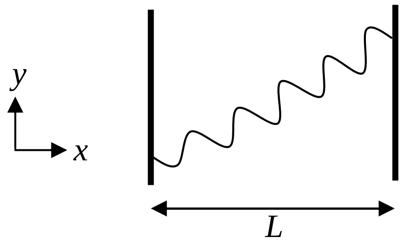
Appendix.　３次元箱中に存在する波動の数（Rayleigh-Jeans 式の導出補足）

３次元箱中に定常的に存在する電磁波は、その終端での電場強度がゼロである(１次元の場合と同じ)。誤解を招きそうな略図ですが、示しておきます。



もう少し厳密に式で示めします。箱の壁の位置で強度がゼロになる波動は次式で表現され、その振動状態は３個の正値(n_1, n_2, n_3)で指定されます。

$$E = E_0 \sin\frac{n_1\pi x}{L}\sin\frac{n_2\pi y}{L}\sin\frac{n_3\pi z}{L}\sin\frac{2\pi ct}{\lambda} \qquad \text{(a1)}$$

λは波長。壁の終端で電場強度が丁度ゼロになるために、(n_1, n_2, n_3)は整数となり、かつ次式を満たさねばなりません。

$$\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} = \frac{2L}{\lambda} \qquad \text{(a2)}$$

さて、

$$\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} < \frac{2L}{\lambda} \qquad \text{(a3)}$$

という条件を満たす３整数の組(n_1, n_2, n_3)は、n_1軸、n_2軸、n_3軸を直交座標として、原点から半径$\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$の球内部の格子点となります。$L$が十分に大きければ(格子点が十分に多ければ)、この条件を満たす格子点の個数Nは球の体積の$1/8$です($1/8$である理由は整数が$n_1 > 0,\ n_2 > 0,\ n_3 > 0$であるから)。従って、(a3)式を満たす整数組の個数Nを球の体積で近似して、

$$N = \frac{4\pi}{3}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{3/2} \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{3\times 2}\left[\frac{2L}{\lambda}\right]^3 = \frac{4\pi L^3}{3\lambda^3} = \frac{4\pi V}{3\lambda^3} \qquad \text{(a4)}$$

を得ます。但し$V = L^3$としています。波長領域$\lambda \sim \lambda + d\lambda$で整数$N$が増加する割合を求めるために、(a4)を$\lambda$で微分します。

$$\frac{dN}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{4\pi V}{3\lambda^3}\right] = -\frac{4\pi V}{\lambda^4}$$

ある方向に進行する電磁波には常に２つの偏光が存在することを考慮すると、電磁波の個数は上式の２倍となります。