幾何学A　問題

第1回

1. **（宿題）**　球面 S^2 に立体射影により局所座標系を入れて，$U_0 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$，$U_1 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$，$\varphi_0 : (x,y,z) \mapsto (X_0, Y_0) = \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right)$，$\varphi_1 : (x,y,z) \mapsto (X_1, Y_1) = \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}\right)$ とする．

(1) 座標変換 $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ を計算せよ．

(2) $Z_0 = X_0 + iY_0$，$Z_1 = X_1 - iY_1$ とした場合に Z_1 を Z_0 で表せ．

第2回

2. S^m に対し前問の (1) と同様に立体射影の座標変換を計算せよ．

3. Hausdorff 空間の部分空間は Hausdorff 空間であることを示せ．

4. **（レポート）**　次の条件で定まる $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間に多様体の構造は入るか？

(1) $xy = 1$,　 (2)* $xy = 0$,　 (3) $x + y = 1$

※今の段階では，$\boldsymbol{R}^2$ の「閉部分多様体」となるかは問題にしない．

5. $A \in M(m,n;\boldsymbol{R})$，$\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A\ \boldsymbol{b}) = r$ とする．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解集合 $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$ を M とする．

M を $\{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{v}_i \mid \boldsymbol{t} = {}^t(t_1, \ldots, t_{n-r}) \in \boldsymbol{R}^{n-r}\}$ の形に表し $\varphi : U = M \to \boldsymbol{R}^{n-r}$（$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{t}$）とすることで，$M$ は $(n-r)$ 次元多様体になることを示せ．

（ヒント：掃き出し法によると，t_i は x_j で簡単に表せる.）

6. $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A})$，$(N, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B})$ を可微分多様体とする．

(1) 直積空間 $M \times N$ も Hausdorff 空間になることを示せ．

(2) $(M \times N, \{(U_\alpha \times V_\beta, (\varphi_\alpha, \psi_\beta))\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B})$ は可微分多様体（**積多様体**）になることを示せ．

第3回

7. $(M, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A})$，$(N, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B})$，$(Q, \{(W_\gamma, \zeta_\gamma)\}_{\gamma \in C})$ を C^∞ 級多様体とし，$f : M \to N$，$g : N \to Q$ を C^∞ 級写像とする．$g \circ f$ が C^∞ 級写像であることを（きちんと）証明せよ．

8. C^∞ 級微分同相写像の合成は C^∞ 級微分同相写像であることを示せ．

第4回

9. $P \in M$ の開近傍 U, V，$f \in C^\infty(U)$，$g \in C^\infty(V)$，$u, v \in D_P(M)$ に対し $(u+v)(fg) = (u+v)(f)g(P) + f(P)(u+v)(g)$ を示せ．

10. **（レポート）**$c(t) = (x_1 + t, x_2)$ で定まる $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \boldsymbol{R}^2$ に沿った方向微分 v_c を $(\partial/\partial x_i)_P$ で表せ．

$c_2(t) = (r_0 + t)(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ について同様．

第5回

11. **（レポート）**標準的単射 $i : S^2 \to \boldsymbol{R}^3$ の $P(a,b,c)$ における微分 $(di)_P$ の像を，$P \in U_x^\pm$ または $U_y^\pm$ の場合に計算せよ．

第6回

講義内容の復習をしておくこと．

第7回

12. **（レポート）**$(df)_P$ が全射なら局所的に射影になることの証明を，テキストなどを参考にしてまとめよ．

第 8 回 幾何学 A 演習　提出する用紙の一番上に 学修番号 と 氏名 を記入してください．

13. $S^m \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ で原点を中心とする単位超球面を表す．S^3, S^2 の座標近傍を $1 \le i \le 4$, $1 \le j \le 3$ に対し

$$U_i^{\pm} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \mid \pm x_i > 0\}, \quad V_j^{\pm} = \{(y_1, y_2, y_3) \in S^2 \mid \pm y_j > 0\} \quad \text{（複号同順）}$$

と定め，局所座標を正射影で入れる．

写像 $S^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (y_1, y_2, y_3) = \bigl(2(x_1x_3 + x_2x_4),\ 2(x_1x_4 - x_2x_3),\ -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\bigr)$$

で定める．次の問いに答えよ．

（1）S^3 の点の像が S^2 に属することを確かめよ．

上の写像を改めて $f : S^3 \to S^2$ と書く．f は **Hopf 写像**と呼ばれる．

（2）座標関数 x_1, x_2, x_3, x_4 はいずれも $S^3 \to \boldsymbol{R}$ という C^∞ 関数を定める，これを $P \in U_3^+$，$P \in U_3^-$ のときに示せ．

（3）$P \in U_3^+ \cap f^{-1}(V_1^+)$ に対し，P のまわりで f を局所座標で表せ（y_2, y_3 を x_1, x_2, x_4 で表せ）．

（4）$U_i^{\pm} \cap f^{-1}(V_j^{\pm})$（複号任意）は開集合であり，$S^3$ はこれら 48 枚の開集合で覆われることを示せ．

（5）f は C^∞ 級写像であることを（3）の P の周りで示せ．

（6）（3）の P に対し，ヤコビ行列 $(Jf)_P$ を計算せよ．

（ヒント：まず $\dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} = -\dfrac{x_1}{x_3}$ 等を示す）

（7）（3）の P に対し，$(df)_P$ は全射であることを示せ．

（ヒント：$\mathrm{rank}(Jf)_P \le 1$ とすると $y_1 = 0$ となる）

（8）a, b, θ を $a^2 + b^2 = 1$ を満たす実定数とする．$c : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^4$ を，

$$t \mapsto (a\cos(t-\theta),\ a\sin(t-\theta),\ b\cos t,\ b\sin t)$$

で定める．c の像は S^3 に含まれることを示し，c は S^3 上の C^∞ 級曲線であることを示せ．

（9）$b > 0$, $P = c(0)$ とする．t が 0 に十分近いとき $c(t) \in U_3^+$ である．

$\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_P, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_P, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_4}\right)_P$ で表せ．

（１０）$f(c(t))$ および $(df)_P\left(\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}\right)$ を計算せよ．

（１１）$f^{-1}(0,0,1)$ は S^1 と同相であることを示せ．

（１２）f は全射であることを示せ．

14. n 次実正方行列に対し行列式を与える関数 $\det : M_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は，成分の多項式で表されるので C^∞ 級関数である．

（1）$n = 2$ のとき，$A \in M_2(\boldsymbol{R})$ における微分 $d(\det)_A$ が零射になるのは，$A = O$ と同値であることを示せ．

（2）$A \in M_n(\boldsymbol{R})$ における $d(\det)_A$ の階数を，A の階数により場合分けして求めよ．

クイズ：回覧する紙に描かれている人名はわかりますか？

※残った問題はレポート．教育実習で出席できなかった人はレポートで提出．期限６月２９日

13 の解答例

（1）$y_1^2+y_2^2+y_3^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2$ であるから，$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3$ ならば $(y_1,y_2,y_3)\in S^2$.

（2）$U_3^{\pm}$ における局所座標として (x_1,x_2,x_4) が取れる．x_1,x_2,x_4 は局所座標の成分そのものだから C^∞ 級関数．$P\in U_3^{\pm}$ のとき $1-x_1^2-x_2^2-x_4^2=x_3^2>0$ であるから，$x_3=\pm(1-x_1^2-x_2^2-x_4^2)^{\frac{1}{2}}$ は (x_1,x_2,x_4) に関して何度でも微分できる．

（3）f を $U_3^+\cap f^{-1}(V_1^+)$ に制限すると，像は V_1^+ に含まれる．それぞれの局所座標を用いて，(y_2,y_3) を (x_1,x_2,x_4) で表せばよい．$P\in U_3^+$ より $x_3>0$ だから $x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_4^2}$ である．$y_2=2(x_1x_4-x_2x_3)=2(x_1x_4-x_2\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_4^2})$，$y_3=-x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2=1-2x_1^2-2x_2^2$.

（4）連続関数 $y_j:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ による開区間 $(0,\infty)$ の逆像（半空間）は開集合である．V_j^+ はその S^2 との交わりなので，相対位相の定義から S^2 の開集合．V_j^- も同様．f は多項式で与えられた連続写像 $\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^3$ の制限であるから連続である．よって逆像 $f^{-1}(V_j^{\pm})$ は S^3 の開集合である．$V_j^{\pm}$ と同様に，$U_i^{\pm}$ は S^3 の開集合であり，$U_i^{\pm}\cap f^{-1}(V_j^{\pm})$ は S^3 の開集合である．

任意の $P(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3$ において，どれかの x_i は 0 でない．実際，$x_1=\cdots=x_4=0$ とすると $\sum_i x_i^2=0\neq 1$ となり矛盾．ゆえに $P\in U_i^{\pm}$．同様にある j に対し $f(P)\in V_j^{\pm}$ となるから，$P\in f^{-1}(V_j^{\pm})$．よって i,j と $\pm$ を選ぶと $P\in U_i^{\pm}\cap f^{-1}(V_j^{\pm})$．したがって S^3 は $U_i^{\pm}\cap f^{-1}(V_j^{\pm})$ で覆われる．

（5）y_2,y_3 はどちらも x_1,x_2,x_4 の C^∞ 級関数（実際，C^∞ 級関数 x_1,x_2,x_3,x_4 の多項式で表されている）．

（6）$x_3=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_4^2}$ より，$i=1,2,4$ に対して，$\dfrac{\partial x_3}{\partial x_i}=\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x_i}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_4^2}}=-\dfrac{x_i}{x_3}$.

$$(Jf)_P=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_4}\\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_4}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}(x_1x_2+x_3x_4)/x_3 & (x_2^2-x_3^2)/x_3 & (x_1x_3+x_2x_4)/x_3\\ -2x_1 & -2x_2 & 0\end{pmatrix}$$

（7）$P\in U_3^+\cap f^{-1}(V_1^+)$ のとき，$(Jf)_P$ の $(1,3)$ 成分 y_1/x_3 は正．よって $\operatorname{rank}(Jf)_P\leq 1$ とすると第 2 行は 0 ベクトルでなければならない．しかし $x_1=x_2=0$ とすると $y_1=2(x_1x_3+x_2x_4)=0$ となり $y_1>0$ に矛盾する．よって $\operatorname{rank}(Jf)_P=2$ であり，$(df)_P$ は全射.

（8）$(a\cos(t-\theta))^2+(a\sin(t-\theta))^2+b^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t=a^2+b^2=1$．よって $c(t)\in S^3$.

S^3 の局所座標を正射影で入れると，座標関数は x_1,x_2,x_3,x_4 のうちの 3 つになる．$c(t)$ の各成分は t の C^∞ 級関数であるから，c は S^3 上の C^∞ 級曲線である．

（9）$g(x_1,x_2,x_4)$ を U_3^+ 上の P の近傍で定義された任意の C^∞ 級関数とするとき，$\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}g=\left.\dfrac{d(g\circ c)}{dt}\right|_{t=0}$
$=\left.\dfrac{dg(a\cos(t-\theta),a\sin(t-\theta),b\sin t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\left\{-a\sin(t-\theta)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}+a\cos(t-\theta)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}+b\cos t\dfrac{\partial g}{\partial x_4}\right\}\right|_{t=0}=$
$\left\{a\sin\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_P+a\cos\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_P+b\left(\dfrac{\partial}{\partial x_4}\right)_P\right\}g$.

よって $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}=a\sin\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_P+a\cos\theta\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_P+b\left(\dfrac{\partial}{\partial x_4}\right)_P$.

（１０）$\boldsymbol{R}^3$ の座標で計算する．S^2 の局所座標としてはそのうち 2 つを取ればよい．$f(c(t))=(2ab(\cos(t-\theta)\cos t+\sin(t-\theta)\sin t),2ab(\cos(t-\theta)\sin t-\sin(t-\theta)\cos t),-a^2+b^2)=(2ab\cos\theta,2ab\sin\theta,b^2-a^2)$.
これは t によらない定値写像であるから，$(df)_P\left(\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}\right)=\left.\dfrac{d(f\circ c)}{dt}\right|_{t=0}=\boldsymbol{0}$.

（別解）$P=c(0)=(a\cos\theta,-a\sin\theta,b,0)$ より $(Jf)_P=\dfrac{2}{b}\begin{pmatrix}-a^2\cos\theta\sin\theta & a^2\sin^2\theta-b^2 & ab\cos\theta\\ -2ab\cos\theta & 2ab\sin\theta & 0\end{pmatrix}$．これを（9）で求めた速度ベクトル ${}^t(a\sin\theta,a\cos\theta,b)$ に左から掛けると $\boldsymbol{0}$.

（１１）$P(x_1,x_2,x_3,x_4)\in S^3$ が $f(P)=(0,0,1)$ を満たすとは，次と同値である．
$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$，$x_1x_3+x_2x_4=0$，$x_1x_4-x_2x_3=0$，$-x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$.

第１式，第４式から，$x_1^2+x_2^2=0$，$x_3^2+x_4^2=1$．このとき $x_1=x_2=0$ であり，第２式・第３式も満たされる．$i:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^4$ を $(x,y)\mapsto(0,0,x,y)$ と定めると，i は定義から部分多様体への埋め込みである．よって部分多様体 $S^1\subset\boldsymbol{R}^2$ は $i(S^1)=f^{-1}(0,0,1)$ と同相.

（１２）$b=\cos\psi$，$a=\sin\psi$ とおくと，$f(c(t))=(\sin 2\psi\cos\theta,\sin 2\psi\sin\theta,\cos 2\psi)$．$\frac{\pi}{2}-2\psi$ を φ と置きなおすと，$f(c(t))=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi)$．これは球面 S^2 の極座標表示であるから，φ,θ を選ぶことで S^2 の任意の点を表せる．よって f は全射.

第 9 回

15. N を n 次元可微分多様体とし，L を部分多様体とする．すなわち，L の任意の点 P において，N の座標近傍 $(V, y_1, \ldots, y_n)$ が存在し，$V \cap L = \{y_{l+1} = \cdots = y_n = 0\}$ とする．このとき，L は $(V \cap L, y_1, \ldots, y_l)$ を座標近傍として可微分多様体になることを示せ．

第 10 回

16. （**宿題**）$f : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ を C^∞ 級関数とする．f のグラフ $\Gamma_f = \{(\boldsymbol{x}, y) \in \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R} \mid y = f(\boldsymbol{x})\}$ が $\boldsymbol{R}^{m+1}$ の部分多様体になることを，埋め込みが C^∞ 級で像への同相写像になることにより示せ．
※講義では関数 $y - f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{R}^{m+1}$ から $\boldsymbol{R}$ への沈め込みであることを用いて示した．

17. $f(x) = |x|$ のとき，x を局所座標として多様体とみた $\Gamma_f = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid y = f(x)\}$ は，$\boldsymbol{R}^2$ の C^∞ 級部分多様体にならないことを示せ．
（Hint: 例えば $\boldsymbol{R}^2$ 上の C^∞ 関数 y が Γ_f 上 C^∞ 級でないことを示す.）

18. （**宿題**）$g_2, g_3 \in \boldsymbol{R}$ とし，$f(x, y) = y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3$ とする．$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ が $\boldsymbol{R}^2$ の部分多様体となるための (g_2, g_3) の条件を求めよ．
※点 $P(x, y) \in C_f$ に対し，P を含むファイバー $f^{-1}(f(P))$ は部分多様体にならない（P は node または cusp になる）が，厳密に示さなくてもよい．

第 11 回

19. （研究問題．計算機を用いてよい）$w = x^4 + x^2 y + xz$ とするとき，$(x, y, z) \mapsto (w, y, z)$ の特異値集合を図示せよ．

20. m を自然数とし，$V := \boldsymbol{R}^{m+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ とおく．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ とはある $\lambda \neq 0$ が存在して $\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x}$ となることと定める．
(1) $\sim$ は V の同値関係であることを示せ．
$\boldsymbol{R}P^m = V/\sim$，標準的全射を $\pi : V \to \boldsymbol{R}P^m$ とする．$\boldsymbol{R}P^m$ に商位相を入れたとき，π が開写像で，$\boldsymbol{R}P^m$ が Hausdorff 空間になることは授業で示してある．
$U_i := \{(X_1 : \cdots : X_{m+1}) \in \boldsymbol{R}P^m \mid X_i \neq 0\}$ とし，$\varphi_i : U_i \to U_i' := \boldsymbol{R}^m$ を $(x_1 : \cdots : \overset{i}{1} : \cdots : x_{m+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1})$ として定める．U_i が $\boldsymbol{R}P^m$ の開集合として定まり，φ_i が写像であることまで授業で示してある．
(2) $\iota : U_i' \to V$ を $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_{m+1})$ で与える．ι は C^∞ 級埋め込みであることを示せ．
(3) $\pi \circ \iota$ と φ_i は互いに他の逆写像であることを示せ．
(4) φ_i は同相写像（すなわち，全単射，連続，開写像）であることを示せ．

21. $\boldsymbol{C}P^m$ は実 $2m$ 次元可微分多様体であることを示せ．

第 12 回

演習問題をよく復習しておくこと．教科書の問題を解いておくこと．

第 10 回宿題解答例

16. $i : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^{m+1}$ を $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$ で定める．f が C^∞ であるから i は C^∞ 級写像，とくに連続．Jacobi 行列 $(Ji)_{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} E_m \\ \nabla f \end{pmatrix}$ はいたるところ階数 m であるから，i ははめ込みである．像の最初の m 変数から，i は単射．射影 $(\boldsymbol{x}, y) \mapsto \boldsymbol{x}$ は連続写像であり，i の像に制限すると i の逆写像が得られる．ゆえに i は像への同相写像である．以上より i は C^∞ 級埋め込みであり，像 Γ_f は $\boldsymbol{R}^{m+1}$ の部分多様体である．
※ i は講義で与えた局所座標 φ の逆写像を与えています．

18. $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ の Jacobi 行列を求めると $(Jf)_{(x,y)} = (-12x^2 - g_2, 2y)$．臨界点となる条件 $12x^2 + g_2 = y = 0$ を $f = 0$ に代入して $g_3 = 8x^3$ を得る．x を消去すると $g_2^3 + 27g_3^2 = 0$．ゆえに，$g_2^3 \neq -27g_3^2$ のとき，臨界点を持たず 0 は f の正則値．このとき，$y = 0$ とおいて $4x^3 + g_2 x + g_3 = 0$ は実数の範囲に必ず零点をもつから，$f^{-1}(0) \neq \varnothing$．よって，$f = 0$ は $\boldsymbol{R}^2$ の部分多様体である．$g_2^3 = -27g_3^2$ のとき，$a := 2g_3^{\frac{1}{3}} \in \boldsymbol{R}$ が定まる．$(a, 0)$ は臨界点であり $f(a, 0) = 0$ を満たす．以上より $f = 0$ が部分多様体となる条件は $g_2^3 \neq -27g_3^2$.
※この問題のヒントで node としたものは，$a < 0$ のとき孤立点となります．
※通常の notation と比べると g_2, g_3 が -1 倍されています．

第 13 回

22. $\alpha \in \boldsymbol{R}$ として，$i : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を $(\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\alpha\theta, \rho\sin\alpha\theta, \theta)$ で定める．

（1）i は C^∞ 級埋め込みであることを示せ．以下，像 M の局所座標として (ρ, θ) を用いる．

（2）$\alpha = 0$ のとき i の像を求めよ．

以下では $\alpha \neq 0$ とする．i の像を**ヘリコイド** (helicoid) という．

（3）$\pi : M \to \boldsymbol{R}^2$ を $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ とする．π は全射であることを示し，π の臨界点集合・臨界値集合を求めよ．

（4）$P_0(1, 0, 0) \in M$ とし，$S^1 \subset \boldsymbol{R}^2$ 上を点 $Q(\cos t, \sin t)$（$t \in \boldsymbol{R}$）が動いている．M 上の C^∞ 曲線 $c : \boldsymbol{R} \to M$ で，$c(0) = P_0$，$\pi(c(t)) = Q$ となるものを求めよ．

（5）（4）で求めた c の P_0 における速度ベクトルを求めよ．また，その $\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)_{P_0}$ 成分の符号を答えよ．

（6）$t \in \boldsymbol{R}$ に対し，$\varphi_t : (\rho, \theta) \mapsto (\rho, \theta + t)$ は M の C^∞ 級自己微分同相写像であることを示せ．

（7）$P \in M$ に対し $X_P = \left.\dfrac{d\varphi_t}{dt}(P)\right|_{t=0}$ を求めよ．

23. $M = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$ に対し次の問いに答えよ．

（1）M は $\boldsymbol{R}^3$ の C^∞ 級 2 次元部分多様体であることを示せ．

（2）z は M 上の C^∞ 級関数であることを示し，臨界点を求めよ．

（3）z の臨界点において適当な局所座標 x_1, x_2 を取り，Hesse 行列 $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j}$ の符号数を求めよ．

（4）$\pi : M \to \boldsymbol{R}^2$ を $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ で定める．π は C^∞ 級沈め込みであり，任意の点 $Q \in \boldsymbol{R}^2$ に対し $\pi^{-1}(Q)$ は 2 点からなることを示せ．

（5）M は 2 つの $\boldsymbol{R}^2$ の直和と C^∞ 級微分同相であることを示せ．

24. $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像 $f(u, v) = (u, uv, v^2)$ と，$\boldsymbol{R}^3$ 上の関数 $F(x, y, z) = x^2 z - y^2$ に対し，次の問いに答えよ．

（1）f の Jacobi 行列 $(Jf)_{(u,v)}$ を計算せよ．

（2）f がはめ込みとならない点 $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$ を求めよ．

（3）$F(f(u, v))$ は $\boldsymbol{R}^2$ 上の定数関数であることを確かめよ．

（4）F の臨界値 Q を求めよ．

（5）$F^{-1}(Q)$ の概型を描き，f の像と直線の和集合になることを確かめよ.（ヒント：例えば x が一定の切り口を考える.）

19. 解答例

Jacobi 行列式が 0 となるのは $4x^3 + 2xy + z = 0$ のとき．これより $z = -4x^3 - 2xy$．$w = x^4 + x^2 y - 4x^4 - 2x^2 y = -3x^4 - x^2 y$．よってパラメータ表示 $(x, y) \mapsto (-3x^4 - x^2 y, -4x^3 - 2xy, y)$ の像を図示する．

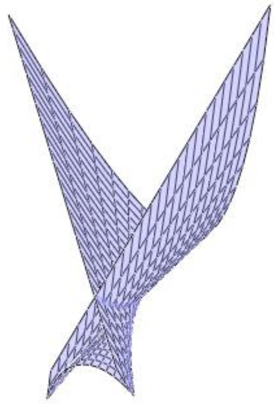

図 1: swallowtail

22. 解答例

（１）各座標が ρ, θ の C^∞ 級関数であるから i は C^∞ 級写像．特に連続．像からの逆写像が $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1/\cos(\alpha x_3), x_3) = (x_2/\sin(\alpha x_3), x_3)$（どちらかは定義され，どちらも定義されるときは等しい）であり，これは連続である．よって i は像への同相写像．i のヤコビ行列は $(Ji)_{(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\theta & -\alpha\rho\sin\alpha\theta \\ \sin\alpha\theta & \alpha\rho\cos\alpha\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．第１列は長さ１であるから，$(1,1)$ 成分か $(2,1)$ 成分の何れかは 0 でない．よって $\operatorname{rank}(di)_{(\rho,\theta)} = 2$．$\dim\ker(di)_{(\rho,\theta)} = \dim \boldsymbol{R}^2 - \operatorname{rank}(di)_{(\rho,\theta)} = 2 - 2 = 0$.（２）$i(\rho, \theta) = (\rho, 0, \theta)$ であるから，xz 平面.（３）局所座標で表すと $(\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos\alpha\theta, \rho\sin\alpha\theta)$．任意の $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ に対し，例えば $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = \frac{1}{\alpha}\arctan(\frac{y}{x})$ とすれば逆像になるから，π は全射．$(J\pi)_{(\rho,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\theta & -\alpha\rho\sin\alpha\theta \\ \sin\alpha\theta & \alpha\rho\cos\alpha\theta \end{pmatrix}$．この行列式（ヤコビアン）は $\alpha\rho$ となるから，臨界点集合は $\rho = 0$ より z 軸であり，臨界値集合は原点.（４）局所座標で表すと $c(t) = \left(1, \dfrac{t}{\alpha}\right)$. $i(c(t)) = \left(\cos t, \sin t, \dfrac{t}{\alpha}\right)$.（５）$\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)_P$．符号は α の符号と同じ.（６）t の一次式だから.（７）$\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)_P$

23. 解答例

（１）$F(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$ は $\boldsymbol{R}^3$ 上の C^∞ 級関数である．$P \in \boldsymbol{R}^3$ に対し，$(JF)_P = (2x\ 2y\ -2z)$. $\operatorname{rank}(JF)_P = 0 \iff x = y = z = 0$．このとき $F(0,0,0) = 0$．よって F の臨界値は 0 であり，-1 は F の正則値である．$F(0,0,1) = -1$ であるから $F^{-1}(-1) \neq \varnothing$．よって $M = F^{-1}(-1)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の C^∞ 級部分多様体である．次元は $\boldsymbol{R}^3$ の次元から $(JF)_P$ の階数を引いて $3 - 1 = 2$.（２）z は $\boldsymbol{R}^3$ の座標関数であるから $\boldsymbol{R}^3$ 上の C^∞ 級関数．よって C^∞ 級部分多様体に制限しても C^∞ 級関数．M 上では $z = \pm\sqrt{x^2+y^2+1}$ となるので，M の座標近傍系として，$(\{z > 0\}; x, y)$ と $(\{z < 0\}; x, y)$ が取れる．これらは交わりを持たない. Jacobi 行列は $\dfrac{\partial z}{\partial(x, y)} = \left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$ であるから，臨界点は $x = y = 0$．このとき $z = \pm 1$．よって，$(0, 0, \pm 1)$ が臨界点である.（３）(x, y) に関する $z = \pm\sqrt{x^2+y^2+1}$ の Hesse 行列を計算する．$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{z^2 - x^2}{z^3} = \dfrac{1+y^2}{z^3}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{xy}{z^3}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{z^2 - y^2}{z^3} = \dfrac{1+x^2}{z^3}$．$(x, y) = (0, 0)$（$z = \pm 1$）における Hesse 行列は，$\pm E_2$（すべて複号同順）．よって $(0, 0, 1)$ において符号数 $(2, 0)$，$(0, 0, -1)$ において符号数 $(0, 2)$.（別解）z を $(x, y) = (0, 0)$ において Taylor 展開すると，$z = \pm\sqrt{1 + x^2 + y^2} = \pm(1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \text{高次の項})$．よって $(0, 0, 1)$ で符号数 $(2, 0)$，$(0, 0, -1)$ で符号数 $(0, 2)$.（４）π は局所座標で $(x, y) \mapsto (x, y)$ と表されるから C^∞ 級写像であり，π の Jacobi 行列は E_2 である．よって π は C^∞ 級沈め込みである．$Q(x, y)$ に対し $\pi^{-1}(Q) = \{(x, y, \pm\sqrt{x^2+y^2+1})\}$ であり，根号の中が正であるから常に２点からなる.（５）連結成分ごとに π の C^∞ 級切断 $(x, y) \mapsto (x, y, \pm\sqrt{1+x^2+y^2})$ ができるから C^∞ 同相.

24. 解答例

（１）$(Jf)_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$.（２）$f$ は C^∞ 級写像であるから，$(Jf)_{(u,v)}$ が単射とならない点であり，原点.（３）合成を計算すると 0 になる.（４）$(JF)_{(x,y,z)} = (2xz, -2y, x^2)$．これが $\vec{0}$ となるのは $x = y = 0$．よって z 軸が臨界点集合．臨界値はその F による像だから，$F(0, 0, z) = 0$.（５）x が一定（$\neq 0$）の切り口は放物線 $z = ay^2$（$a = 1/x^2$）．$x = 0$ の切り口は z 軸．よって図４に z 軸を付け加えたものになる．

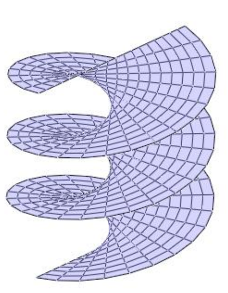

図 2: helicoid

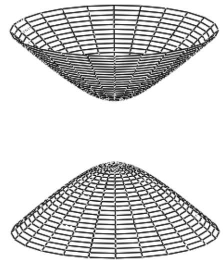

図 3: 二葉双曲面

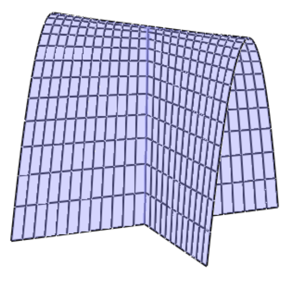

図 4: cross cap