1. 行列 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -5 \\ 5 & -3 & -5 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ.（40 点）

（１）A の固有多項式を求めよ.

（２）A の固有値と重複度を求めよ.

（３）A の各固有値に対する固有空間の次元と一組の基底を求めよ.

（４）A は対角化可能か判定し，対角化可能なら $P^{-1}AP$ が対角行列になる正則行列 P を一つ求めよ.

解答例

直前の第 1 行，第 2 行，第 3 行を①，②，③で表す.

（１）A の固有多項式は,

$$|xE - A| = \begin{vmatrix} x-7 & 5 & 5 \\ -5 & x+3 & 5 \\ -5 & 5 & x+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & -x+2 & 0 \\ -5 & x+3 & 5 \\ 0 & -x+2 & x-2 \end{vmatrix} \begin{matrix} ①-② \\ \\ ③-② \end{matrix} = (x-2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & x+3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (x-2)^2(x+3)$.

（２）固有値は $\varphi_A(x) = 0$ の解なので,（１）より固有値は 2（重複度 2），-3（重複度 1）.

（３）固有値 2 に対応する固有空間 V_2 を求める．行基本変形により

$$2E - A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -5 & 5 & 5 \\ -5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ①/(-5) \\ ②-① \\ ③-① \end{matrix}$$

．階数 1 であるから，$\dim V_2 = 3 - 1 = 2$.

V_2 の要素は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ （x_2, x_3 は任意のスカラー）と表せる．よって，V_2 の基底として $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れる.

固有値 -3 に対しては

$$-3E - A = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} ②/(-5) \\ ①-2\times② \\ ③-② \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ ②/5 \\ ③-② \end{matrix}.$$

階数 2 であるから $\dim V_{-3} = 3 - 2 = 1$.

V_{-3} の要素は $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ （x_3 は任意のスカラー）と表せる.

よって V_{-3} の基底として $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が取れる.

（４）固有空間の次元の和が全体の次元 3 に一致するから A は対角化可能である．固有空間の基底を並べて $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば，$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

2. 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$ に対して，線形変換 $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ が $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられている．次の問いに答えよ．(30 点)

（1）$\ker f$ の次元と一組の基底を求めよ．

（2）$\mathrm{im}\, f$ の次元と一組の基底を求めよ．

（3）基底 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列 B を求めよ．

解答例

直前の第 1 行，第 2 行，第 3 行を①，②，③で表す．

（1）$\ker f$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．A に行基本変形を施す．

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ -3 & -7 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -② \\ ① - 2 \times ② \\ ③ - 3 \times ② \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① - \frac{3}{2} \times ② \\ ②/2 \\ ③ - ② \end{matrix}$$

これより $\mathrm{rank}\, A = 2$ であるから $\dim \ker f = 3 - \mathrm{rank}\, A = 1$.

解の基底としては，$x_1 = \frac{1}{2}x_3$，$x_2 = \frac{1}{2}x_3$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が取れる．

（2）$\mathrm{im}\, f$ は A の列ベクトルで張られる部分空間である．行基本変形で列ベクトルの一次関係式は変わらない．第 1 列・第 2 列は一次独立で，それらの一次結合として第 3 列が表されるから，$\mathrm{im}\, f$ の一組の基底として A の第 1 列・第 2 列が取れる．よって $\mathrm{im}\, f$ は 2 次元で，基底として $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$ が取れる．

（3）

$$f(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

よって $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

※別解（方針）

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおくと，$B = P^{-1}AP$ である．

$[P|AP]$ に行基本変形を施して左半分を単位行列にすれば，右半分に $P^{-1}AP$ が現れることから計算できる．

3. 行列 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 6 & -6 & -7 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ．(30 点)

（１）A の固有多項式と最小多項式を求めよ．

（２）A^n（$n=1,2,3,\ldots$) を求めよ．

解答例

直前の第 1 行，第 2 行，第 3 行を①，②，③で表す．

（１）固有多項式 $\varphi(x)=|xE-A|$ を求める．

$|xE-A|=\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ 6 & x-5 & -6 \\ -6 & 6 & x+7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ 6 & x-5 & -6 \\ 0 & x+1 & x+1 \end{vmatrix}$ ③＋② $=(x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 3 & 3 \\ 6 & x-5 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=(x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 3 \\ 6 & x+1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$（第 2 列から第 3 列を引いた）

$=(x+1)^2(x-2)$.

よって固有値は -1（重複度 2），2（重複度 1）である．最小多項式を $m(x)$ とすると，$m(x)$ は $\varphi(x)$ と根が共通で $\varphi(x)$ を割り切るから，

$$(x+1)(x-2) \mid m(x) \mid (x+1)^2(x-2)$$

である．よって，$m(x)$ は $(x+1)(x-2)$，$(x+1)^2(x-2)$ の何れか．

$(A+E)(A-2E)=\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -6 & 6 & 6 \\ 6 & -6 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & -6 & -9 \end{bmatrix}=O$．よって最小多項式は $(x+1)(x-2)$.

（２）x^n を $(x+1)(x-2)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $cx+d$ と置く．

$$x^n=(x+1)(x-2)Q(x)+cx+d$$

x に $-1,2$ を代入した式 $(-1)^n=-c+d$，$2^n=2c+d$ から $c=\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)$，$d=\frac{1}{3}(2^n+2(-1)^n)$.

$A^n=cA+dE=\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n)\begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 6 & -6 & -7 \end{bmatrix}+\frac{1}{3}(2^n+2(-1)^n)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$=2^n\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}+(-1)^n\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

※余りを $a(x+1)+b(x-2)$ と書くと速い．$a=\frac{2^n}{3}$，$b=-\frac{(-1)^n}{3}$ である．