６章　問題

（１）

粒子を有限な領域に閉じ込めると量子化(*)が起こる。(6)式を利用して、量子化のエネルギー幅 $E_2 - E_1$ を次の２つの場合について計算せよ。

(a)電子が長さ２Å$= 2\times 10^{-10}$m の領域に閉じ込められた場合

$$E_2 - E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_e L^2}(2^2 - 1^2) = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2m_e L^2} = \frac{3h^2}{8m_e L^2}$$
$$= \frac{3\times(6.6261\times10^{-34})^2}{8\times9.1094\times10^{-31}\times(2\times10^{-10})^2}\ \mathrm{J} = 0.4519\times10^{-17}\ \mathrm{J}$$

(b)質量1g の粒子が長さ10cm の領域に閉じ込められた場合

$$E_2 - E_1 = \frac{3\times(6.6261\times10^{-34})^2}{8\times1\times10^{-3}\times(1\times10^{-1})^2}\ \mathrm{J} = 16.464\times10^{-63}\ \mathrm{J}$$

ここで(b)のような日常的サイズでは量子化のエネルギー幅が観測不可能であることが了解できる。

（２）

粒子が $x = 0 \sim L/3$ 及び $x = L/3 \sim 2L/3$ に存在する確率は、それぞれ、

$$\int_0^{L/3} \Phi_n(x)^2 dx、\quad \int_{L/3}^{2L/3} \Phi_n(x)^2 dx$$

である。$n=1$ と $n=2$ に於いてそれぞれの値を求めよ。式や条件設定は全て本章に記述したものを使う。この結果は日常的な現象からの類推と一致するか反するかを議論せよ。

$n = 1$

$$\int_0^{L/3} \Phi_1(x)^2 dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/3}\sin^2\frac{\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\frac{1}{2}\int_0^{L/3}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\left[x - \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right]_0^{\frac{L}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.1955$$

$$\int_{L/3}^{2L/3} \Phi_n(x)^2 dx = \frac{2}{L}\int_{L/3}^{2L/3}\sin^2\frac{\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\frac{1}{2}\int_{L/3}^{2L/3}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\left[x - \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{L}\right]_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} = 0.60900$$

$n = 2$

$$\int_0^{L/3} \Phi_2(x)^2 dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/3}\sin^2\frac{2\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\frac{1}{2}\int_0^{L/3}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\left[x - \frac{L}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{L}\right]_0^{\frac{L}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8\pi} = 0.40225$$

$$\int_{L/3}^{2L/3} \Phi_2(x)^2 dx = \frac{2}{L}\int_{L/3}^{2L/3} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx = \frac{2}{L}\frac{1}{2}\int_{L/3}^{2L/3}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{L}\right)dx$$

$$= \frac{1}{L}\left[x - \frac{L}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{L}\right]_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi}\left[\sin\frac{8\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right] = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.19550$$

$n=1$では長さLの領域の中央部に粒子が見出される確率が高く、逆に$n=2$では周辺に見出される確率が高い。一方、箱型ポテンシャルの古典的イメージとして以下のように考えよう。長さLの細長い管にその間の内径より僅かに小さい直径の鉄球が封じ込められている。両端には鉄球を跳ね返すような(完全弾性衝突する)材質でフタがしてある。この鉄球をある初速度で走らせると、鉄球は両端で跳ね返りながら管内を往復するであろう。このとき、鉄球を見出す確率は管内のどこであっても一定であろう。この古典的描像と同等の描像は、量子論では$n \to \infty$であらわれる。

(*)『量子化』という言葉の内容ですが、本講義では『エネルギーが不連続になること』と同等に使っている。教科書によっては$p_x \to \hat{p}_x = (\hbar / i)\partial / \partial x$のように演算子に置き換えることを指す場合がある。同じことを違う側面から見たと了解して頂きたい。