frac{dx}{dy})} = \frac{1}{(\frac{1}{\cos^2 y})} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \ (-\infty < x < +\infty).$$

♣ 特に $\sin^{-1} x$ と $\tan^{-1} x$ のこの導関数は積分計算や応用において重要なので頭に叩き込んでおくべきである！

12.3　双曲線関数とその逆関数の導関数

双曲線関数は, 次で定義される.

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ (-\infty < x < +\infty)$$

は, ハイパボリックサインと呼ばれ, 単調増加関数となる.

注意 12.1 ♣ 次の間違いをしないように注意すること.

$$\sinh x \neq \sin(hx).$$

また,

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ (-\infty < x < +\infty)$$

は, ハイパボリックコサインと呼ばれ, $x \geq 0$ では単調増加関数となる. また,

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}}\ (-\infty < x < +\infty)$$

は, ハイパボリックタンジェントと呼ばれ, 単調増加関数となる. これらは, 次の公式を満たすことがわかる.

$$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

さらに, 次を満たす (演習問題).

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

• さて, $y = \sinh x\ (-\infty < x < +\infty)$ は単調増加関数であることがわかるので (演習問題）, その逆関数 $x = \sinh^{-1} y\ (-\infty < y < +\infty)$ を考えることができる. 実際, $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ より, $e^x - e^{-x} = 2y$. 両辺に e^x をかけて

$$e^x - 2ye^x = 1$$

を得る. 平方完成して $(e^x - y)^2 = 1 + y^2$ となるので, $e^x - y = \pm\sqrt{1+y^2}$ となるが, $e^x > 0$ より

$$e^x = y + \sqrt{1+y^2}$$

を得る. よって

$$x = \sinh^{-1} y = \log(y + \sqrt{1+y^2}),\ (-\infty < y < +\infty)$$

となる. これを使って $\frac{d}{dy}(\sinh^{-1} y)$ を計算してもいいし, 逆関数の微分法を用いて

$$\frac{d}{dy}(\sinh^{-1} y) = \frac{1}{(\sinh x)'} = \frac{1}{\cosh x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

を得る. 改めて, 変数 x を用いて, 次を得る.

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ (-\infty < x < +\infty).$$

注意 12.2 先ほども言ったように, $\sinh^{-1} x$ の具体的表示から, 合成関数の微分法で

$$(\sinh^{-1} x)' = (\log(x+\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \times \left(1 + \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2x)\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

と計算してもよい.

同様に, $y = \cosh x$ の $x \geq 0$ の部分は単調増加関数なのでその逆関数 $x = \cosh^{-1} y$ $(y \geq 1)$ に対して

$$\frac{d}{dy}(\cosh^{-1} y) = \frac{1}{(\cosh x)'} = \frac{1}{\sinh x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 \mathrm{x} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \ (y > 1)$$

となる. ちなみに, $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),\ x \geq 0$ を解いて

$$x = \cosh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2-1}),\ y \geq 1$$

と書けることがわかる. (各自, チェックして見てほしい.)
また $y = \tanh x$ の逆関数 $x = \tanh^{-1} y$ $(-1 < y < 1)$ に対して,

$$\tanh^{-1} y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right),\ -1 < y < 1,$$

$$\frac{d}{dy}(\tanh^{-1} y) = \frac{1}{1-y^2},\ -1 < y < 1$$

となることもわかる. (各自, チェックしてみてほしい.)

12.4　高次の導関数

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ がさらに微分可能となるとき, その導関数

$$\frac{d}{dx}(f'(x))$$

を $f''(x)$ あるいは $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$ で表し, 第 2 次導関数という．このとき, $f(x)$ は 2 回微分可能であるという．さらに微分可能であるとき,

$$\frac{d}{dx}\left(f''(x)\right) = f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3}(x)$$

を第 3 次導関数という．一般に第 n 次導関数を

$$y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

で表す．(右の肩にダッシュの記号を n 回書く代わりに, (n) で表現するのである.)

♣ $\frac{d}{dx}(f(x))$ と書いても, $\frac{df}{dx}(x)$ と書いても, $\frac{df(x)}{dx}$ と書いても同じであるが, 関数 $y = f(x)$ と $z = g(y)$ の合成関数 $z(x) = g(f(x))$ に対しては, 記号に少し注意をする必要がある.

$$\frac{dz}{dx}(x) = \frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x)$$

であり, もう一度微分するときは, 合成関数の微分法と積の微分法を用いて

$$\frac{d^2 z}{dx^2}(x) = \frac{d^2 g}{dy^2}(f(x))\frac{df}{dx}(x)\frac{df}{dx}(x) + \frac{dg}{dy}(f(x))\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

$$= \frac{d^2 g}{dy^2}(f(x))\left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2 + \frac{dg}{dy}(f(x))\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

となる.

13　平均値の定理とテイラーの定理

14　平均値の定理, テイラーの定理

14.1　ロルの定理, 平均値の定理

定理 14.1 (ロルの定理) $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で, (a,b) で微分可能であって, $f(a) = f(b) = 0$ を満たすとする．このとき $f'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在する.

(証明). もし, $f(x)$ が定数関数ならば, $f'(x) = 0$ $(\forall x \in (a, b))$ が成り立つので定理の主張は正しい.
そこで $f(x)$ が定数関数でない場合に示せばよい. この場合, $f(z) > f(a)(= f(b))$ なる $z \in (a, b)$ があるか, $f(w) < f(a)(= f(b))$ なる $w \in (a, b)$ があるかのどちらかが成り立つ.
また最大値・最小値の定理より, 最大値および最小値が存在する. よって最初の場合は, 最大値 M は $M > f(a)$ であり $M = f(c)$ となる $c \in (a, b)$ が存在する. このとき, $f'(c) = 0$ が成り立つことになる. なぜなら,$x > c$ なる $x \in [a, b]$ に対して

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

が成り立つので, $x > c$ で $x \to c$ とすることで, $f'(c) \leq 0$ を得る. 一方, $x < c$ なる $x \in [a, b]$ に対して

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

が成り立つので, $x < c$ で $x \to c$ とすることで, $f'(c) \geq 0$ を得る. 以上より, $f'(c) = 0$ を得る. もう 1 つの場合も, 同様の議論により, $f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ の存在が示される.

定理 14.2 (平均値の定理) $f(x)$ が $[a, b]$ で連続で, (a, b) で微分可能であるとする. このとき,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる $c \in (a.b)$ が存在する.

(証明).

$$A := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

とおく. $F(x) := f(x) - Ax$ を考えると, $F(x)$ も $[a, b]$ で連続で, (a, b) で微分可能であり, A の定義から $F(a) = f(a) - Aa = f(b) - Ab = F(b)$ となるので, $F(x)$ はロルの定理の仮定をすべて満たすことになるので, $F'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在することとなる. ここで $F'(c) = 0$ は, $f'(c) - A = 0$ となるので,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる $c \in (a, b)$ の存在が示された.
- 平均値の定理から以下の基本的な性質が導かれることとなる.

定理 14.3 $f'(x) = 0$ $(\forall x \in (a, b))$ ならば, $f(x)$ は区間 (a, b) 上で定数関数である.

(証明). $a < x < t < b$ である任意の x, t に対して, 平均値の定理を区間 $[x, t]$ 上で適用して,

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(c)$$

なる $c \in (x, t)$ が存在するが, 仮定より $f'(c) = 0$ なので, $f(x) = f(t)$ を得る. x, t の取り方の任意性より, $f(x)$ は (a, b) 上で定数関数であることになる.

定理 14.4 $f'(x) > 0$ $(\forall x \in (a,b))$ とする．このとき，$f(x)$ は区間 (a,b) 上で単調増加関数となる．同様に，$f'(x) < 0$ $(\forall x \in (a,b))$ ならば，$f(x)$ は区間 (a,b) 上で単調減少関数となる．

(証明)．$a < x_1 < x_2 < b$ なる任意の x_1, x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ となることを示せばよいが, 平均値の定理より

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

となる $c \in (x_1, x_2)$ が存在するが, 仮定から $f'(c) > 0$ となるので $f(x_2) > f(x_1)$ を得る．
後半の主張も同様に示すことが出来る．
♣ これらは, 不等式の証明などにも役に立つ．

例題 14.1 $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ $(x > 0)$ が成り立つ．

(証明)．$f(x) = \sqrt{1+x}$ と置く．$x > -1$ で微分できて $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ となる．平均値の定理より $x > 0$ に対してある $c \in (0, x)$ が存在して

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = f'(c) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+c}}.$$

が成り立つ．ここで $c > 0$ なので

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$$

となることに注意すれば,

$$\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}\ (x > 0)$$

となり, 示すべき不等式を得る．

例題 14.2 $p, q > 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき, 次のヤングの不等式が成り立つ．

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\ (x, y > 0).$$

特に, $p = q = 2$ の場合は,

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\ (x, y > 0)$$

となるが, これはコーシーの不等式として, 良く知られている．

(証明)．$y > 0$ を固定して, x の関数

$$f(x) := \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy\ (x > 0)$$

を考える．このとき, $f(0) = \frac{1}{q}y^q > 0$ であって,

$$f'(x) = x^{p-1} - y.$$

よって $x = x^* := y^{\frac{1}{p-1}}$ で $f'(x) = 0$ となり, $0 < x < x^*$ では, $f'(x) < 0$ なので単調減少, $x > x^*$ では $f'(x) > 0$ なので単調増加となる. よって $f(x)$ は $x = x^*$ で最小となり,

$$f(x) \geq f(x^*) = \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}y^q - y^{\frac{1}{p-1}}y = \frac{1}{p}y^q + \frac{1}{q}y^q - y^q = 0$$

を得る. ここで $q = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{p-1} + 1$ となることを用いた. 以上より,

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q - xy \geq 0$$

を得る. すなわち, ヤングの不等式が示された.

14.2 極値

定義 14.1 $f(x)$ が $x = c$ で極大であるとは, ある $\delta > 0$ があって, $0 < |x - c| < \delta$ なる x に対して, $f(x) < f(c)$ が成り立つことをいう. このとき, $f(c)$ を極大値という. 同様に, $f(x)$ が $x = c$ で極小であるとは, ある $\delta > 0$ があって, $0 < |x - c| < \delta$ なる x に対して, $f(x) > f(c)$ が成り立つことをいう. このとき, $f(c)$ を極小値という.　極大値と極小値をあわせて極値という.

命題 14.1 $f(x)$ が $x = c$ で微分可能で, $f(x)$ が $x = c$ で極大または極小となるならば, $f'(c) = 0$ が成り立つ.

(証明) $x = c$ で極大であるとすると, ある $\delta > 0$ があって

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \ (c < x < c + \delta)$$

が成り立つ. よって $x > c$ で $x \to c$ とすることで. $f'(c) \leq 0$ を得る. また,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0 \ (c - \delta < x < c)$$

が成り立つので $x < c$ で $x \to c$ とすることで, $f'(c) \geq 0$ を得る. 以上より $f'(c) = 0$ となる. $x = c$ で極小である場合も同じである.

定義 14.2 $f'(x)$ が区間 I で連続であるとき, $f(x)$ は I 上で C^1-関数であるという. *(C^1-級関数ともいう.).* 一般に $f(x)$ が n 回微分可能で, $f^{(n)}(x)$ が I 上で連続であるとき, $f(x)$ は I 上で C^n-関数であるという. 何回でも微分可能な関数を C^∞-関数という.

命題 14.2 $f(x)$ が開区間 I 上で C^2-関数であり, ある $c \in I$ に対して $f'(c) = 0$ とする. このとき, もし $f''(c) > 0$ ならば, $f(x)$ は $x = c$ で極小となる. また, もし $f''(c) < 0$ ならば, $f(x)$ は $x = c$ で極大となる.

(証明). $f''(c)>0$ としよう. このとき, $f''(x)$ の連続性より, ある $\delta>0$ があって,

$$f''(x)>0\ (c-\delta<x<c+\delta)$$

が成り立つ. よって $f'(x)$ は区間 $(c-\delta, c+\delta)$ で単調増加となる. よって

$$f'(x)>f'(c)=0\ (c<x<c+\delta),\quad f'(x)<f'(c)=0\ (c-\delta<x,c)$$

となる. これより, $f(x)>f(c)\ (c-\delta<x<c+\delta, x\neq c)$ となる. つまり $x=c$ で極小となる. $f''(c)<0$ の場合に, $x=c$ で極大となることも同様にわかる.

例題 14.3 $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}\sin(3x),\ (0\leq x\leq\pi)$ を考える

$$f'(x)=\cos x+\cos(3x)=\cos x+\cos x\cos(2x)-\sin x\sin(2x)$$

$$=2\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos x\cos(2x)$$

となるので, $f'(x)=0$ となるのは, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$ のときである. また

$$f''(x)=-\sin x-3\sin(3x)$$

より, $f''(\frac{\pi}{4})=f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{4}{\sqrt{2}}<0$ なので, $x=\frac{\pi}{4}$ および $\frac{3\pi}{4}$ で極大となる. また $f''(\frac{\pi}{2})=2>0$ なので $x=\frac{\pi}{2}$ で極小となる.

14.3 テイラーの定理

平均値の定理より, $a<b$ のとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

となる $c\in(a,b)$ が存在する. $b<a$ であっても,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(d)$$

なる $d\in(b,a)$ に存在することになるので, a と b の大小関係に関わらず, $a\neq b$ に対して, a と b の間のある数 c が存在して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

が成り立つことになる. つまり, 区間 $I:=(\alpha,\beta)$ で微分可能な関数 $f(x)$ に対して, 任意の $a,b\in I$ に対して, a と b の間のある数 c が存在して

$$f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$$

が成り立つこととなる. 特に $a\in I$ として, 任意の $x\in I$ に対して, a と x の間にある数 c が存在して

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a)$$

が成り立つ. c はある $\theta\in(0,1)$ を用いて, $c=a+\theta(x-a)=x+(1-\theta)(a-x)$ とかけることに注意しておこう.

定理 14.5 (テイラーの定理) $n \geq 2$ とする. $f(x)$ は区間 $I = (\alpha, \beta)$ 上で C^{n-1}-関数で, n 回微分可能であるとする. このとき, $a, b \in I$ に対して, a と b の間のある数 c が存在して次が成り立つ.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

$a \in I$ を 1 つ固定して, $b = x$ として, $x \in I$ に対して, a と x の間のある数 $c = c(x)$ が存在して

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$:= P_{n-1}(x) + R_n(x)$$

が成り立つ. ここで $P_{n-1}(x)$ は $(n-1)$-次の多項式であり, $R_n(x)$ は $(x-a)$ に関する高次の項で, n **次の (ラグランジュの) 剰余項**と呼ばれるものである. **テイラーの定理は, $x = a$ の近くで $f(x)$ を近似する多項式 $P_{n-1}(x)$ と剰余項の和に書き表すものである.** ($x = a$ のまわりの有限テイラー展開ということもある.)
特に, $n = 2$ のときは,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$$

と表される. つまり 1 次近似多項式 $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ と 2 次の剰余項 $R_2(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2$ との和で表すものである. もっと近似を良くしたいなら, $n = 3$ の場合を用いて

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-a)^3$$

と表されることを用いると良い.
特に, $a = 0$ の場合は, 0 と x の間のある c が存在して

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$

が成り立つこととなる. これを**マクローリンの定理**ともいう. (あるいは, 有限マクローリン展開とも言う.) このとき, c はある $\theta \in (0,1)$ を用いて, $c = \theta x$ と書くことができる.

(証明). a, b に対して, A を次の式で定義する:

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{A}{n!}(b-a)^n.$$

ここで, (少し唐突でがあるのだが) 関数 $F(x)$ を

$$F(x):=f(b)-\left\{f(x)+\frac{f'(x)}{1!}(b-x)+\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+\frac{A}{n!}(b-x)^n\right\}$$

と定義する. このとき, $F(b)=0$ は直ぐにわかるが, さらに A の定義から $F(a)=0$ も成り立つ. 仮定から $F(x)$ は微分可能となるので, ロルの定理を適用できて $F'(c)=0$ となる c が a と b の間に存在する. ここで, $F'(x)$ を計算してみると, **多くの項がキャンセルすることに注意して**

$$\begin{aligned}F'(x)=-\Bigg\{&f'(x)+(f''(x)(b-x)-f'(x))+(\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2-2\frac{f''(x)}{2!}(b-x))+\cdots\\&+\left(\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-(n-1)\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-2}\right)-\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\Bigg\}\\=&-\left(\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right)\end{aligned}$$

となることに注意する. 従って,

$$0=F'(c)=\frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}.$$

よって, $A=f^{(n)}(c)$ となるので, 定理の主張が成り立つこととなる.

例題 14.4 *いくつかの代表的な関数の有限マクローリン展開が, 次のように得られる. (これらは, きれいな規則性をもっていることもあり, 記憶すべきものである.) いずれも, 任意の n と x に対して, ある $\theta\in(0,1)$ が存在して次が成り立つ:*

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n.$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+(-1)^n\frac{\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}x^{2n-2}+(-1)^n\frac{\cos(\theta x)}{(2n)!}x^{2n}.$$

また, $x>-1$ に対して, ある $\theta\in(0,1)$ が存在して次が成り立つ:

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{1}{n-1}x^{n-1}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^n x^n.$$

♣ いずれの場合も $\theta\in(0,1)$ は定数なのではなく, n および x による関数であるので注意されたい.

(証明). $f(x)=e^x$ に対しては, $f^{(n)}(x)=e^x$ であるので, すべての n に対して $f^{(n)}(0)=1$ となる, よって任意の n と x に対して, ある $\theta\in(0,1)$ が存在して

$$e^x = f(0)+f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

となる. $f(x)=\sin x$ とするとき,

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f''''(x)=\sin x,\cdots,$$

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x,\ f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\cos x$$

となるので, $f^{(2n)}(0)=0, f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n$ となるので, 上記の展開を得る. $\cos x$ の展開については, 省略する. (各自, 確かめてほしい.)

また, $f(x)=\log(1+x)$ に対しては, $x>-1$ で何回でも微分可能であり,

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)}=(1+x)^{-1},\ f''(x)=-(1+x)^{-2},\ f'''(x)=(-1)(-2)(1+x)^{-3},\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\cdots(-(n-1))(1+x)^{-n}=(-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

となることに注意すれば, 上記の展開を得る.

例題 14.5 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ は $x>-1$ で何回でも微分可能で, 例えば次が成り立つ. つまり $x>-1$ に対して, ある $\theta\in(0,1)$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}}x^3.$$

これは, $x=0$ の近くで, 関数 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ を近似する 2 次多項式 $1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$ と 3 次の剰余項との和で表現したものである.

(証明). $x>-1$ に対して,

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}},\ f''(x)=\frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}},\ f'''(x)=-\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}}.$$

よって, $f(0)=1, f'(0)=-\frac{1}{2}, f''(0)=\frac{3}{4}$ より

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}(1+\theta x)^{-\frac{7}{2}}x^3$$

を得る.

♣ テーラーの定理の別証明を紹介して置こう．こちらの証明は, 上記の証明より少し自然な証明である．（ただし, 何回もロルの定理を用いることになる.)
簡単のため $n = 2$ の場合の証明を与える. (一般の $n \geq 2$ に対しても同様である．)
$a < b$ として, M を

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + M(b-a)^2$$

となるように定義する．そうして, (最初の証明にでてきた関数 $F(x)$ より自然に思える）関数

$$G(t) := f(t) - \Big(f(a) + f'(a)(t-a) + M(t-a)^2\Big)$$

を考える．このとき M の定め方から, $G(a) = G(b) = 0$ となる．よってロルの定理から, ある $a < c < b$ が存在して $G'(c) = 0$ が成り立つ．また

$$G'(t) = f'(t) - f'(a) - 2M(t-a)$$

なので, $G'(a) = 0$ も成り立つ．よって, 区間 $[a, c]$ で関数 $G'(t)$ にロルの定理を用いることで, ある $a < d < c$ で $G''(d) = 0$ となる d が存在することになる．ここで, $G''(t) = f''(t) - 2M$ であるので, $G''(d) = 0$ より $f''(d) - 2M = 0$, すなわち

$$M = \frac{1}{2} f''(d)$$

と書ける．以上より,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(d)}{2!}(b-a)^2$$

を得ることとなる.
♣ こちらの証明の方がより自然ではあるが, なんどもロルの定理を適用しなければならないのに比べて, 最初の証明では, たった 1 度ロルの定理を適用すればよい巧妙な証明なのである.

14.4 凸関数

定義 14.3 $f(x)$ が開区間 I 上で微分可能とする．$f(x)$ が I 上で**下に凸である (Convex とも言う)** とは, 任意の点 $p \in I$ に対して, p の近くで $y = f(x)$ のグラフが p での接線の上側にあるときをいう．すなわち, ある $\delta > 0$ があって,

$$f(x) \geq f'(p)(x-p) + f(p) \ (p - \delta \leq \forall x \leq p + \delta)$$

が成り立つことである．同様に, $f(x)$ が I 上で**上に凸である (Concave とも言う)** とは, 任意の点 $p \in I$ に対して, p の近くで $y = f(x)$ のグラフが p での接線の下側にあるときをいう．すなわち, ある $\delta > 0$ があって,

$$f(x) \leq f'(p)(x-p) + f(p)\ (p - \delta \leq \forall x \leq p + \delta)$$

が成り立つことである．

定理 14.6 $f(x)$ が開区間 I 上で *2* 回微分可能で, $f''(x) > 0\ (x \in I)$ が成り立つとする．このとき, $f(x)$ は I 上で下に凸となる．同様に, $f''(x) < 0\ (x \in I)$ が成り立つとする．このとき, $f(x)$ は I 上で上に凸となる．

(証明). $f''(x) > 0\ (x \in I)$ としよう．このときテイラーの定理から, 任意の $c \in I$ と c の近くの x に対して, c と x の間のある数 z が存在して次が成り立つ.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(z)}{2!}(x-c)^2.$$

よって仮定から $f''(z) > 0$ なので

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$$

を得る．従って, $f(x)$ は I 上で下に凸となる.

例題 14.6 $y = e^x$ は $y'' > 0$ なので, $\mathbb{R}$ 上で下に凸である．また, $y = \log x\ (x > 0)$ は, $y'' = -\frac{1}{x} < 0$ より, $(0, +\infty)$ 上で上に凸である．一方, $f = x \log x\ (x > 0)$ は,

$$y' = \log x + 1, \quad y'' = \frac{1}{x}$$

なので, $(0, +\infty)$ 上で下に凸である.

微分可能性を仮定しなくても, 一般に $f(x)$ が区間 I 上で下に凸ということを, 任意の $x_1 < x_2 < x_3, x_j \in I (j = 1, 2, 3)$ に対して,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

が成りたつこととして定義することができる．これは, 点 $P1 = (x_1, f(x_1)), P_2 = (x_2, f(x_2)), P_3 = (x_3, f(x_3))$ とおくとき, 直線 P_1P_2 の傾きより, 直線 P_2P_3 の傾きの方が大きいかまたは等しい, ということを意味する (図を描いて理解されたい.)

このとき, 次のことが成り立つ.

命題 14.3 *(1)* $f(x)$ が I 上で上記の意味で下に凸であることと, 任意の $x_1, x_2 \in I$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

が成り立つこととは同値.
(2) $f(x)$ が開区間 I 上で微分可能であるとき, $f(x)$ が I 上で下に凸であることと, 任意の $x < y, x, y \in I$ に対して $f'(x) \leq f'(y)$ が成り立つこととは同値である.

(証明). (1) $x_1 < x_2$ として一般性を失わない. このとき, 任意の $0 < t < 1$ に対して ($t = 0, t = 1$ の場合は明らか) $x_1 < tx_1 + (1-t)x_2 < x_2$ なので

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} = \frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{tx_1 + (1-t)x_2 - x_1}$$

$$\leq \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{x_2 - (tx_1 + (1-t)x_2)} = \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{t(x_2 - x_1)}$$

となり,

$$t(f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_2) \leq (1-t)(f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2))$$

となるが, これは $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ となる.
逆は, $x_1 < x_3 < x_2$ に対して, ある $t \in (0,1)$ を用いて $x_3 = tx_1 + (1-t)x_2$ と書けることに注意すれば, 上の変形を行えば主張が言えることがわかる.
(2) 下に凸としよう. 任意に $x < z_1 < z_2 < y$ をとって,

$$\frac{f(z_1) - f(x)}{z_1 - x} \leq \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \leq \frac{f(y) - f(z_2)}{y - z_2}$$

であり, $z_1 \to x$ とすることで,

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(z_2)}{y - z_2}$$

を得る. ここで, さらに $z_2 \to y$ とすることで $f'(x) \leq f'(y)$ を得る. 逆に, 任意の $x < z < y$ に対して平均値の定理より

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(z_1), \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(z_2)$$

となる, $x < z_1 < z, z < z_2 < y$ が存在する. このとき, 仮定から $f'(z_1) \leq f'(z_2)$ となるので

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

を得る.

15 コーシーの平均値の定理・ロピタルの定理

16 コーシーの平均値の定理, ロピタルの定理

16.1 コーシーの平均値の定理

定理 16.1 (コーシーの平均値の定理) $f(x), g(x)$ が $[a,b]$ で連続で, (a,b) で微分可能であって, $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$ を満たすとする. 次を満たす $c \in (a,b)$ が存在する.

$$\frac{f(b)-f(a)]g(b)-g(a)=\frac{f'(c)}{[}g'(c)}{.}$$

(証明). まず, $g(b) \neq g(a)$ となることに注意しよう. なぜなら, もし $g(b) = g(a)$ となるなら, ロルの定理から $g'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在することになるが, 仮定の $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ で反するからである.

そこで,

$$A := \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

と置こう. ここで関数

$$F(x) := f(x) - f(a) - A(g(x) - g(a))$$

を考えると, $F(a) = F(b) = 0$ となる. よってロルの定理から $F'(c) = 0$ となる $c \in (a,b)$ が存在することとなる. ここで

$$F'(c) = f'(c) - Ag'(c)$$

なので定理の主張を得る.

16.2 ロピタルの定理

関数の極限を求めたい場合に, $\frac{0}{0}$ 形や $\frac{\infty}{\infty}$ 形の不定形となる場合に便利なロピタルの定理を学ぼう.

定理 16.2 (ロピタルの定理：その１ ($\frac{0}{0}$ 形の不定形)) $f(x), g(x)$ が開区間 (a,b) で微分可能で, $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$ とする. また右極限 $\lim_{x\to a+0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a+0} g(x) = 0$ が成りたっているとする. このとき, 以下のことが成り立つ.
(1) ある数 A が存在して

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

が成り立つならば,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ.
(2)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$$

が成り立つならば,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

が成り立つ.
(3)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$$

が成り立つならば,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

が成り立つ.

(証明) ● **数列の極限を用いた証明を与える.** (別の証明については, 教科書を参照されたい.)
まず, $f(a) := 0, g(a) := 0$ と定義することで, 最初から $f(x), g(x)$ は区間 $[a, b)$ で連続であるとしてよいことに注意する.
まず, (1) の場合を示す. 任意の $x_n (> a)$ で $x_n \to a$ なる数列 $\{x_n\}$ に対して,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to A \ (n \to +\infty)$$

となることを示せばよい. このとき, コーシーの平均値の定理から

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

であって $a < c_n < x_n$ となる c_n が存在する. $x_n \to a$ のとき, $c_n \to a$ となるので, 仮定から

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to A \ (n \to +\infty)$$

が成り立つので,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to A \ (n \to +\infty)$$

を得る.
(2) の場合は, 同様にして, $x_n \to a$ に対して

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to \infty$$

となって, 結論を得る. (3) の場合も同様なので省略する.

定理 16.3 (ロピタルの定理：その２ （$\frac{\infty}{\infty}$ 形の不定形)) $f(x), g(x)$ が開区間 (a,b) で微分可能で, $g'(x) \neq 0$ $(x \in (a,b))$ とする．また右極限 $\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a+0} g(x) = +\infty$ が成りたっているとする．*(*$-\infty$ *の場合でも良い．)* このとき, 以下のことが成り立つ．

(1) ある数 A が存在して

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

が成り立つならば,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

(2)

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$$

が成り立つならば,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

が成り立つ．

(3)

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$$

が成り立つならば,

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

が成り立つ．

(証明) (1) の場合のみ証明する．$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a+0} g(x) = +\infty$ であって, ある数 A が存在して

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

が成り立とする．先ほどと同じく, $u_n(> a)$ で $u_n \to a$ なる任意の数列 $\{u_n\}$ に対して,

$$\frac{f(u_n)}{g(u_n)} \to A$$

を示せばよい．まず, 仮定より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\delta > 0$ であって, $a < x < a+\delta$ なら

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - A \right| < \epsilon$$

が成り立つ．今, $a < u < a+\delta$ なる u に対して, コーシーの平均値の定理を用いることで

$$\frac{f(u)}{g(u)} \times \left[\frac{\left(1 - \frac{f(a+\delta)}{f(u)}\right)}{\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(u)}\right)} = \frac{f(u) - f(a+\delta)}{g(u) - g(a+\delta)} = \frac{f'(v)}{g'(v)} \right.$$

となる $v \in (u, a+\delta)$ が存在する．ここで $u_n \to a$ なので, ある N が存在して, $n \geq N$ ならば $a < u_n < a+\delta$ が成り立つ．よって, $n \geq N$ に対して

$$\frac{f(u_n)}{g(u_n)} = \left[\frac{\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(u_n)}\right)}{\left(1 - \frac{f(a+\delta)}{f(u_n)}\right)} \times \frac{f'(v_n)}{g'(v_n)}\right.$$

なる $v_n \in (u_n, a+\delta)$ が存在することとなる．今,

$$\left[\frac{\left(1 - \frac{g(a+\delta)}{g(u_n)}\right)}{\left(1 - \frac{f(a+\delta)}{f(u_n)}\right)} = 1 + C_n\right.$$

とおくとき, $|C_n| \to 0$ $(n \to +\infty)$ であり,

$$\frac{f'(v_n)}{g'(v_n)} = A + B_n$$

とおくとき, $|B_n| \leq \epsilon$ となることに注意しておく．また $\epsilon > 0$ は小さくとればいいので, 最初から $0 < \epsilon \leq 1$ であるとしてよい．$|C_n| \to 0$ なので, ある $N' > N$ があって, $n \geq N'$ ならば

$$|C_n| \leq \frac{\epsilon}{|A| + 1}$$

が成り立つとしてよい．以上から, $n \geq N'$ に対して

$$\left|\frac{f(u_n)}{g(u_n)} - A\right| = |B_n + C_n(A + B_n)| \leq |B_n| + |C_n|(|A| + 1) \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

を得る．このことは,

$$\frac{f(u_n)}{g(u_n)} \to A \ (n \to +\infty)$$

を示している．

注意 16.1 • ロピタルの定理は, $x \to b - 0$ の場合でも成り立つ．また $a = -\infty$ や $b = +\infty$ の場合でも成り立つ．

例題 16.1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = +\infty.$$

また,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

の場合は，$f(x)=x^2, g(x)=e^x$ として，ロピタルの定理を用いると，$f'x)=2x, g'(x)=e^x$ なので

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}$$

となって，$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ がまた不定形となって，その極限の存在が直ちにはわからないので，ロピタルの定理が適用できるかどうかわからないことになるが，既に，の極限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ であることがわかっているので，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=0$$

を得る．ときには，このように，ロピタルの定理を何回か使うことで不定形の極限を求めることが出来る場合があるが，何回かロピタルの定理を使って最終的にその極限がわかれば，すべてを丁寧に説明せずに記述することが多い．（すべてさかのぼって，説明していると煩雑になるからである.)

例えば，任意の自然数 n に対して，ロピタルの定理を n 回適用して

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

となる.

♣ また，不定形は $0\times\infty$ とか，$\infty-\infty$ とか，0^0 とか $(\infty)^\infty$ とかの形である場合は，適宜変形して，$\frac{0}{0}$ 形や $\frac{\infty}{\infty}$ 形と書き直して，ロピタルの定理が適用できるかどうかを検討することになる.

例題 16.2 $f(x)=(\sin x)^{\sin x}$ を十分小さい $x>0$ に対して考える．このとき，

$$\log f(x)=(\sin x)\log(\sin x)=\frac{\log(\sin x)}{(\frac{1}{\sin x})}$$

と書くことで，$\frac{\infty}{\infty}$ 形になる．これより，ロピタルの定理から

$$\lim_{x\to+0}\log f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{(\frac{\cos x}{\sin x})}{(-\frac{1}{\sin^2 x})\cos x}=\lim_{x\to+0}(\sin x)=0.$$

よって，$f(x)=e^{\log f(x)}\to e^0=1\ (x\to+0)$ を得る.

例題 16.3 次は $\infty-\infty$ の形の不定形であるが，$\frac{0}{0}$ 形の不定形に直して，ロピタルの定理を２回用いることで，次を得る.

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=0.$$

17 積分の定義

17.1 積分の定義, 定積分の存在

$f(x)$ は有界閉区間 $[a,b]$ 上の有界な関数とする. すなわち, ある $M > m$ があって,

$$m \leq f(x) \leq M \ (x \in [a,b])$$

が成り立つものとする. 以下では, 特に $[a,b]$ 上の連続関数についてその積分の定義を学ぶこととする. 連続関数 $f(x)$ は, 有界閉区間上で最大値及び最小値をもつので, 特に有界でもある. (一般の有界な関数 $f(x)$ に対する積分の定義をどうするかについては, 適宜コメントすることとする.)

- 区間 $[a,b]$ の分割

$$\Delta \ : \ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

を考え, $\delta_i := x_i - x_{i-1}$ として, 分割の幅を $\delta(\Delta) := \max\{\delta_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ で定める. ($\{x_i\}$ を分割 Δ の分点という.) また, 勝手に $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ にとり, 次の和（リーマン和という）を考える.

$$\sum_{i=i}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_i.$$

このとき, 次が成り立つ.

定理 17.1 $f(x)$ が $[a,b]$ 上の連続関数ならば, 分割 Δ の取り方や $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ の選び方によらず, $\delta(\Delta) \to 0$ でのリーマン和の極限

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i=i}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

が存在して, 一定値を取る. *(この値を*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

と書き, $f(x)$ の $[a,b]$ 上での定積分という*.)*

この証明のための準備を行う. まず $m := \min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}, M := \max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ とおくと,

$$m \leq f(x) \leq M \ (x \in [a,b])$$

が成り立つ. また, 各 i に対して

$$m_i := \min\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad M_i := \max\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

とおき,

$$s(f,\Delta) := \sum_{i=1}^{n} m_i\delta_i, \quad S(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i\delta_i$$

を置く. このとき, 次が成り立つことに注意する.

$$m(b-a) \leq s(f,\Delta) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_i \leq S(f,\Delta) \leq M(b-a).$$

ここで, さらにあらゆる分割 Δ を考えたときの $s(f,\Delta)$ は, 上の不等式から上に有界であることがわかるので, その上限

$$s(f) := \sup_{\Delta} s(f,\Delta)$$

を考えることが出来る. 同様に, あらゆる分割 Δ を考えたときの $S(f,\Delta)$ は, 上の不等式から下に有界であることがわかるので, その下限

$$S(f) := \inf_{\Delta} S(f,\Delta)$$

を考えることが出来る.

注意 17.1 連続でない有界な $f(x)$ を考えるときは,

$$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

とおくことが出来て, これらを用いて, $s(f,\Delta), S(f,\Delta)$ および $s(f), S(f)$ を定義することができる.

補題 17.1 $s(f) \leq S(f)$ が成り立つ.

(証明) 任意の分割 Δ と Δ' に対して, それらの分点をあわせた分点をからなる分割 Δ'' を考える. この Δ'' を Δ および Δ' の細分という. このとき,

$$s(f,\Delta) \leq s(f,\Delta'') \leq S(f,\Delta'') \leq S(f,\Delta')$$

が成り立つことに注意しよう. よって, Δ' を固定して, Δ に関して上限をとることで,

$$s(f) \leq S(f,\Delta')$$

となる. つまり,

$$s(f) \leq S(f,\Delta') \quad (\forall \Delta')$$

を得る. ここで Δ' に関して下限をとることで

$$s(f) \leq S(f)$$

を得る.

定理 17.2 (ダルブーの定理) 分割の列 $\{\Delta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ で $\delta(\Delta_k) \to 0$ ならば, 次が成り立つ.

$$\lim_{k\to+\infty} s(f,\Delta_k) = s(f), \quad \lim_{k\to+\infty} S(f,\Delta_k) = S(f).$$

あるいは, これは,

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} s(f,\Delta) = s(f), \quad \lim_{\delta(\Delta)\to 0} S(f,\Delta) = S(f)$$

が成り立つ, といっても良い.

（証明は略す．教科書の証明を参照されたい.)

定義 17.1 一般の有界な関数 $f(x)$ に対して, $s(f)=S(f)$ が成り立つとき, $f(x)$ は $[a,b]$ 上で**可積分である** *(*あるいは, 積分可能である）という．また, そのとき,

$$\int_a^b f(x)\,dx := s(f) = S(f)$$

と書いて, $f(x)$ の $[a,b]$ 上での定積分という．また, 分割 $\Delta : x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ に対して $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を勝手に選ぶとき,

$$s(f,\Delta) \le \sum_{i=1}^n f(c_i)\delta_i \le S(f,\Delta)$$

であって, $\delta(\Delta) \to 0$ で, $s(f,\Delta) \to s(f)$, $S(f,\Delta) \to S(f)$ であって, $s(f)=S(f)$ なので,

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\delta_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ.

命題 17.1 $f(x)$ が $[a,b]$ 上の連続関数ならば, $s(f)=S(f)$ が成り立つ.

（証明） $f(x)$ は $[a,b]$ 上で, 一様連続であることを思い出そう．すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x-t| < \delta, x, t \in [a,b]$ ならば,

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon$$

が成り立つ．よって, $\delta(\Delta) < \delta$ なる分割 Δ に対しては, 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において

$$m_i := \min\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(\xi_i), \quad M_i := \max\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(\eta_i),$$

とおくとき,

$$|\xi_i - \eta_i| \le x_i - x_{i-1} = \delta_i \le \delta(\Delta) < \delta$$

なので

$$M_i - m_i = f(\eta_i) - f(\xi_i) < \epsilon$$

が成り立つことになる．従って, $\delta(\Delta) < \delta$ なる分割 Δ に対しては,

$$S(f,\Delta) - s(f,\Delta) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\delta_i < \epsilon(b-a)$$

が成り立つこととなる．特に,

$$S(f) \le S(f,\Delta) < \epsilon(b-a) + s(f,\Delta) \le \epsilon(b-a) + s(f)$$

を得る. よって,

$$S(f) - s(f) < \epsilon(b-a) \ (\forall \epsilon > 0)$$

が成り立つことになるので, $S(f) \leq s(f)$ を得る. $s(f) \leq S(f)$ とあわせて, $S(f) = s(f)$ が結論できる.
(定理 17.1 の証明) $\delta(\Delta_k) \to 0 \ (k \to +\infty)$ とする. ダルブーの定理より,

$$s(f, \Delta_k) \to s(f), \quad S(f, \Delta_k) \to S(f)$$

が成り立ち, また上の命題によって $s(f) = S(f)$ である. このとき, (分割 Δ_k の小区間を $[x_{i-1}, x_i]$ と書き, 任意に $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を選んだとき),

$$s(f, \Delta_k) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_i \leq S(f, \Delta_k)$$

より, はさみうちの原理から,

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_i \to s(f) = S(f)$$

が成り立つ. 以上で, 定理 17.1 の証明ができたことにある.

17.2 定積分の基本的性質

命題 17.2 $f(x), g(x)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とする.
(1) 任意の定数 A, B に対して, 次が成り立つ.

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx.$$

(2) $a < c < b$ に対して, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(証明) (1) $\delta(\Delta) \to 0$ なる分割 Δ として, 分割 Δ_k の小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に対し, 任意に $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を選んだとき, リーマン和を考える.

$$\sum_{i=1}^{n}(Af(c_i) + Bg(c_i))\delta_i A\left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_i\right) + B\left(\sum_{i=1}^{n} g(c_i)\delta_i\right)$$

が成り立つ. 極限 $\delta(\Delta) \to 0$ をとることで, 定理 17.1 から, 結論を得る.
(2) c を分点に含むような $[a, b]$ の分割 Δ で $\delta(\Delta) \to 0$ なるものを考え, リーマン和を考えることで示すべき公式が成り立つことがわかる.

注意 17.2 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ とし，また $b < a$ の場合には

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

と定義する．このとき，区間 I で連続な関数 $f(x)$ に対して，$a, b, c \in I$ に対して，その大小関係によらず，次が成り立つことになる．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

命題 17.3 $f(x), g(x)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とする．もし，$f(x) \le g(x)$ $(x \in [a, b])$ が成り立つならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．さらに，$f(x) \not\equiv g(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．

(証明）最初の不等式は，リーマン和の段階で

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\delta_i \le \sum_{i=1}^n g(c_i)\delta_i$$

が成り立つので，$\delta(\Delta) \to 0$ の極限をとることで得られる．$f(x) \le g(x)$ $(x \in [a, b])$ であって $f(x) \not\equiv g(x)$ であるとき，ある $c \in (a, b)$ で $f(c) < g(c)$ が成り立つ．このとき，$\kappa := g(c) - f(c) > 0$ と置くとき，ある $\eta > 0$ があって，

$$g(x) - f(x) \ge \frac{\kappa}{2} \ (|x - c| \le \eta, x \in [a, b])$$

が成り立つ．$[a, b]$ の分割 Δ で $c, c - \eta, c + \eta$ を分点にもつものを考え，$\delta(\Delta) < \eta$ なるものを考える．小区間のうちで $[c - \eta, c + \eta]$ に含まれるものに関する和を $\sum'$，それ以外の小区間での和を $\sum''$ で表すことにすると，

$$\sum_{i=1}^n (g(c_i) - f(c_i))\delta_i = \sum{}' (g(c_i) - f(c_i))\delta_i + \sum{}'' (g(c_i) - f(c_i)\delta_i \ge \frac{\kappa}{2} \sum{}' \delta_i = \frac{\kappa}{2}(2\eta)$$

が成り立つ．ここで極限 $\delta(\Delta) \to$ をとることで

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge \kappa\eta > 0$$

を得る．よって

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$$

が成り立つ．

命題 17.4 $f(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする．このとき, 次の不等式が成り立つ．

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(証明）$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ $(x \in [a,b])$ より,

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b (-|f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

が成り立つ．これより求める不等式が従う．

定理 17.3 (積分の平均値の定理) $f(x), g(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする．さらに, $g(x) > 0$ $(x \in [a,b])$ を満たすとする．このとき,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

なる $c \in (a,b)$ が存在する．

(証明) $f(x)$ が定数関数の場合は, c として, すべての $c \in (a,b)$ として成り立つ．そこで $f(x)$ が定数関数でないとしよう．このとき

$$m := \min_{a \leq x \leq b} f(x) < M := \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

が成り立つ．仮定の $g(x) > 0$ より,

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \ (x \in [a,b])$$

となるので, また $mg(x) \not\equiv f(x)g(x)$ および $f(x)g(x) \not\equiv Mg(x)$ であることより

$$m\int_a^b g(x)\,dx < \int_a^b f(x)g(x)\,dx < M\int_a^b g(x)\,dx$$

を得る．また $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ なので

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} < M$$

が成り立つ．よって中間値の定理より

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

となる $c \in (a,b)$ が存在する．

17.3 微分積分の基本定理

定理 17.4 $f(x)$ は $[a.b]$ 上の連続関数とする. $c \in [a,b]$ を 1 つ固定する.
(1) $S(x) := \int_c^x f(t)\,dt$ とおくとき, $S'(x) = f(x)$ $(x \in [a,b])$ が成り立つ.
(2) $F'(x) = f(x)$ なる関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数（あるいは, 不定積分という*)* という.
$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ があれば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)(= \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b})$$

が成り立つ.

(証明) (1) $x \in (a,b)$ として示す. $x = a$ あるいは $x = b$ の場合は, 片側微分の意味で成り立つ. $x \in (a,b)$ とする. h:十分小として

$$S(x+h) - S(x) = \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(c)$$

となる c が x と $x+h$ のある数として, 積分の平均値の定理より存在する. $h \to 0$ で $c \to x$ となるので,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(c) \to f(x)\ (h \to 0)$$

が成り立つ. すなわち, $S(x)$ は x で微分可能となり, $S'(x) = f(x)$ が成り立つこととなる.
(2) $(S(x) - F(x))' = 0$ となるので $S(x) - F(x) = C$ (C は定数）となる. これより

$$\int_a^b f(x)\,dx = S(b) - S(a) = F(b) - F(a)$$

が成り立つことがわかる.

定理 17.5 $f(x)$ は $[a.b]$ 上の C^1-関数とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

(証明)

$$G(x) := \int_a^x f'(t)\,dt$$

とおくとき, $G'(x) = f'(x)$ が成り立つ. よって, ある定数 C が存在して $G(x) - f(x) = C$ が成り立つ. 従って, $G(a) = 0$ に注意して

$$\int_a^b f'(x)\,dx = G(b) = G(b) - G(a) = f(b) - f(a)$$

が成り立つ.

18 不定積分

18.1 部分積分の公式, 置換積分の公式

$f(x)$ に対して, $F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数（または, 不定積分）といい,

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

で表す. $F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x)$ とするとき, $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ となるので, $F_1(x) - F_2(x) = C$(定数）となる. つまり, $f(x)$ の原始関数は定数をのぞいて一意に定まることとなる. よって, $f(x)$ の原始関数は, あるとしたら 1 つの原始関数 $F(x)$ を用いて $F(x)+C$ (C は任意定数）とかけることになるが, 1 つの原始関数がわかればよいことが多いので, 任意定数 C は省略することも多い. $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$ のとき, $(F(x)+G(x))' = f(x)+g(x)$ なので

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

が成り立つ. (ただし, 任意定数の分は省略している.)

• $f(x)$ が連続関数のとき,

$$S(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

は, $S'(x) = f(x)$ を満たすことは既知なので, 連続関数 $f(x)$ は必ず原始関数をもつことはわかっている. しかしながら, 与えられた具体的な関数 $f(x)$ に対して, 具体的な関数（初等関数の範囲で）としてその原始関数を求めることはいつも出来るわけではない.

♣ 初等関数とは, 多項式, 有理関数, 三角関数, 指数関数やその逆関数（累乗関数, 逆三角関数, 対数関数など）や, それらの有限回の加減乗除の操作によって出来る関数のことを初等関数ということにする. 例えば, $f(x)$ が次のように簡単そうな関数でも, その原始関数 $F(x)$ を初等関数で表すことはできないことが知られている.

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{1}{\log x}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

一方で, 良く似た関数でも簡単にその原始関数がわかる場合もあるので注意されたい. 例えば,

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}, \quad \int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x), \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = -\frac{1}{2}(1-x^4)^{\frac{1}{2}}$$

などは, 直接右辺の関数を微分してみれば容易にわかることである.

• 以下, 原始関数を具体的に求めるのに有効な方法についていくつか学ぶことにしよう.

命題 18.1 $f(x), g(x)$ が C^1-関数であるとき, 次が成り立つ.

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

(証明)

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

なので,

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = f(x)g(x) + C$$

となる. よって (任意定数は省略して) 次が成り立つ.

$$\int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x).$$

よって, 移行して主張を得る.

命題 18.2 $f(x)$ は連続関数で, $\phi(t)$ が C^1-関数とするとき, 次が成り立つ.

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

(この正確な意味は, 証明の中で説明する.)

(証明) $F(x) = \int f(x)\,dx$ とするとき, $F'(x) = f(x)$ が成り立つ. このとき,

$$\Big(F(\phi(t))\Big)' = f(\phi(t))\phi'(t)$$

となるので,

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = F(\phi(t))$$

が成り立つ. 命題の主張は, この意味で成り立つ.

例題 18.1

$$\int (\log x)\,dx = x\log x - x.$$

(証明) $x' = 1$ を利用して, 部分積分の公式より

$$\int (\log x)\,dx = \int (x')(\log x)\,dx = x(\log x) - \int x(\log x)'\,dx$$

$$= x(\log x) - \int dx = x(\log x) - x$$

を得る.

例題 18.2 C^1-関数 $g(x)$ に対して, 次が成り立つ.

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \log|g(t)|.$$

(証明) $f(x) = \frac{1}{x}$ とおくとき,

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$$

となる. よって置換積分の公式より

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \int F(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) = \log|g(t)|$$

を得る.

注意 18.1 原始関数（あるいは不定積分）を求める計算において, もとめた関数 $F(x)$ を微分して, $F'(x) = f(x)$ になることを検算した方がよい.　たとえば, 上記の例題において,

$$(x\log x - x)' = \log x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \log x.$$

また,

$$(\log|g(x)|)' = \frac{1}{g(x)} \times g'(x)$$

となるというように検算で確かめることができる.

• また, 要するに, $F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ が簡単に推測できる場合などは, そう求めてよい. 例えば,

$$(\cos^3 x)' = -3\cos^2 x \sin x$$

なので

$$\int \cos^2 x \sin x\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x$$

と求まる. (置換積分法を用いてもよいが, このように簡単に推測できる場合はそうした方がよい.) 次の例も重要な例である.

例題 18.3

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x.$$

アークサイン $\sin^{-1} x$ やアークタンジェント $\tan^{-1} x$ の重要性は, このことからもわかる

（証明）なぜなら,

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

であることを知っているからである.

例題 18.4 $a > 0$ とするとき, 次が成り立つ：

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1}(\frac{x.}{a}),$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a}).$$

（証明）これは, それぞれ

$$(\sin^{-1}(\frac{x}{a}))' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} \times (\frac{1}{a}) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$(\tan^{-1}(\frac{x}{a}))' = \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} \times (\frac{1}{a}) = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

となるからである.

例題 18.5 $a, b \in \mathbb{R}$ に対して,

$$I := \int e^{ax}\cos(bx)\, dx, \quad J := \int e^{ax}\sin(bx)\, dx$$

とおくとき,

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx))e^{ax},$$

$$J = \frac{1}{a^2 + b^2}(-b\cos(bx) + a\sin(bx))e^{ax}$$

が成り立つ. *(この公式を覚えるより,　以下の証明の手順を覚えることで, いつでも自分でこの公式を導くことが出来るようにした方がよい.)*

(証明)　通常は, 部分積分の公式を 2 回用いて, I と J を求めることが多いが, ここでは, 次のように $e^{ax}\cos(bx)$ および $e^{ax}\sin(bx)$ の微分の計算から, それぞれの原始関数を求めてみる.（この方が, 計算間違いをしにくい.)

$$(e^{ax}\cos(bx))' = ae^{ax}\cos(bx) - be^{ax}\sin(bx), \tag{4}$$

$$(e^{ax}\sin(bx))' = ae^{ax}\sin(bx) + be^{ax}\cos(bx). \tag{5}$$

このとき, $\sin(bx)$ の項をキャンセルするように, (4)$\times a$+(6)$\times b$ より,

$$\left(ae^{ax}\cos(bx) + be^{ax}\sin(bx)\right)' = (a^2 + b^2)e^{ax}\cos(bx)$$

となるので,

$$I = \int e^{ax}\cos(bx)\, dx = \frac{1}{a^2 + b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx))e^{ax}$$

を得る. また, (4)$\times b-$(6)$\times a$ より,

$$\Big(be^{ax}\cos(bx)-ae^{ax}\sin(bx)\Big)'=-(a^2+b^2)e^{ax}\sin(bx)$$

となるので,

$$J=\int e^{ax}\sin(bx)\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}(-b\cos(bx)+a\sin(bx))e^{ax}$$

を得る.

18.2　有理関数の不定積分

　ここでは, 有理関数の原始関数は, **部分分数展開**を用いることで求めることが出来ることを学ぶ. 一般的に次のことが成り立つ.

命題 18.3 有理関数は $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ *(ただし, $P(x),Q(x)$ は多項式関数) と書けるが, このとき, $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ は, 有理関数, 対数関数, アークタンジェント及びその組み合わせからなる関数で求めることができる.*

この命題を一般的には証明しないが,　定型的な例を通して, 言っている意味や具体的に求める手順を理解することにしよう.
♣ 一般的方針は以下の 3 つのステップにより求められる.
(ステップ 1):　分母の多項式 $Q(x)$ を因数分解する.
(ステップ 2):　$Q(x)$ の因数分解に応じて, $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ の部分分数展開を行う.
(ステップ 3):　部分分数展開された各項ごとの原始関数を求めることで,$f(x)$ の原始関数を求める.

例題 18.6 次の原始関数を求めよ.

$$I:=\int\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx.$$

(解) 既に分母が因数分解できているので、まず

$$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

と部分分数展開する. 未定係数 A,B,C のを決めるのに,

$$x^2=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

が成り立つことから決める. これから 2 通りの方法がある. 1 つは, **代入法**といい, $x=1$ を代入してみることで, $1=2A$ となるので, $A=\frac{1}{2}$. また, $x=2$ を代入することで, $4=-B$. よって $B=-4$. $x=3$ を代入することで, $9=2C$. よって, $C=\frac{9}{2}$ を得る.

もう 1 つの方法は, 両辺の多項式の**各次数の係数を比較する方法**で, 上の場合,

$$x^2 = (A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + 6A+3B+2C$$

と整理して, 両辺の係数を比較することで,

$$1 = A+B+C,\ 0 = -5A-4B-3C,\ 0 = 6A+3B+2C = 0$$

という連立方程式を解くことで,

$$A = \frac{1}{2},\ B = -4,\ C = \frac{9}{2}$$

を得る. これより

$$I := \int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx. = (\frac{1}{2})\int \frac{1}{x-1}\,dx - 4\int \frac{1}{x-2}\,dx + (\frac{9}{2})\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - 4\log|x-2| + \frac{9}{2}\log|x-3|$$

をえる.

例題 18.7 次の原始関数を求めよ.

$$I := \int \frac{x}{(x^2+4)(x-2)}\,dx$$

(解) まず,

$$\frac{x}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-2}$$

と部分分数展開する. よって,

$$x = (Ax+B)(x-2) + C(x^2+4)$$

が成り立つように, 未定係数 A, B, C を定める.

$$x = (A+C)x^2 + (B-2A)x - 2B + 4C$$

なので, 係数比較して

$$0 = A+C,\ 1 = B-2A,\ 0 = -2B+4C.$$

これを解いて

$$A = -\frac{1}{4},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{4}$$

となる.

• (注): ちなみに, 代入法を用いる場合は, 特に, $x=2i$ に対して, $x^2+4=0$ となることを利用する. $x=2$ を代入して, $2=8C$. よって $C=\frac{1}{4}$. $x=2i$ を代入して,

$$2i=(2Ai+B)(2i-2)=(-4A-2B)+(2B-4A)i$$

となるので, 両辺の複素数の実部と虚部を比較することで, $-4A-2B=0$ かつ $2B-4A=2$. これをといて $A=-\frac{1}{4}, B=\frac{1}{2}$ を得る.
以上より

$$I=\int\frac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+4}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx$$

$$=(-\frac{1}{8})\int\frac{2x}{x^2+4}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx=-\frac{1}{8}\log(x^2+4)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\tan^{-1}(\frac{x}{2})+\frac{1}{4}\log|x-2|$$

$$=-\frac{1}{8}\log(x^2+4)+\frac{1}{4}\tan^{-1}(\frac{x}{2})+\frac{1}{4}\log|x-2|$$

を得る.

例題 18.8 次の原始関数を求めよ.

$$I:=\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

(解)

$$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

なので,

$$I:=\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)$$

を得る. ここで用いた公式は

$$\int\frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx=\frac{1}{b}\tan^{-1}(\frac{x-a}{b})$$

である.

例題 18.9 次の原始関数を求めよ.

$$I:=\int\frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)^2}\,dx$$

(解) まず,

$$\frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{E}{x-2}+\frac{F}{(x-2)^2}$$

と部分分数展開する. (このように, 分母の因数分解においてそれぞれの重複度に応じて部分分数展開を適切に行う必要がある.) よって

$$1=(Ax+B)(x^2+1)(x-2)^2+(Cx+D)(x-2)^2+E(x-2)(x^2+1)^2+F(x^2+1)^2 \quad (6)$$

となるように, 未定係数 A,B,C,D,E,F を定める必要がある. ここでは, 代入法を用いてみる. $x=2$ を代入して, $1=25F$. $x=i$ を代入して, $x^2+1=0$ となることから,

$$1=(Ci+D)(i-2)^2=(Ci+D)(3-4i)=(3D+4C)+(3C-4D)i.$$

よって, $3D+4C=1$, $3C-4D=0$ をといて $D=\frac{3}{25}, C=\frac{4}{25}$. さらに, (6) を微分することで,

$$\begin{aligned} 0 &= A(x^2+1)(x-2)^2+(Ax+B)(2x)(x-2)^2+(Ax+b)(x^2+1)(2(x-2) \quad (7)\\ +\ & C(x-2)^2+(Cx+D)\times 2(x-2)+E(x^2+1)^2+E(x-2)(4x)(x^2+1)+4Fx(x^2+1) \end{aligned}$$

を得る. ここで, (7) に $x=2$ を代入して

$$25E+8\times(25F)=0.$$

$25F=1$ だったので, $E=-\frac{8}{25}$. (7) に $x=i$ を代入して,

$$0=(Ai+B)(2i)(-2-4i)+C(i-2)+2(Ci+1)=(-2A+4B+2-2C)+(-2B-4A+3C)i$$

を得る. よって,

$$-A+2B+1-C=0,\ -2B-4A+3C=0.$$

これより

$$A=\frac{1}{5}(2C+1)=\frac{33}{125},\ B=-\frac{36}{125}.$$

以上より,

$$\begin{aligned} I &= A\int\frac{x}{x^2+1}\,dx+B\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+C\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx+D\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx\\ &+E\int\frac{1}{x-2}\,dx+F\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx \end{aligned}$$

となるが,

$$\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\log(x^2+1),\int\frac{1}{x^2+1}\,dx=\tan^{-1}x,$$

$$\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+1},\ \int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx=-\frac{1}{(x-2)}$$

などより, あと

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

さえわかればよいことになる. これは, 以下の漸化式の利用によって,

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$$

と求まることができるので, すべて計算できることとなる. (ここでは,具体的な A,B,C,D,E,F を入れての最終結果は省略する.)

18.3 漸化式の活用

漸化式の活用が有効な場合もある.

• $a > 0$ とし, 自然数 n に対して

$$I_n := \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

とおくとき, 次が成り立つ:

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}\right)\ (n \geq 2).$$

なぜなら, 部分積分の公式より

$$I_{n-1} = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx = \int (x)'(x^2+a^2)^{-(n-1)}\,dx$$

$$= x(x^2+a^2)^{-(n-1)} - \int x\left((x^2+a^2)^{-(n-1)}\right)'dx = x(x^2+a^2)^{-(n-1)} + 2(n-1)\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

$$= x(x^2+a^2)^{-(n-1)} + 2(n-1)\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

$$= x(x^2+a^2)^{-(n-1)} + 2(n-1)I_{n-1} - 2a^2(n-1)I_n$$

となる. 整理して,

$$2a^2(n-1)I_n = (2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

となり, 最初の主張を得る.

• 自然数 m, n に対して,

$$I(m,n) := \int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

とおくとき,

$$i(m,n) = \frac{1}{m+n}\left(-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)I(m-2,n)\right)$$

が成り立つ.

なぜなら,

$$I(m,n) = \int \sin^{m-1} x \times (\sin x \cos^n x)\,dx = \int \sin^{m-1} x\left(-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1} x\right)'dx$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx$$

となるが, $\cos^{n+2} x = \cos^n x(1-\sin^2 x)$ を用いて,

$$I(m,n) = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x\cos^n x\,dx - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x\cos^n x\,dx$$

となる. 従って,

$$(1+\frac{m-1}{n+1})I(m,n) = -\frac{1}{n+1}\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x + \frac{m-1}{n+1}I(m-2,n)$$

を得る. これより, 最初に述べた公式を得る.

注意 18.2 先ほどの漸化式により, $I(m,n)$ は, $I(1,n)$ あるいは $I(0,n)$ の計算に帰着されることになるわけであるが, m または n のどちらかが奇数の場合には, 次のようにするほうが簡単である. ここでは n が奇数として, $n = 2k+1$ と書けるとしよう. このとき,

$$I(n,m) = I(2k+1,m) = \int \sin^{2k+1} x\cos^m x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)^k \cos^m x\,dx$$

となるので, 結局, 自然数 p として,

$$\int \sin x\cos^p x\,dx$$

の形の有限和となる. そこで

$$\int \sin x\cos^p x\,dx = -\frac{1}{(p+1)}\cos^{p+1} x$$

に注意すれば, 簡単に求まることとなる. m が奇数の場合には,

$$\int \cos x\sin^q x\,dx = \frac{1}{(q+1)}\sin^{q+1} x$$

を用いることで計算できることとなる.

18.4 変数変換の活用

いくつかの典型的な変数変換の活用例について学ぶ. （多くは, 数 III でも学んだことがあるかと思われるので, 最低限のコメントをするだけにとどめる.)

• $R(x,y)$ が x,y の有理関数とする. このとき,

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

の場合は,,

$$t = \tan(\frac{x}{2})$$

とすることで, t の有理関数の不定積分の計算に帰着できる. なぜなら,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

となるからである.

• とくに,

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx$$

の場合は,,

$$t = \tan x$$

とするほうが少し簡単である.

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

となることを用いる.

•

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

の形の場合, $a > 0$ のときは,

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$$

という変換を用いるとよい. なぜなら, 上の式を 2 乗して

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2$$

より,

$$x = \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$$

となる. よって, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ も t の有理関数でかけることなる. また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\sqrt{a}t^2+2bt+2\sqrt{a}c}{(b+2\sqrt{a}t)^2}$$

と書けるからである.

$a < 0$ のとき $ax^2+bx+c = 0$ の 2 つの実数解を $\alpha < \beta$ とするとき,

$$t = \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}$$

という変換をすると良い. なぜなら, まず

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{(-a)(x-\alpha)(\beta-x)}$$

である. ここで

$$t^2 = \frac{x-\alpha}{\beta - x}$$

より,

$$x = \frac{\alpha + \beta t^2}{1+t^2}$$

となる. よって

$$x - \alpha = (\beta - \alpha)\frac{t^2}{1+t^2},\ \beta - x = \frac{\beta - \alpha}{1+t^2}$$

となるので

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\sqrt{\beta-\alpha}\frac{t}{1+t^2}$$

となる. さらに,

$$\frac{dx}{dt} = (\beta - \alpha)\frac{2t}{(1+t^2)^2}$$

となるからである.

19 定積分

19.1 部分積分法と置換積分法

定理 19.1 $f(x), g(x)$ を $[a,b]$ 上の C^1-関数とするとき, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[fg\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(証明) $(fg)' = f'g + fg'$ より,

$$\int_a^b (fg)'\,dx = \int_a^b f'g\,dx + \int_a^b fg'\,dx.$$

また微分積分の基本定理より

$$\int_a^b (fg)'\,dx = \Big[fg\Big]_{x=a}^{x=b}$$

なので, 定理の主張をえる.

定理 19.2 ϕ は $[\alpha, \beta]$ 上の C^1-関数であって,

$$I := \{\phi(t) \mid \alpha \le t \le \quad \beta\}$$

として, $f(x)$ は区間 I 上で連続であるとする. このとき, $a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$ とするとき, $[a,b] \subset I$ となるが, 次が成り立つ.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

(証明）$F'(x)=f(x)$ とするとき

$$(F(\phi(t))'=f(\phi(t))\phi'(t)$$

なので,

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta\Big(F(\phi(t))\Big)'\,dt=F(\phi(\beta))-F(\phi(\alpha))=F(b)-F(a)$$

$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

となる.

例題 19.1 $a>0$ として,

$$I=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}a^2.$$

(解）$x=a\sin t$ $(0\le t\le \frac{\pi}{2})$ により

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}(a\cos t)\,dt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2$$

を得る.
(別法)

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}(\frac{x}{a})\right)$$

であることを知っていれば,

$$I=\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}(\frac{x}{a})\right)\right]_0^a=\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}1=\frac{a^2}{4}\pi$$

とできる.

19.2 いくつかの特別な例

例題 19.2 n を自然数として,

$$I_n:=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

を計算せよ.

(解）. まず, $x=\frac{\pi}{2}-t$ として,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$$

でもあることに注意しておく.

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\frac{\pi}{2},\quad I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

また,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-1}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{n-1}x(-\cos x)'\,dx$$

$$=\Big[\sin^{n-1}x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(\cos x)\times(-\cos x)\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx\ (n\geq 2)$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_{n-1}$$

となる. よって, $nI_n=(n-1)I_{n-2}$ $(n\geq 2)$ となる. つまり,

$$I_n=(\frac{n-1}{n})I_{n-2}\ (n\geq 2).$$

以上より, n が偶数のとき

$$\begin{aligned}I_n&=(\frac{n-1}{n})I_{n-2}=(\frac{n-1}{n})(\frac{n-3}{n-2})I_{n-4}\\&=(\frac{n-1}{n})(\frac{n-3}{n-2})\cdots(\frac{3}{4})(\frac{1}{2})I_0\\&=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-3)(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-2)\cdot n}\times\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

を得る. n が奇数のとき

$$\begin{aligned}I_n&=(\frac{n-1}{n})I_{n-2}=(\frac{n-1}{n})(\frac{n-3}{n-2})I_{n-4}\\&=(\frac{n-1}{n})(\frac{n-3}{n-2})\cdots(\frac{4}{5})(\frac{2}{3})I_1\\&=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-3)\cdot(n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)n}\times 1\end{aligned}$$

を得る.

• 次は, 特殊な公式である.

例題 19.3 $f(x)$ を $[0,1]$ 上の連続関数とする. このとき, 次のことが成り立つ.

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx.$$

（解）

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx := I_1 + I_2$$

であるが, $x = \pi - t$ により

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t)) \times (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t)f(\sin t)\,dt = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt - I_1$$

となる. 以上より, 求める式を得る.

例題 19.4

$$I := \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

の値を求めよ.

（解） 先ほどの例題から

$$I = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

となるが, $t = \cos x$ として,

$$I = \int_1^0 \frac{(-1)}{1+t^2}\,dt = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi[\tan^{-1} t]_0^1 = \frac{\pi^2}{4}$$

を得る.

- 次の例も特殊な例である.

例題 19.5

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\log 2.$$

(解） $x = \tan t$ とおくと,

$$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t},\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

などより

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan t)\cos^2 t \times \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\frac{\cos t + \sin t}{\cos t})\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\frac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-t)}{\cos t})\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log(\sqrt{2})\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(\frac{\pi}{4}-t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\,dt
\end{aligned}$$

となる. ここで, $s = \frac{\pi}{4} - t$ により

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos(\frac{\pi}{4}-t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \log(\cos s) \times (-\,ds) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin s)\,ds$$

となることから,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\log(\sqrt{2})\,dt = \log(\sqrt{2}) \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\log 2$$

となる.

19.3　直交関数系

• $[a,b]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ で, ある正数 c_m があって,

$$\int_a^b f_n(x)f_m(x)\,dx = c_m\delta_{nm}$$

を満たすものを, 直交関数系と呼ぶ. (ただし, δ_{nm} はクロネッカーのデルタ記号と呼ばれ,

$$\delta_{nm} = 0\ (n \neq m), \delta_{nm} = 1\ (n = m)$$

で定義される.)
• もっとも有名な直交関数系は以下の三角関数系である.

例題 19.6 自然数 m, n に対して, 次が成り立つ.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \pi\delta_{mn}.$$

(解) まず

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos(mx+nx) + \cos(mx-nx))$$

なので, $m \neq n$ なら

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \Big[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+n}\sin((m+n)x) + \frac{1}{m-n}\sin((m-n)x)\right)\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$m = n$ なら

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(2mx)+1)\,dx = \left[\frac{1}{4m}\sin(2mx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

• ちなみに, 自然数 m, n に対して, 次が成り立つことが同様にしてわかる.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \pi\delta_{nm}.$$

19.4　テーラーの定理の積分形

• 微分積分の基本定理を用いることで, テーラーの定理の積分形を得ることが出来る. 簡単のため, $x = 0$ のまわりでのマクローリンの定理の積分形を紹介しておこう.

定理 19.3 $f(x)$ は開区間 I 上で C^n-関数とし, $0 \in I$ とする. このとき, 任意の $x \in I$ に対して次が成り立つ.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

(証明) $x \in I$ を固定する. 微分積分の基本定理より

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt.$$

ここで,

$$\frac{d}{dt}(t-x) = 1$$

注意することで, さらに

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{d}{dt}(t-x)f'(t)\,dt$$

$$= \Big[(t-x)f'(t)\Big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x (t-x)f''(t)\,dt = f'(0)x + \int_0^x (x-t)f''(t)\,dt$$

を得る. さらに,

$$(x-t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}(t-x)^2\right)$$

に注意して,

$$\int_0^x (x-t)f''(t)\,dt = \left[-\frac{1}{2}(t-x)^2\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{2}\int_0^x (t-x)^2 f'''(t)\,dt = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)\,dt$$

を得る. 従って,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)\,dt$$

となる. 以下この操作をおこなうことで, 定理の主張をえることがわかる.

20 広義積分

21 広義積分

21.1 広義積分の定義

今までは, 有界閉区間上の連続関数の定積分について学んできたが, 半開区間 $[a, b)$ 上で連続であって, $\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty$ である場合や, $f(x)$ が無限区間 $[a, +\infty)$ 上で連続で

ある場合に, 広義積分

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

などの定義やその存在条件を学ぼう.

♣ 広義積分は, 高校での数 III では扱えなかった話題で, しかし無限領域の面積の計算など重要な話題である.

定義 21.1 *(1)* $f(x)$ が半開区間 $[a,b)$ で連続で, $x \to b$ で有界でないとき, $\epsilon > 0$ として, 極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

が（有限値として）存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

と定める. 極限が存在しないとき, 広義積分は発散するという.

あるいは, 同じことであるが, $a < t < b$ なる t をとって, 極限

$$\lim_{t \to b-0} \int_a^t f(s)\,ds$$

が存在するとき, 広義積分は収束するといっても同じことである.

(2) $f(x)$ が半開区間 $(a,b]$ で連続で, $x \to a$ で有界でないとき, $\epsilon > 0$ として, 極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

が（有限値として）存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

と定める.

(3) $f(x)$ が開区間 (a,b) で連続で, $x \to a$ および $x \to b$ で有界でないとき, $a < c < b$ を 1 つとる. $\epsilon > 0$ として, 極限

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{c} f(x)\,dx$$

と,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{c}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

がともに存在するとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{c}^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

と定める. *(このとき, c の取り方によらずに, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の値は定まることがわかるので, c のとり方は何でも良い.)*

定義 21.2 $f(x)$ が半開区間 $[a,+\infty)$ で連続であるとき, $M>a$ として, 極限

$$\lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

が（有限値として）存在するとき, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ は収束するといって, その値を

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_a^M f(x)\,dx$$

と定める. もし極限値が存在しないとき, その広義積分は発散するという.
同様に, 広義積分

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

の収束・発散も定義される.

21.2 広義積分の例

● 以下の 3 つの例は, 典型的な広義積分の例として, その収束・発散の条件とともに, 重要である.

例題 21.1 $\alpha>0$ として, $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ は区間 $(0,1]$ 上で連続である. このとき, 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

が収束するための必要十分条件は, $\alpha<1$ であることである.

(証明) このことを, 以下確かめよう. $1>\epsilon>0$ とする. $\alpha\neq 1$ の場合,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_{x=\epsilon}^{x=1} = \frac{1}{1-\alpha}(1-\epsilon^{1-\alpha})$$

となる. よって $0<\alpha<1$ ならば, $\epsilon\to 0$ で極限値 $\frac{1}{1-\alpha}$ をもち, $\alpha>1$ なら, $\epsilon\to 0$ で $+\infty$ となる. また, $\alpha=1$ の場合,

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_{x=\epsilon}^{x=1} = -\log\epsilon \to +\infty \ (\epsilon\to 0)$$

となる. 以上より, 最初の主張を得る.

例題 21.2 $\beta>0$ として, $f(x)=\frac{1}{x^\beta}$ は区間 $[1,+\infty)$ 上で連続である. このとき, 広義積分

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx$$

が収束するための必要十分条件は, $\beta>1$ であることである.

(証明) $M>1$ とする. $\beta\neq 1$ の場合,

$$\int_1^M \frac{1}{x^\beta}\,dx = \left[\frac{1}{1-\beta}x^{1-\beta}\right]_{x=1}^{x=M} = \frac{1}{1-\beta}(M^{1-\beta}-1)$$

となる. よって $\beta>1$ ならば, $M\to+\infty$ で極限値 $\frac{1}{\beta-1}$ をもち, $\beta<1$ なら, $M\to+\infty$ で $+\infty$ となる. また, $\beta=1$ の場合,

$$\int_1^M \frac{1}{x^\beta}\,dx = \int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log x\Big]_{x=1}^{x=M} = \log M \to +\infty\ (M\to+\infty)$$

となる. 以上より, 最初の主張を得る.

例題 21.3 次の広義積分は収束して, その値も次の通り.

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

実際, $M>0$ として,

$$\int_0^M e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^M = 1-e^{-M} \to 1\ (M\to+\infty)$$

となるからである.

21.3 広義積分の収束条件, 比較判定法

• 広義積分が収束するための条件を, 次のコーシーの収束条件として理解することは重要である.

命題 21.1 $f(x)$ は半開区間 $(a,b]$ 上で連続であるとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための必要十分条件は次の条件が成り立つことである:
「任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ が存在して, $a<x<t<a+\delta$ なる任意の x,t に対して,

$$|\int_x^t f(s)\,ds| < \epsilon$$

が成り立つ.」

(証明)

$$g(t) := \int_t^b f(s)\,ds\ (a<t<b)$$

と定義する. このとき, 定義により, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束することは, 極限 $\lim_{t\to a} g(t)$ が存在することである. ここで, 極限の存在をコーシーの条件で書くと, 次のようになることを思い出そう:

「任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ があって, $a < t < t' < a + \delta$ なる t, t' に対して

$$|g(t) - g(t')| < \epsilon$$

が成り立つ.」. このとき, $g(t)$ の定義から

$$|g(t) - g(t')| = |\int_t^b f(s)\,ds - \int_{t'}^b f(s)\,ds| = |\int_t^{t'} f(s)\,ds|$$

であることに注意すれば, 命題の主張が成り立つことがわかる.

命題 21.2 $f(x)$ は半開区間 $(a, b]$ 上で連続であるとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束すれば, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ も収束する

(証明). 仮定と命題 21.1 より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $a < x < t < a + \delta$ なる任意の x, t に対して,

$$\int_x^t |f(s)|\,ds < \epsilon$$

が成り立つ. このとき, $a < x < t < a + \delta$ なる任意の x, t に対して,

$$|\int_x^t f(s)\,ds| \leq \int_x^t |f(s)|\,ds < \epsilon$$

が成り立つことになるので, 命題 21.1 より, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束すると言える.

定義 21.3 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ が収束するとき, **広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は絶対収束する**という.

- $f(x) \geq 0$ なる関数 $f(x)$ に対する広義積分の収束条件については, 次の条件が成り立つことであるといっても良い.

命題 21.3 $f(x)$ は半開区間 $(a, b]$ 上で連続であって, かつ $f(x) \geq 0$ $(a < x \leq b)$ であるとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が収束するための必要十分条件は次の条件が成り立つことである:
「ある $M > 0$ が存在して, 任意の $t \in (a, b)$ に対して,

$$\int_t^b f(s)\,ds \leq M$$

が成り立つ.」

(証明).

$$g(t) := \int_t^b f(s)\,ds \ (a < t < b)$$

と定義する. と, 仮定 $f(x) \geq 0$ $(a < x \leq b)$ より, $g(t)$ は t の単調関数である. つまり, $a < t_1 < t_2 < b$ ならば, $g(t_1) \geq g(t_2)$ が成り立つ. 従って, 極限 $\lim_{t \to a} g(t)$ が存在することと, 上記の条件を満たすこととは同値であることに注意すればよい.

命題 21.4 (比較判定法) $f(x), g(x)$ は半開区間 $(a,b]$ 上で連続であって,

$$|f(x)| \leq g(x) \ (a < x \leq b)$$

を満たすとする. このとき, 広義積分 $\int_a^b g(x)\,dx$ が収束しれば, 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ も収束する

(証明) 仮定と命題 21.3 から, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $t \in (a,b)$ に対して, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $t \in (a,b)$ に対して,

$$\int_t^b f(s)\,ds \leq M$$

が成り立つ. このとき,

$$\int_t^b |f(s)|\,ds \leq \int_t^b g(s)\,ds \leq M \ (\forall t \in (a,b))$$

となるので, 命題 21.3 から結論を得る.

注意 21.1 命題 *21.2, 21.3, 21.4* は, $[a,b)$ や $[a,+\infty)$ などの広義積分に対しても, 同様に成り立つことに注意しておく.

比較判定法を活用した典型的な判定条件を学んでおこう.

命題 21.5 $f(x)$ は半開区間 $(a,b]$ 上で連続であるとする.
(1) もし, ある $M > 0$ とある $p \in (0,1)$ があって,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(x-a)^p} \ (a < x \leq b)$$

が成り立つならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する
(2) もしある $p \in (0,1)$ があって,

$$\lim_{x \to a} (x-a)^p f(x)$$

が存在するならば, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する.

(証明) (1) $p \in (0,1)$ なので, 広義積分

$$\int_a^b \frac{M}{(x-a)^p}\,dx$$

が収束することは直ぐにわかる. よって, 比較判定法より, 広義積分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ は収束する, 従って, また広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ も収束する

(2) 仮定から, $A := \lim_{x\to a}(x-a)^p f(x)$ として, $\epsilon - \delta$ 論法で $\epsilon = 1$ に対して）ある $\delta > 0$ が存在して, $a < x < a+\delta$ に対して

$$|(x-a)^p f(x) - A| \leq 1$$

が成り立つ. 特に,

$$|(x-a)^p f(x)| \leq A+1 \ (a < \forall x < a+\delta)$$

が成り立つ. 従って, $M = A+1$ として, (1) から広義積分 $\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx$ が収束する. $f(x)$ は, $[a+\delta, b]$ 上では連続なので, 広義積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ も収束することとなる.

命題 21.6 $a > 0$ とする. $f(x)$ は半開区間 $[a, +\infty)$ 上で連続であるとする.
(1) もし, ある $M > 0$ とある $q > 1$ があって,

$$|f(x)| \leq \frac{M}{x^q} \ (a \leq x < +\infty)$$

が成り立つならば, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ は収束する
(2) もしある $q > 1$ があって,

$$\lim_{x\to+\infty} x^q f(x)$$

が存在するならば, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ は収束する.

(証明) (1) $q > 1$ なので, 広義積分

$$\int_a^{+\infty} \frac{M}{x^q}\,dx$$

が収束することは直ぐにわかる. よって, 比較判定法より, 広義積分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ は収束する, 従って, また広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ も収束する
(2) 仮定から, $B := \lim_{x\to+\infty} x^q f(x)$ として, ある $M > 0$ が存在して,

$$|x^q f(x)| \leq B+1 \ (M \leq \forall x < +\infty$$

が成り立つ. 従って, $M := B+1$ として, (1) から広義積分 $\int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ が収束する. $f(x)$ は, $[a, M]$ 上では連続なので, 広義積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ も収束することとなる.

例題 21.4 次の広義積分は収束する.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x^2)\,dx.$$

なぜなら, $f(x) := e^{-x}\cos(x^2)$ とおくとき,

$$|f(x)| \leq e^{-x} \ (0 \leq x < +\infty)$$

であって, 広義積分 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ が収束するので, 比較判定法により, 上記の広義積分も収束する.

♣ 定義に従って, まず $M > 0$ に対して

$$\int_0^M e^{-x}\cos(x^2)\,dx$$

を計算しようとしても, 難しい. 広義積分の収束・発散の判定には, 比較判定法が便利である.

例題 21.5 次の広義積分は発散する.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx.$$

この例の場合, 定義に従って, $\epsilon > 0$ として

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx$$

を計算して, $\epsilon \to 0$ での極限を調べても出来るが, 比較判定法を用いた方がよい. 今,

$$\frac{1}{(1-x)(1+x^2)} \geq \frac{1}{(1-x)(1+1)} = \frac{1}{2(1-x)}\ (0 < x \leq 1)$$

が成りたち, 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)dx$$

が発散するので, 比較判定法により, 広義積分

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}\,dx.$$

も発散する.

21.4 応用例

例題 21.6 広義積分

$$I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$$

は収束し, その値は

$$I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

となる.

(証明) まず, $f(x) := \log(\sin x)$ は, $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ で連続であることに注意しよう. さらに, ロピタルの定理より,

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}(\log(\sin x)) = \lim_{x\to+0}\frac{\log(\sin x)}{x^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+0}\frac{(\frac{\cos x}{\sin x})}{(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to+0}(-2)(\cos x)\times\frac{x}{\sin x}\times\sqrt{x} = 0$$

であるので, ある $\delta > 0$ があって

$$|\log(\sin x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\ (0 < x \leq \delta)$$

を得る. このことから, 広義積分 I が収束することがわかる.
次に, 広義積分 I の値を求めてみよう. (オイラーによる計算といわれている.) $\epsilon > 0$ とする. 変数変換 $x = \pi - t$ により, $\sin(\pi - t) = \sin t$ に注意して,

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin(\pi - t))\,(-1)\times dt$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\epsilon}\log(\sin t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin t)\,dt$$

となる. 一方, 変数変換 $x = \frac{\pi}{2} - t$ により, $\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$ に注意して,

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{0}\log(\sin(\frac{\pi}{2} - t))\,(-1)\times dt$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}\log(\cos t)\,dt = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos t)\,dt$$

を得る. よって, 最初の式から

$$2I = \int_0^{\pi}\log(\sin x)\,dx,$$

となり, ここで $x = 2t$ と変数変換すれば (簡単のため, 広義積分のまま変数変換の公式を使う)

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin(2t))\times 2\,dt$$

なので

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin(2t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(2\sin t\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\log 2 + \log(\sin t) + \log(\cos t)\Big)\,dt = (\log 2)\frac{\pi}{2} + 2I$$

となる. ここで, 上で示した

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t)\, dt$$

を用いた. 従って,

$$I = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

を得る.

例題 21.7 (ガンマ関数) *$s > 0$ に対して,*

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

は収束する. これをガンマ関数という. さらに, 次の公式が成り立つ:
(1) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s > 0)$.
(2) 自然数 n に対して, 次が成り立つ.

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

(証明). まず広義積分の収束を確かめよう.

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\, dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

である.

$$x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s-1} \ (0 < x \leq 1)$$

であって, 仮定の $s > 0$ より, $1 - s < 1$ となることから, $\int_0^1 x^{s-1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-s}}\, dx$ が収束することがわかる. よって, 比較判定法により, 広義積分

$$\int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

は収束する. $x \geq 1$ の場合, まず e^x のマクローリン展開より, 任意の自然数 m に対して

$$e^x \geq \frac{x^m}{m!} \ (x > 0)$$

が成り立つことを用いる. $s > 0$ に対して $m > s$ であるような自然数 m をとると,

$$x^{s-1} e^{-x} \leq x^{s-1} \frac{m!}{x^m} = \frac{m!}{x^{m+1-s}} \ (x \geq 1)$$

であって, $m + 1 - s > 1$ であるので広義積分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{m+1-s}}\, dx$ が収束する. よって, 比較判定法により, 広義積分

$$\int_1^{+\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

も収束することがわかる. (授業での説明を少し違う説明を行った.)

(1)
$$\Gamma(s+1) = \lim_{\epsilon\to 0, M\to+\infty}\int_\epsilon^M x^s e^{-x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0, M\to+\infty}\int_\epsilon^M x^s(-e^{-x})'\,dx$$
であって, 部分積分することで,
$$\int_\epsilon^M x^s(-e^{-x})'\,dx = \Big[x^s(-e^{-x})\Big]_{x=\epsilon}^{x=M} - \int_\epsilon^M (x^s)'(-e^{-x})\,dx$$
$$= (\epsilon^s e^{-\epsilon} - M^s e^{-M}) + s\int_\epsilon^M x^{s-1}e^{-x}\,dx$$
$$\to 0 + s\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\,dx = s\Gamma(s)\ (\epsilon\to 0, M\to+\infty)$$
を得る. 以上より $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ $(s>0)$ を得る.
(2) (1) の公式より
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \cdots = n!\Gamma(1)$$
となる. また $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$ であるので $\Gamma(n+1) = n!$ を得る.

22　積分の応用

22.1　図形の面積

2 つの連続関数 $f(x), g(x)$ が
$$f(x) \geq g(x)\ (a \leq x \leq b)$$
を満たすとき, $y=f(x), y=g(x)$ および, $x=a, x=b$ で囲まれる図形の面積は
$$S = \int_a^b \Big(f(x) - g(x)\Big)\,dx$$
で表される.

例題 22.1 (アステロイド) $a>0$ として, 曲線
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$
で囲まれる図形の面積 S を求める問題.

(解) パラメータ表示
$$x = x(t) = a\cos^3 t, \quad y = y(t) = a\sin^3 t\ (0 \leq t \leq 2\pi)$$

をもつ.

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t,\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$$

なので, 特に, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ で,

$$x'(t) \le 0, y'(t) \ge 0,$$

であるので, 接ベクトル $(x'(t), y'(t))$ の向きを考慮して, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ の範囲で, 点 $(a, 0)$ から左上の向きに動いて, 点 $(0, a)$ に到達する曲線上の点の動きがわかるであろう. さらに, $y = y(x)$ としてのグラフの傾きが

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t$$

であることを考えることでそのグラフの概形を書くことができるであろう. 図形は x 軸, y 軸に対して対称であることを考慮して,

$$\frac{S}{4} = \int_0^a y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin^3 t \times x'(t)\,dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 3a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t\,dt\right)$$

となる. ここで

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$$

とおくとき, n が偶数の場合,

$$I_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} \times \frac{\pi}{2}$$

であったので,

$$\frac{S}{4} = 3a^2(I_4 - I_6) = 3a^2 \times \frac{\pi}{32}.$$

よって $S = \frac{3}{8}a^2\pi$ を得る.

• $f(x, y) = 0$ で表される曲線を極座標

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

を用いて, $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ と表すとき, 極方程式とも呼ぶ. これが, 特に $r = G(\theta)$ と表される場合を考えよう.

定理 22.1 曲線 C が極方程式で

$$r = G(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$$

で表されるとする. ただし, $G(\theta)$ は θ の連続関数とする. このとき, 曲線 C と $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれる図形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta G(\theta)^2\,d\theta$$

となる.

(”証明”) (図形の面積とは何か？という正確な定義は後期の「微分積分 II」で学ぶことになるので, ここでは近似的な説明を行うことになる.)
$\alpha \leq \theta \leq \beta$ として, 曲線 C と $\theta = \alpha$, $\theta = \theta$ で囲まれる図形の面積を $S(\theta)$ で表す. このとき, $h > 0$ を十分小として, $S(\theta + h) - S(\theta)$ を考えるとき, これは, $G(\theta + h) \sim G(\theta)$ として, 角度 h をはさむ 2 辺の長さが $G(\theta)$ である 2 等辺三角形の面積に近似的に等しいと考えることが出来るので,

$$S(\theta + h) - S(\theta) \sim G(\theta)\cos(\frac{h}{2}) \times G(\theta)\sin(\frac{h}{2}) = \frac{1}{2}G(\theta)^2 \sin h$$

となる. よって,

$$\frac{S(\theta + h) - S(\theta)}{h} \sim \frac{1}{2}G(\theta)^2\frac{\sin h}{h} \to \frac{1}{2}G(\theta)^2 \ (h \to 0)$$

が成り立つ. よって $S'(\theta) = \frac{1}{2}G(\theta)^2$ となり,

$$\int_\alpha^\beta S'(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta G(\theta)^2\, d\theta$$

を得る. ここで微分積分の基本公式より, 左辺は $S(\beta) - S(\alpha) = S(\beta) = S$ となるので, 定理の主張を得る.

例題 22.2 (カルデオイド) $a > 0$ として,

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

で表される曲線を考える. 極方程式は

$$(r^2 - ar\cos\theta)^2 = a^2r^2$$

より,

$$(r - a\cos\theta)^2 = a^2$$

となるが, $r > 0$ より

$$r = a\cos\theta + a = a(1 + \cos\theta),\ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

となる.

$$x = x(\theta) = r\cos\theta = a(1 + \cos\theta)\cos\theta,\ y = y(\theta) = r\sin\theta = a(1 + \cos\theta)\sin\theta,$$

である. これより

$$x'(t) = -a\sin\theta(1 + 2\cos\theta),\ y'(t) = a(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

となる. これらより $0 \leq \theta \leq \pi$ での曲線の点の動きを追うことができる. また, $r'(\theta) = -s\sin\theta \leq 0\ (0 \leq \theta \leq \pi)$ より, $0 \leq \theta \leq \pi$ において, $r = r(\theta)$ は単調減少であることに注

意しよう. (教科書にあるこの曲線の概形を参考にされたい.) 曲線 C は x 軸に関して対称であることから,

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos(2\theta)}{2})\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{a^2}{2}\times\frac{3}{2}\pi$$

となる. よって $S = \frac{3}{2}a^2\pi$.

例題 22.3 (レムニスケート) $a > 0$ として,

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

で表される曲線を考える. $x^2 \geq y^2$, すなわち $|y| \leq |x|$ の範囲に曲線 C は含まれることに注意する. 極方程式は

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

なので,

$$r^2 = a^2\cos(2\theta)$$

となり, $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ と書ける. ただし, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ または $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{5}{4}\pi$. ここで, $y(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta$ なので

$$y'(\theta) = a\frac{1}{2}(\cos(2\theta))^{-\frac{1}{2}}\sin\theta + a\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta$$

$$= a\cos\theta\frac{(1-4\sin^2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$$

なので,

$$y'(t) > 0\ (0 < \theta < \frac{\pi}{6}), \quad y'(t) < 0\ (\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{4})$$

となることから, グラフの概形が書けることになる.

またこの曲線は x 軸, y 軸に関して対称であることから

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{8}$$

となるので, $S = \frac{a^2}{2}$.

22.2 曲線の長さ

まず, 曲線 C は,

$$x = x(t), y = y(t)\ (a \leq t \leq b),$$

ただし, $x(t), y(t)$ は $[a,b]$ 上の連続関数とする. 曲線 C の長さを定義しよう. 区間 $[a,b]$ の分割:

$$\Delta\ :\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

に対して, C 上の点

$$P_i = (x(t_i), y(t_i))\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

を考える. 分割 Δ に対応する折れ線 Γ($\Gamma(\Delta)$ とも書く）を

$$\Gamma = \overline{P_0P_1} \cup \overline{P_1P_2} \cup \cdots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$$

の長さを

$$L(\Gamma)(= L(\Gamma(\Delta)) := \sum_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

で定義する. このとき, すべての分割 Δ に関する $L(\Gamma(\Delta))$ の上限を考え

$$L := \sup_{\Delta} L(\Gamma(\Delta))$$

が有限値であるとき, 曲線 C は長さをもつといい, L を C の長さという.

♣ 長さを持たない連続曲線 C も存在する. (教科書に 1 つの例が挙げられているので参照されたい.)

• 分割 Δ の幅 $\delta(\Delta)$ を

$$\delta(\Delta) := \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i,\ \ \delta_i = (t_i - t_{i-1})$$

で定義する.

定理 22.2 分割の列 $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\delta(\Delta_k) \to 0\ (k \to +\infty)$ を満たすとし, Δ_k に対応する折れ線を $\Gamma_k = \Gamma(\Delta_k)$ とする. このとき, $\lim_{k \to +\infty} L(\Gamma_k)$ が存在することと, 曲線 C が長さをもつこととは同値となる. さらに

$$L = \sup_{\Delta} L(\Gamma(\Delta)) = \lim_{k \to +\infty} L(\Gamma_k)$$

が成り立つ.

(証明は略す.)

定義 22.1 曲線 $C : x = x(t), y = y(t)\ (a \leq t \leq b)$ がなめらかとは, $x(t), y(t)$ が C^1-関数であって, さらに

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0\ (\forall t \in [a,b])$$

が成り立つことである.

定理 22.3 なめらかな曲線 $C:\ x = x(t), y = y(t)\ (a \leq t \leq b)$ は長さをもち, その長さ L は次で与えられる.

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

（証明）まず

$$M := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

と置く. これは, 仮定から $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ が $[a, b]$ 上で連続であることから存在する. 区間 $[a, b]$ の分割:

$$\Delta\ :\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

に対応する $\Gamma(\Delta)$ の長さは, ある $c_i \in [t_{i-1}, t_i], d_i \in [t_{i-1}, t_i]$ が存在して

$$L(\Gamma(\Delta)) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(c_i)(t_i - t_{i-1}))^2 + (y'(d_i)(t_i - t_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x'(c_i)^2 + (y'(d_i)^2}\delta_i$$

と書ける. ここで, $y'(t)$ の $[a, b]$ での一様連続性から, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ があって, $|t - t'| < \delta, t, t' \in [a, b]$ ならば $|y'(t) - y'(t')| < \epsilon$ が成り立つ. よって, $\delta(\Delta) < \delta$ とすると, $|c_i - d_i| \leq \delta_i \leq \delta(\Delta) < \delta$ となるので,

$$|y'(c_i) - y'(d_i)| < \epsilon\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

が成り立つことになる.　ここで, 次の補題を用いることで,

$$|\sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(d_i))^2} - \sqrt{(x'(c_i))^2 + (y'(c_i))^2} \leq |y'(d_i) - y'(c_i)| < \epsilon$$

を得る.

補題 22.1 任意の a, b, c に対して, 次が成り立つ.

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|.$$

(補題の証明) 平面上の 3 点 $O(0, 0), A(a, b), B(a, c)$ として 3 角形 OAB を考えて, $\overline{OA} \leq \overline{OB} + \overline{BA}$ なので

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + |b - c|.$$

つまり,

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \leq |b - c|.$$

同様に, $\overline{OB} \leq \overline{OA} + \overline{AB}$ なので

$$\sqrt{a^2 + c^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + |b - c|.$$

つまり,

$$\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2} \le |b-c|.$$

これらをあわせて, 求める不等式を得る.
さて, 本筋にもどろう. 以上のことから, $\delta(\Delta) < \delta$ なる分割 Δ に対して,

$$|L(\Gamma(\Delta)) - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(c_i))^2+(y'(c_i))^2}\delta_i| \le \sum_{i=1}^{n} \epsilon\delta_i = \epsilon(b-a)$$

が成り立つこととなる. また, $\delta(\Delta) \to 0$ で

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(c_i))^2+(y'(c_i))^2}\delta_i \to M$$

なので, ある $0 < \delta_1 < \delta$ が存在して, $\delta(\Delta) < \delta_1$ ならば,

$$|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(c_i))^2+(y'(c_i))^2}\delta_i - M| \le \epsilon$$

が成り立つ. 以上より, $\delta(\Delta) < \delta_1$ ならば,

$$|L(\Gamma(\Delta)) - M| \le (b-a)\epsilon + \epsilon$$

が成り立つこととなる. このことは, $\lim_{\delta(\Delta)\to 0} L(\Gamma(\Delta))$ が存在して M であることを意味する. よって, 定理から

$$L = \lim_{\delta(\Delta)\to 0} L(\Gamma(\Delta)) = M$$

を得る.

系 22.1 C^1-関数 $f(x)$ に対して, 曲線 $C:\ y=f(x)\ (a \le x \le b)$ の長さは, 次で与えられる.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

(証明). 曲線 C は, $x=t, y=f(t),\ (a \le t \le b)$ とパラメータ表示され, るので,

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$$

となる.

系 22.2 C^1-関数 $r(\theta)$ を用いて, 曲線 C が極方程式 $C:\ r=r(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$ で表されるとき, その長さは次で与えられる.

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r'(\theta))^2}\,d\theta.$$

（証明）. 曲線 C は

$$x = x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, \quad y = y(\theta) = r(\theta)\sin\theta, \ (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

とパラメータ表示されるので,

$$x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r\sin\theta, \quad y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r\cos\theta$$

であることから,

$$\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = \sqrt{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta)^2} = \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

をえる. 従って, 求める公式が成り立つ.

例題 22.4 (カルデオイド) $a > 0$ として, 極方程式

$$r = a(1 + \cos\theta) \ (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

曲線（カルデオイド）の長さ L は,

$$\begin{aligned}
\frac{L}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2(-\sin\theta)^2}\, d\theta \\
&= a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = \sqrt{2}a \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2(\frac{\theta}{2})}\, d\theta \\
&= 2a\int_0^{\pi} \cos(\frac{\theta}{2})\, d\theta = 4a.
\end{aligned}$$

よって, $L = 8a$ をえる.

23　ワリスの公式、スターリングの公式

23.1　ワリスの公式

定理 23.1

$$\begin{aligned}
w_n &:= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n)}{(2n-1)}\cdot\frac{2n}{(2n+1)} \\
&= \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}
\end{aligned}$$

とおくとき, $w_n \to \frac{\pi}{2}$ $(n \to +\infty)$ が成り立つ.

(証明) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で, $0 < \sin x < 1$ なので

$$0 < \sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \ (n \geq 1)$$

が成り立つ. そこで

$$I_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x \, dx \ (k \geq 0)$$

とおくとき,

$$0 < I_{2n;1} < I_{2n} < I_{2n-1}$$

を得る. I_k に対しては, 前回計算してあるので, それをもちいると

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2) \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} \times \frac{\pi}{2} < \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$$

となる. この両辺に $\frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}$ をかけることで,

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{(3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2))^2 \times (2n)} \times \frac{\pi}{2} < 1$$

を得る. w_n の定義より, これを整理すると

$$\frac{2n}{2n+1} < \frac{2n}{(2n+1)w_n} \times \frac{\pi}{2} < 1$$

となる. 以上より

$$(\frac{2n}{2n+1})\frac{\pi}{2} < w_n < \frac{\pi}{2}$$

となるので, $w_n \to \frac{\pi}{2}$ $(n \to +\infty)$ なることが示された.

注意 23.1 あとで, ワリスの公式は次の形で用いる.

$$\frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n)} = (\frac{2n+1}{2n})w_n \to \frac{\pi}{2}.$$

23.2 スターリングの公式

• スターリングの公式は, $n!$ がどのくらい大きな数であるか（例えば, 何桁の数であるか？）を見積もるのに有効な公式である.

定理 23.2 (スターリングの公式) 次が成り立つ:

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \ (n \to +\infty).$$

より正確には, 次を意味する.

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} \to 1 \ (n \to +\infty).$$

(証明)

$$a_n := \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{1}{12n}}}, \quad b_n := \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$$

とおくと,

$$a_n = b_n e^{-\frac{1}{12n}}$$

という関係がある. ここで, さらに

$$c_n := \log a_n, \quad d_n := \log b_n$$

とおくと,

$$c_n = \log b_n - \frac{1}{12n} = d_n - \frac{1}{12n}$$

という関係が成り立つことに注意しておく.] さて, d_n の定義より

$$d_n = \log(n!) - \log(\sqrt{2\pi}) - (n + \frac{1}{2}) \log n + n$$

である. このとき次が成り立つ:
主張:

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{12}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

が成り立つ. よって, また

$$c_n < c_{n+1}$$

が成り立つ. ひとまずこの主張を認めて, 定理の証明を完成させよう. 上の主張より,

$$a_n < a_{n+1}, \quad b_n > b_{n+1}$$

となることがわかる. また, $a_n < b_n$ であることもわかるので,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < \cdots < b_2 < b_1$$

となる. さらにまた

$$0 < b_n - a_n = (e^{\frac{1}{12n}} - 1)a_n < (e^{\frac{1}{12n}} - 1)b_1$$

より, $|b_n - a_n| \to 0$ も成り立つ. 従って, 前期最初に学んだ実数の連続性より, $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともにある同じ実数 α に収束することとなる. すなわち,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \alpha.$$

ここで, 実は $\alpha = 1$ となることを示す. (そうすると, $b_n \to 1$ $(n \to +\infty)$ がわかることになり, これがスターリングの公式である.)
ここで,

$$a_n = b_n e^{-\frac{1}{12n}} < \alpha < b_n = b_n e^{-\frac{0}{12n}}$$

であることから, ある $\theta=\theta(n)\in(0,1)$ があって

$$\alpha=b_ne^{-\frac{\theta}{12n}}$$

とかけることとなる. このとき, b_n の定義より

$$n!=\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\alpha e^{\frac{\theta}{12n}}$$

と書けることにもなる. 従ってまた, $\theta'=\theta(2n)\in(0,1)$ として,

$$(2n)!=\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\alpha e^{\frac{\theta'}{24n}}$$

となることになるが, ワリスの公式：

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^4 2^{4n}}{(2n)((2n)!)^2}$$

に代入して,

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2\pi)^2n^{4n+2}e^{-4n}\alpha^4e^{\frac{\theta}{3n}}2^{4n}}{(2n)(2\pi)(2n)^{4n+1}e^{-4n}\alpha^2e^{\frac{\theta'}{12n}}}=\frac{\pi}{2}\alpha^2$$

を得る. よって $\alpha=1$ となって結論を得る.

系 23.1 (スターリングの公式の精密形) ある $\theta=\theta(n)\in(0,1)$ があって, 次が成り立つ*:*

$$n!=\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

(この証明は, 上記の証明の中で既に与えられている.)
(主張) の証明: まず

$$d_n-d_{n+1}=\left(\log(n!)-(n+\frac{1}{2})\log n+n\right)-\left(\log((n+1)!)-(n+1+\frac{1}{2})\log(n+1)+(n+1)\right)$$

$$=-(n+\frac{1}{2})(\log n-\log(n+1))-1=(n+\frac{1}{2})\log(\frac{n+1}{n})-1$$

となる. ここでさらに,

$$\frac{n+1}{n}=\frac{1+(\frac{1}{2n+1})}{1-(\frac{1}{2n+1})}$$

と書けることに注意することで,

$$d_n-d_{n+1}=(\frac{2n+1}{2})\log\left(\frac{1+(\frac{1}{2n+1})}{1-(\frac{1}{2n+1})}\right)-1$$

と書ける. ここで次のマクローリン展開を用いる：

$$\frac{1}{2}\log(\frac{1+t}{1-t})=t+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5+\cdots\quad(|t|<1).$$

(これについては, あとで説明する.) これを用いることで

$$d_n - d_{n+1} = (2n+1)\left((\frac{1}{2n+1}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2n+1})^3 + \frac{1}{5}(\frac{1}{2n+1})^5 + \cdots\right) - 1$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2n+1})^2 + \frac{1}{5}(\frac{1}{2n+1})^4 + \cdots < \frac{1}{3}\left((\frac{1}{2n+1})^2 + (\frac{1}{2n+1})^4 + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{2n+1})^2 \times \left(\frac{1}{1-(\frac{1}{2n+1})^2}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{12n(n+1)}$$

を得る. 途中の式より, $d_n - d_{n+1} > 0$ もわかるので

$$0 < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

を得ることができ, 示すべき主張をえる.

● 最後に上記で用いたマルローリン展開について説明しておこう. まず,

$$\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n-1}t^{n-1} + \cdots \quad (|t| < 1)$$

であることを用いる. これから

$$\log(1-t) = (-t) - \frac{1}{2}(-t)^2 + \frac{1}{3}(-t)^3 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n-1}(-t)^{n-1} + \cdots \quad (|t| < 1)$$

となり,

$$\log(\frac{1+t}{1-t}) = \log(1+t) - \log(1-t) = 2\left(t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \cdots\right)$$

となる. 以上より, 求めるマクローリン展開

$$\frac{1}{2}\log(\frac{1+t}{1-t}) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \cdots \quad (|t| < 1)$$

を得る.