

1章 電磁波

問題[1]

- (a) 第三代携帯電話が使う電磁波の周波数(振動数)は 2GHz 帯である。2.0 GHz= $2.0 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ の電磁波の波長を計算せよ。この電磁波は上図の分類では何と呼ばれるかを記せ。

$$c = \lambda \nu \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.0 \times 10^9 \text{ s}^{-1}} = 0.1499 \text{ m} \quad \text{この波長領域は超短波。}$$

蛇足だが、答えは概ね 15cm であり、ダイポールアンテナの効率が最大となる長さは半波長なので、そのアンテナの長さは 7cm 程度か(露出部は 3.5cm 程度??)。

- (b) 分子サイズは数 \AA である ($1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$)。分子サイズの波長をもつ電磁波は上図の分類では何と呼ばれるかを記せ。

X線領域である。化学結合の長さはX線回折によって測定することができる。

(照射 X 線の透過成分でフィルムを露光させて骨や患部の形を映す医療用の X 線像は回折現象を使っていませんので X 線の波長とは関係ありません。念のため。)

- (c) He-Ne レーザーの波長は 632.8 ナノメートル= $632.8 \times 10^{-9} \text{ m}$ である (コンビニにあるバーコード読み取り機の赤色発光である: 上図で色を確認せよ)。この光の振動数を計算せよ。

$$c = \lambda \nu \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}^{-1}}{632.8 \times 10^{-9} \text{ m}} = 4.738 \times 10^{14} \text{ s}^{-1} = 4.738 \times 10^{14} \text{ Hz} = 473.8 \text{ THz}$$

最後の項の THz はテラヘルツです。

- (d) (3)(4)式を $A = B$ として足し合わせると、(5)式を得ることを示せ。

$$\begin{aligned} y_+(x,t) + y_-(x,t) &= A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t \right) + A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \nu t \right) \\ &= 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t \end{aligned}$$

2章 光の波動性と粒子性

問題[1]

(a)可視光の波長は 700nm - 400nm である。700nm と 400nm の光の光子エネルギーを計算せよ。

(b)He-Ne レーザー光(波長は 632.8nm)の光子エネルギーを計算せよ。

(a) 光子エネルギーと波長の関係は、

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$700\text{nm} \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.6261 \times 10^{-34} \text{Js} \times 2.9979 \times 10^8 \text{m}}{700 \times 10^{-9} \text{m}} = 2.838 \times 10^{-19} \text{J}$$

$$400\text{nm} \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.6261 \times 10^{-34} \text{Js} \times 2.9979 \times 10^8 \text{m}}{400 \times 10^{-9} \text{m}} = 4.966 \times 10^{-19} \text{J}$$

電子の電荷 $e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{C}$ で割ると電子ボルト (eV) の単位に換算できる。

$$700\text{nm} \quad E = 2.838 \times 10^{-19} \text{J} = 1.771 \text{eV}$$

$$400\text{nm} \quad E = 4.966 \times 10^{-19} \text{J} = 3.099 \text{eV}$$

(b) He-Ne レーザー光(波長は 632.8nm)の光子エネルギーは次式である。

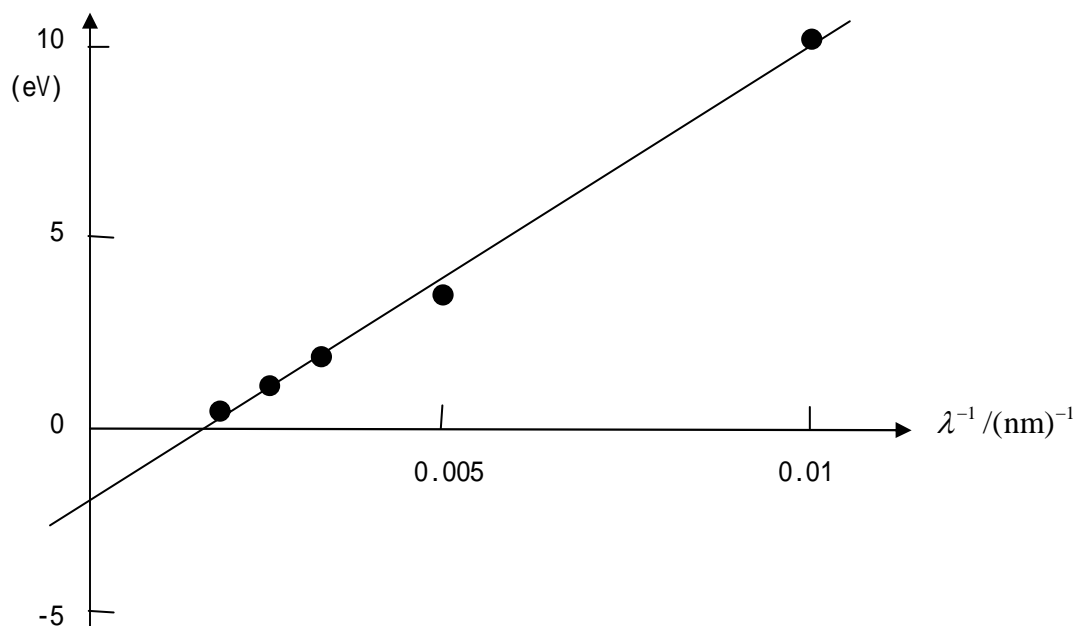
$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.6261 \times 10^{-34} \text{Js} \times 2.9979 \times 10^8 \text{m}}{632.8 \times 10^{-9} \text{m}} = 3.139 \times 10^{-19} \text{J} \quad 1.959 \text{eV}$$

問題[2]

(a)金属ナトリウムで光電効果の実験をした。入射光の波長と放出電子の最大運動エネルギーのデータは以下ようになった。 λ の逆数と電子のエネルギーをプロットして、直線の傾きと y 切片の値をもとめよ。この結果からプランク定数 h を求めよ。

波長 λ / nm	100	200	300	400	500
電子の最大エネルギー / eV	10.1	3.94	1.88	0.842	0.222

単位 nm はナノ(10^{-9})メートル。1 電子ボルトは1個の電子が1Vの電位差を移動する際に得る(失う)エネルギー：エネルギー単位の換算表を参照のこと。



λ の逆数と電子のエネルギーをプロットすると概ね上図のようになる(正確じゃなくてもいい)。直線の y 切片が -2eV 、傾きは $(12/0.01)=1200 \text{ (eV)(nm)}$ である。y 切片の±符号を変えた値は金属ナトリウムから電子が飛び出す際に必要なエネルギー(仕事関数)、傾きは $E = h\nu = hc/\lambda$ なので hc に対応する。y 切片からプランク定数 h を計算して J(ジュール)に換算すると、

$$h = \frac{1200(\text{eV} \times \text{nm})}{c} = \frac{1200 \times (1.6 \times 10^{-19}) \times 10^{-9}}{3 \times 10^8} \text{ Js} = 6.4 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

正確な値 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ と概ね一致している。

問題[3]

(a) 100V の電位差で加速された電子の速度とド・ブROI波長(物質波の波長)を求めよ。

電子(質量 m_e) の運動エネルギー E は電子の運動量 p をとして次式であるとする

$$E = \frac{p^2}{2m_e} \quad p = \sqrt{2m_e E}$$

100V の電位差から電子が得るエネルギーは 100eV である。従って、

$$E = 100 \times 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

これが全て運動エネルギーになったとする。ド・ブROI波長は次式となる。

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}} = \frac{6.6261 \times 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \times 9.1094 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 100 \times 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}}} \\ &= 0.12264 \times 10^{-9} \text{ m} = 122.64 \text{ pm} \end{aligned}$$

電子を 100V で加速するとそのド・ブROI波長は、丁度、化学結合の長さ程度になる。

(b) 100V の電位差で加速された陽子(プロトン)の速度とド・ブROI波長(物質波の波長)を求めよ。

100V の電位差から得るエネルギーは電子の場合と同じである。質量だけが異なる。

従って、

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_p E}} = \frac{6.6261 \times 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \times 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg} \times 100 \times 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}}} \\ &= 2.8621 \times 10^{-12} \text{ m} = 2.8621 \text{ pm} \end{aligned}$$

(c) 1 kg の粒子が 20 m/s の速度で直線運動しているとする。(7)式を使ってこの粒子のドブROI波長を計算してみよ。水素原子の直径を凡そ $1 \text{ (} 10^{-10} \text{ m)}$ とすると、このド・ブROI波長は水素原子の直径の何分の 1 であるかを示せ。

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.6261 \times 10^{-34} \text{ Js}}{1 \text{ kg} \times 20 \text{ ms}^{-1}} = 3.313 \times 10^{-35} \text{ m}$$

水素原子の直径の凡そ 3.313×10^{-25} 倍。このド・ブROI波長は観測不可能である。

問題[4]

$h\nu \ll k_B T$ であるとき、即ち、振動数が十分に小さいとき、式(5)は式(4)と同等であることを示せ。但し、 $|x| \ll 1$ のときに $e^x \approx 1+x$ であることを使う。次に、 $T = 600\text{K}$ かつ赤外線領域で、この条件 $h\nu \ll k_B T$ が満たされているかどうかを確認せよ。

$h\nu \ll k_B T$ であるとき $\exp(h\nu/k_B T) \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$ であるので、

$$E(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \approx \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{(h\nu/k_B T)} = \frac{8\pi k_B T \nu^2}{c^3} d\nu$$

赤外線領域の振動数として $\nu = 10^{14} \text{s}^{-1}$ あたりを想定しておこう。

$$h\nu = 6.6261 \times 10^{-34} \times 10^{14} \text{J} = 6.6261 \times 10^{-20} \text{J}$$

一方、 $T = 600\text{K}$ における平均的熱エネルギーは

$$k_B T = 1.3807 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1} \times 600\text{K} = 8.2842 \times 10^{-21} \text{J}$$

従って、 $h\nu \ll k_B T$ は何とか満たされている。