1　数え上げ

この講義では，主に有限個の要素からなる集合を扱いる．数え上げ（場合の数）とは,「決められた集合の要素の数を与えること」をいいる．次に注意する．

- すべての要素を数え漏らさないこと．
- それぞれの要素を 2 度数えないこと．

そのためには，樹形図を用いるなどして，場合分けを行うのが基本的である．
秀吉が山の木を数えた方法を考えてみると，次の工夫がある．

- 別の数えやすい集合との間に全単射を構成する．
- 補集合を数えて，全体から引く．

1.1　写像の個数

n 人から k 回呼び出すのは，1 回ごとに n 通りあるので，n^k 通りである．[1] これは，$\{1, 2, \dots, k\}$ から $\{1, 2, \dots, n\}$ への写像の個数と思うこともできる．一般に，集合 A から集合 B への写像の全体を B^A と書き，その要素の個数は（有限集合のとき）$|B|^{|A|}$ である．べき集合 2^A も，次の特性関数により部分集合は A から $\{0, 1\}$ への写像と対応するので，記号が合っている．

1.2　特性関数

全体集合 U の部分集合 A に対し，関数 $\chi_A : U \to \{0, 1\}$ を次のように定める．

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

χ_A は A の**特性関数**と呼ばれる．
特性関数の和（積分）はその集合の位数（体積）になる：

命題 1.1 有限集合 U の部分集合 A に対し，$|A| = \sum_{x \in U} \chi_A(x)$.

命題 1.2 $\chi_U \equiv 1$，$\chi_\varnothing \equiv 0$，$\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$，$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$，$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.

証明　最後以外は明らか．
$\chi_{A \cup B} = 1 - \chi_{\overline{A \cup B}} = 1 - \chi_{\bar{A} \cap \bar{B}} = 1 - \chi_{\bar{A}} \chi_{\bar{B}} = 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$.　□

あるいは，$x \in U$ が A, B に属するかで場合分けして，それぞれの場合に両辺が等しい値をとることを確かめても示せる．

例　問題：$A \subseteqq B \iff \forall x\ \chi_A(x) \leqq \chi_B(x)$ を示せ．

1.3　順列・組合せ

n 人から k 人を選んで一列に並べる場合の数は ${}_nP_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ であり，**順列**と呼ばれる．これは，$\{1, \dots, k\}$ から $\{1, \dots, n\}$ への単射の数とみなせる．全射の個数は後述するように，これより複雑な式になる．
$k = n$ のとき，全単射は $\{1, \dots, n\}$ の**置換**と呼ばれ，その個数は $n!$ と書かれ，n の**階乗**と呼ばれる．
選んだ k 人の並べ方を問わない場合は**組合せ**と呼ばれ，${}_nP_k / k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 通りである．これを ${}_nC_k$ あるいは $\binom{n}{k}$ と書く．

[1] ${}_n\Pi_k$ と書き，**重複順列**と呼ぶこともある．

1.4　包含と排除の原理（包除原理，PIE）

命題 1.3 有限集合 U の部分集合 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ に対し，次が成立する．

$$|X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| - \sum_{i_1<i_2} |X_{i_1} \cap X_{i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap X_{i_3}| - \cdots + (-1)^k |X_1 \cap X_2 \cap \cdots X_k|$$

証明　X_i の特性関数を χ_i とすると，$\overline{X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k}$ の特性関数は，ド・モルガンの法則から $\prod_i (1-\chi_i)$ となる．よって $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k$ の特性関数は $1-\prod_i (1-\chi_i)$．これを展開して U 上で和をとればよい．
□

例　1 から 1000 までの整数のうちで，$2,3,5$ と互いに素なものはいくつあるか．
　解答：2，3，5 の倍数はそれぞれ 500 個，333 個，200 個．6，10，15 の倍数はそれぞれ 166 個，100 個，66 個．30 の倍数は 33 個である．PIE より，$1000-500-333-200+166+100+66-33=266$ 個．

1.5　全射の個数

　$\{1, \ldots, k\}$ から $\{1, \ldots, n\}$ への全射の個数を求める．
　$k \geq n$ と仮定する（そうでないと 0 個）．像が i を含まない場合を P_i とすると，和集合 $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ が，全射でない写像全体である．P_i たち k 個の共通部分は，残り $n-k$ 個への写像全体であるから，要素の個数は $(n-k)^k$ 個．n 個から k 個を選ぶ方法は ${}_nC_k$ 通りであるから，PIE より全射の個数は，

$$n^k - {}_nC_{n-1}(n-1)^k + {}_nC_{n-2}(n-2)^k - \cdots + (-1)^{n-1}{}_nC_1 1^k.$$

1.6　クリスマスプレゼント問題

　n 人がそれぞれプレゼントを持ち寄り，くじでもらうプレゼントを決めるプレゼント交換を考える．どの人も自分以外の人からのプレゼントを貰える場合を成功とする．$\{1, \ldots, n\}$ の置換 σ で，任意の $1 \leq i \leq n$ に対し $\sigma(i) \neq i$ を満たすものの個数として求めてみよう．
　i 番目の人が自分の持ってきたプレゼントをもらう場合を P_i とすると，P_i たち k 個の共通部分は，残り $n-k$ 人の置換 $(n-k)!$ 通りとなる．n 人から k 人を選ぶ場合の数は $n!/k!(n-k)!$ なので，積は $n!/k!$ となる．PIE より求める場合の数は

$$n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

となる．$n \to \infty$ のとき，置換の全体 $n!$ に占める割合は $1/e \sim 0.36$ に収束する．

2　数列

　数が順番に並んだもの

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

を**数列**といい，$\{a_n\}_{n \geq 0}$ などと書く．[2]ここでは初項を a_0 とするが，本質的な差はない．a_n は一般項と呼ばれる．

例

$a_0,$	$a_1,$	$a_2,$	$\ldots,$	$a_n,$	$\ldots$	
$a,$	$a+d,$	$a+2d,$	$\ldots,$	$a+nd,$	$\ldots$	初項 a，**交差** d の**等差数列**
$a,$	$ar,$	$ar^2,$	$\ldots,$	$ar^n,$	$\ldots$	初項 a，**公比** r の**等比数列**

　今回の講義では，数列を（1）関数と見る（2）ベクトルと見る（3）式と見る，といったように，いろいろ視点を変えて眺めてみよう．

[2]集合ではなく順序が決まっているので，本当は直積を表す括弧を用いて (a_n) と表す方が整合性がある．

2.1 数列は関数である：差分

数列 a_n は，n 番目に a_n という数が指定されているという意味で，自然数の全体の上の実数値関数 $a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ と思える．その意味で，a_n を $a(n)$ と書いてみよう．同様に，平面の点列 $P_1, P_2, \dots$ なら自然数から平面への写像 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}^2$ と同一視できる．

差分

n が 1 増えたときの関数の変化（**差分**）は，

$$(\Delta a)_n := a_{n+1} - a_n$$

となる．並べて数列と見ると $\{a_n\}$ の**階差数列**に他ならない．[3]

微積分学の基本定理によると，関数の変化率（導関数）を積分すると元の関数（の端点における値の差）となるように，階差数列の和（**和分**）で一般項が表される．[4]

$$a_n = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta a)_k$$

ジョルダンの階乗関数

自然数 k に対し，$(x)_k = x(x-1)\cdots(x-k+1)$ を**ジョルダンの階乗関数**といいる．x が自然数 n のとき，n 個のものから k 個とって並べる順列 ${}_nP_k$ に一致する．差分を計算してみよう．

命題 2.1 $(n+1)_k - (n)_k = k(n)_{k-1}$

証明 $(n+1)_k - (n)_k = (n+1)n(n-1)\cdots(n-k+2) - n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1) = \{(n+1) - (n-k+1)\}n(n-1)\cdots(n-k+2) = k(n)_{k-1}$．□

多項式の和分

k に関する多項式 $f(k)$ を，$k = 0$ から $n-1$ まで[5]加えた和 $\sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ を計算する方法を与えよう．

$f(k)$ をジョルダンの階乗関数の一次結合に表す．

$f(k)$ が k の m 次式であるとき，

$$f(k) = a_m(k)_m + a_{m-1}(k)_{m-1} + \cdots + a_1(k)_1 + a_0(k)_0$$

と表される．[6] $(k)_1 = k$，$(k)_0 = 1$ である．ここで，係数 $a_0, a_1, \dots, a_m$ は次のようにして求まる．

両辺に $k = 0$ を代入すると，$f(0) = a_0$ から a_0 が決まる．次に $k = 1$ を代入すると，$f(1) = a_1 + a_0$ から a_1 が決まる．$k = 2$ を代入して $f(2) = 2a_2 + 2a_1 + a_0$ から a_2 が求まり，以下順次 $k = 3, \dots, m$ まで代入することで，すべての a_k が求まる．

$\sum_{k=0}^{n-1} (k)_r = \frac{(n)_{r+1}}{r+1}$（$r \geq 0$）を用いて和分を計算する．

例 4 次のべき和 $\sum_{k=1}^{n} k^4$ を求めてみよう．

$$k^4 = a(k)_4 + b(k)_3 + c(k)_2 + dk + e$$

とおく．$k = 0$ を代入して $e = 0$ がわかる．$k = 1$ を代入して $d = 1$ がわかる．$k = 2$ を代入して $16 = 2c + 2$ より $c = 7$．$k = 3$ を代入して $81 = 6b + 42 + 3$ より $b = 6$．最高次の係数を比較して $a = 1$．よって

$$k^4 = (k)_4 + 6(k)_3 + 7(k)_2 + k$$

---

[3]逆に，関数 $f(x)$ の方も，実数 x ごとに $f(x)$ という数が指定されているので，添え字が無限に細かく並んだ数列と思うこともできる．「隣の実数」といったものはないので，変化率は微分で表する．

[4]計算する上では，複雑な場合は，さらに高階の差分を取ることもある．

[5]$k = 1$ から n なら，$g(k) := f(k+1)$ として $g(k)$ の和を計算する．あるいは，和の n を $n+1$ として初項 $f(0)$ を引けばよい．

[6]この事実は，まず m 次の項を $(k)_m$ の定数倍で作り，残りの $m-1$ 次の項を $(k)_{m-1}$ の定数倍で作り，$\cdots$とすることで示せる（厳密には，m に関する帰納法）．$1, k, k^2, \dots$ から $1, (k)_1, (k)_2, \dots$ へ，線形代数でいう基底の変換を行っている．

両辺の $k=1$ から n までの和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{(n+1)_5}{5} + 6\frac{(n+1)_4}{4} + 7\frac{(n+1)_3}{3} + \frac{(n+1)_2}{2}$$

あえて展開して整理すると，$= \dfrac{n(n+1)}{30}\{6(n-1)(n-2)(n-3)+45(n-1)(n-2)+70(n-1)+15\} = \dfrac{n(n+1)}{30}(6n^3-36n^2+66n-36+45n^2-135n+90+70n-70+15) = \dfrac{n(n+1)}{30}(6n^3+9n^2+n-1) = \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

注　低次の $\sum_{k=1}^{n} k^3$ などをあらかじめ計算しておく必要がない．何次式でもいきなり計算できる．

まとめると，多項式の差分・和分は，ジョルダンの階乗関数を基底として表すと簡単に計算できる．x^k の微分は kx^{k-1} であり，テイラー展開を用いると，簡単に項別微分・積分ができるように，$(n)_k$ の差分は $k(n)_{k-1}$ であり，ジョルダンの階乗関数を用いて展開すると，差分・和分が項別に簡単に計算できる．

また，テイラー展開の各項は，その点での（高階の）微分係数からわかるが，階乗関数でも，$k=0,1,2,\ldots$ の値を順次代入することで求めることができる．

注　ここではジョルダンの階乗関数を用いて説明したが，もう少し便利な基底の取り方もある．微分で係数が出ないように書き換えると，$x^k/k!$ の微分は $x^{k-1}/(k-1)!$ となる．この対応物は組合せ $(n)_k/k! = {}_nC_k$ になり，$(n+1)_k/k! - (n)_k/k! = (n)_{k-1}/(k-1)!$ となる．$(n)_k/k!$ は「任意の整数 n に対し整数値をとる」という性質があり，一般にその性質を満たす，n の多項式で表される数列は，$(n)_k/k!$（$k=0,1,2,\ldots$）の整数係数一次結合で表されることが，たとえば次数に関する帰納法により示される．m 次多項式の微分が $x^k/k!$ を基底として表すとジョルダンの標準形 $J(0,m)$ で表されるのと同じように，階差は組み合わせを基底として表すと，ジョルダンの標準形 $J(0,m)$ で表される．

注　参考：ラグランジュの補間法を用いる手もある．$\sum_{k=1}^{n} k^4$ が n の 5 次式になることはすぐわかる．高々 5 次式は 6 点の値で決まるので，たとえば $n=0,1,2,3,4,5$ をとると，高々5 次式全体からなるベクトル空間の基底として，$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ を割り切る 5 次式（最高次の係数を 1 とするとちょうど 6 つある）をとることができる．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = a(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + bn(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) + cn(n-1)(n-3)(n-4)(n-5) + dn(n-1)(n-2)(n-4)(n-5) + en(n-1)(n-2)(n-3)(n-5) + fn(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

係数 a,b,c,d,e,f は n に $0,1,2,3,4,5$ を代入することで求まる.（略）

2.2　数列はベクトルである：連立一次方程式の解の構造定理

漸化式で，a_n, a_{n+1} について 1 次式であるものを考えてみよう．

$$a_{n+1} = p_n a_n + q_n \quad (p_n, q_n \text{ は既知の数列 })$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を未知数と見ると，この形の漸化式は $a_n - p_{n-1}a_{n-1} = q_{n-1}$，$a_{n-1} - p_{n-2}a_{n-2} = q_{n-2}$，$\cdots$，$a_2 - p_1 a_1 = q_1$ となり，連立一次方程式に他ならない．したがって，線形代数で習った連立一次方程式の構造定理から，一般解は，特殊解と，同伴な同次方程式の一般解の和として表すことができる．同次方程式とは $a'_{n+1} = p_n a'_n$ のことなので，たとえば p_n が定数なら等比数列となる．一般には $a'_n = a'_1 \prod_{k=1}^{n-1} p_k$ と，一般項を簡単に求めることができる．多項間漸化式についても 1 次式なら基本は同じである．

注　線形代数で習ったように，関数 $f(x)$ も，各 $f(x)$ が「x 番目」の成分であるとみなして，無限につながっているベクトルというイメージで扱うこともできる．これは，普通に関数の全体をベクトル空間と見る方法と同じである．定数係数線形常微分方程式の一般解を行列を用いて解く方法をすでに習っている．

2.3　数列は式である：母関数

母関数

数列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

に対し，ひとまとめにした式

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

を**母関数** (generating function) といいる．数列が無限に続いているなら，x のべきも無限に続いていくことにする．式なので足したり引いたり掛けたりできる．ただし，低次の項から順次計算するという約束にする．正確には**形式的べき級数**と呼ばれるが，ここでは立ち入らない．たいていの場合は，関数の $x = 0$ における Taylor 級数（収束べき級数）と思って差し支えない．

等比数列の母関数

$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ に対し，$xf = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots$ となるので，xf は，項を一つずらした $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の母関数である．すべての $n \geq 0$ に対し $a_{n+1} = r a_n$ を満たすことと，$(1 - rx)f = a_0$ とは同値である．よって，初項 a_0，公比 r の等比数列の母関数は

$$f = a_0 + a_0 r x + a_0 r^2 x^2 + \cdots =: \frac{a_0}{1 - rx}$$

と表される．

母関数による漸化式の解法

例　漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 1$（$n \geq 1$），$a_0 = 0$ を満たす数列の一般項を母関数の部分分数展開を用いて求めてみる．

母関数を f とすると，xf の x^n（$n \geq 1$）の係数は a_{n-1} である．また，x^n（$n \geq 1$）の係数が -1 となるべき級数は $-x - x^2 - x^3 - \cdots = -x/(1-x)$ であるから，

$$(1 - 2x)f = -\frac{x}{1 - x}.$$

これは x^0 の係数についても成り立つ．これより

$$f = -\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 2^n) x^n.$$

よって $a_n = 1 - 2^n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）．

注　もし漸化式が $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$ なら，

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1} + \cdots)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{1}{(1-x)^2}$$

を用いることができる．

例　漸化式 $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$，$a_0 = a_1 = 1$ を解く．母関数を f とすると，漸化式より

$$(1 - 5x + 6x^2)f = a_0 + (a_1 - 5a_0)x = 1 - 4x.$$

よって

$$f = \frac{1 - 4x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 3^n) x^n.$$

よって $a_n = 2^{n+1} - 3^n$（$n \geq 0$）．

注　参考：急速に増大する数列などのように，指数型母関数

$$f = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

が有用な場合もある．単純に項をずらす操作は

$$\frac{df}{dx} = a_1 + a_2 \frac{x}{1!} + a_3 \frac{x^2}{2!} + a_4 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

と微分で表されるので，漸化式を f の微分方程式として表せることがある．

逆に微分方程式の解（形式解・近似解）を，べき級数展開して係数の漸化式から求める方法で得ることもある．

2.4　二項係数とその拡張

二項係数

二項定理 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$ より

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

である（$k > n$ のとき $\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots 1 \cdot 0 \cdots = 0$ に注意）．$(1+x)^n$ は二項係数の母関数となる．

級数の和は $x = 1$ を代入して（収束すれば）得られる．交代和なら $x = -1$ である．たとえば，二項定理を用いると組み合わせの和や交代和が求まる．また，自然数とは限らない実数 α に対しても，

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (|x| < 1), \qquad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

が成り立つ．実際，$f(x) = (1+x)^\alpha$ のマクローリン展開と見ると，$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ より $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$ であり，

$$\left| \binom{\alpha}{k+1} \Big/ \binom{\alpha}{k} \right| = \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| \to 1 \quad (k \to \infty)$$

よりダランベールの公式を用いると収束半径 $1/1 = 1$．両辺は $f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$ の解であり原点で共に 1 となるから一致する．

係数 $\binom{\alpha}{k}$ は**一般化された二項係数**と呼ばれる．

多項定理

$(1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ を展開したときの $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}$ の係数（**多項係数**）は

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} := \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdots \binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}{k_m}$$

となる（$n \geq k_1 + k_2 + \cdots + k_m$）．これは，$k_0 = n - k_1 - k_2 - \cdots - k_m$ とおくと次と一致する．

$$\frac{n!}{k_0! k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

重複組合せ

異なる n 個のものから重複を許して k 個選ぶ場合の数を ${}_nH_k$ と書く．

$${}_nH_k = {}_{n+k-1}C_k = {}_{n+k-1}C_{n-1}$$

が成り立つ．

例　$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k$ を展開したときの，異なる単項式の個数は ${}_nH_k$ に等しくなる．

母関数は，

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1-x} \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} {}_nH_k x^k$$

となる．

例　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$，$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 2$，$x_3 \geq 1$，$x_4 \geq 3$ を満たす整数解の個数を求めよ．

$y_1 = x_1$，$y_2 = x_2 - 2$，$y_3 = x_3 - 1$，$y_4 = x_4 - 3$ とおくと，$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$，$y_i \geq 0$（$1 \leq i \leq 4$）を満たす整数解の個数を求めればよい．それは 4 個の中から重複を許して 6 個とる場合の数に等しいから，${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$.

例　$x_1 + x_2 + x_3 = 8$，$x_1 \geq 1$，$x_2 \geq 1$，$x_3 \geq 0$ を満たす整数解の個数を求めよ．

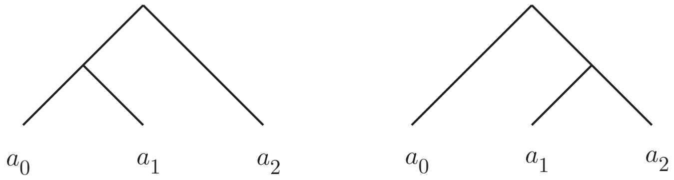
$y_1 = x_1 - 1$，$y_2 = x_2 - 1$，$y_3 = x_3$ とおくと，$y_1 + y_2 + y_3 = 6$，$y_i \geq 0$（$1 \leq i \leq 3$）を満たす整数解の個数を求めればよい．それは 3 個の中から重複を許して 6 個とる場合の数に等しいから，${}_3H_6 = {}_8C_2 = 28$.

2.5　カタラン数

かっこのつけ方

n を自然数として，積（文字列の連結）$a_0a_1\cdots a_n$ に括弧を付けて積の順序を指定することを考える．括弧の付け方を c_n 通りとする．c_n を**カタラン数** (Catalan number) と呼びる．ただし，括弧は常に 2 つの文字をくくることにする[7]．また，文字とは元の a_i と，すでに括弧で囲まれたひとくくりの集まりのこととする．例えば，$n=1$ の場合 (a_0a_1) の 1 通りなので $c_1=1$ である．$n=2$ の場合，$((a_0a_1)a_2)$ と $(a_0(a_1a_2))$ の 2 通りがあるので $c_2=2$ である．一番外側にも括弧を付けることに注意せよ．

先に掛けるところは先に線で結ぶことにすると，それぞれ次のような二分木と対応する．



一番上の頂点から見て左側と右側に分割することによって，次の漸化式ができる．

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{k-1}c_{n-k} + \cdots + c_{n-1}c_0$$

母関数を $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$ とする．ただし，$c_0=1$ とする．漸化式 $c_0^2=c_1$ も満たされる．漸化式から次が従いる．

$$x\{f(x)\}^2 = f(x) - c_0$$

2 次方程式の解の公式より

$$f(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

を得る．$f(0)=c_0=1$ より複号はマイナスであることがわかる．

$$f(x) = \frac{1}{2x}(1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2x}\left\{1-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-1)^{k-1}2^{2k-1}x^{k-1}$$

ここで

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = \frac{1(-1)(-3)\cdots(2k-3)}{2^kk!} = (-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{2^kk!}$$

分母分子に $(2k-2)!!=2^{k-1}(k-1)!$ を掛けて，

$$= (-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}$$

よって

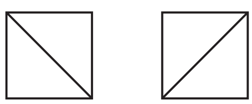
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

（$k-1$ を n と書きなおした）．ゆえに

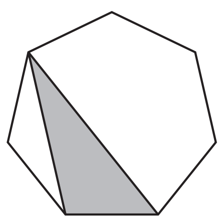
$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

凸 $(n+2)$ 角形の三角形分割

凸 $(n+2)$ 角形を三角形分割する場合の数を c_n とする．$c_1=1$，$c_2=2$ である．



n=2



e

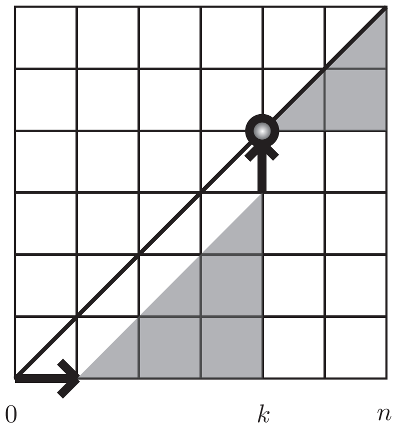
[7] (e)（かっこいー）のように，1 個だけ括弧でくくることは禁止である．

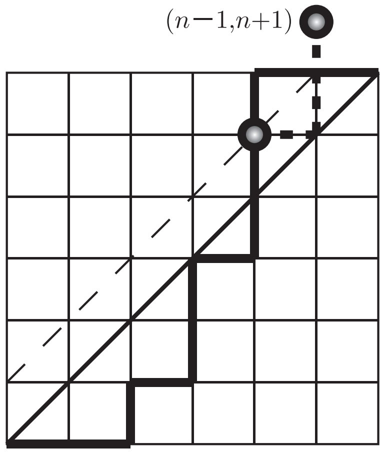
ある辺 e を固定する．三角形分割に対し，辺 e を含む三角形が一意的に定まる．その両側は凸 $((k-1)+2)$ 角形と凸 $((n-k)+2)$ 角形（$k=1,\ldots,n$）となるので，c_n はカタラン数と同じ漸化式を満たし，初項も等しいので一致する．

格子の移動

格子状の街路を $(0,0)$ から (n,n) まで最短経路を通って行く道を考える．その全体は，$2n$ 歩のうちどの n 歩を右に行くかを指定すれば決まるので（残りは上に行く），$\binom{2n}{n}$ 通りある．ここでは，そのうち対角線を越えないで右下半分のみ（対角線上は含む）を通るものだけの道の本数を c_n とする．

出発して初めて対角線上に来るのが (k,k)（$1 \le k \le n$）とすると，それまでは $(1,0)$ から $(k,k-1)$ までの道と対応し，そのあとは (k,k) から (n,n) までの道と対応する．これより c_n はカタラン数と同じ漸化式を満たし，$c_0 = c_1 = 1$ より一致する．





別の方法で一般項を求めてみよう．$(0,0)$ から (n,n) に至る最短経路のうちで，対角線を越えてしまうもの A は，$(0,0)$ から $(n-1,n+1)$ への最短経路 B と一対一に対応することを示す．A の経路で対角線を越えた直後の座標を $(k,k+1)$ とする．それ以後の経路だけ $y=x+1$ に関して折り返すと，(n,n) は $(n-1,n+1)$ になり，右向きの移動と上向きの移動が入れ替わるので，全体として B の経路になることがわかる．逆に，B の道は，必ず $y=x+1$ と交わるので，最初に交わる点で折り返すと，A の道になることがわかる．よって，

$$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$