線型代数 II 演習問題（補充）

学修番号　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

$8\frac{1}{2}$. 次の行列 A のジョルダン標準形を求めよ．

（1）$A=\begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ 12 & -4 & -6 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ （2）$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ （3）$A=\begin{bmatrix} -6 & -7 & 2 \\ 5 & 6 & -2 \\ -7 & -9 & 1 \end{bmatrix}$

（4）$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ （5）$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

解答例

（1）固有多項式を計算すると（略）$\varphi(x)=(x-2)x(x+2)$ より固有値 -2，0，2（すべて重複度 1）．重複度がすべて 1 であるから A は対角化可能．各固有値に対応する固有空間を求めると（略）

$V_2=\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$，$V_0=\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rangle$，$V_{-2}=\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$ となる．

よって，$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ とすると $J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$．

（2）固有多項式を計算すると（略）$\varphi(x)=(x-2)^2(x+1)$ より固有値 2（重複度 2），-1（重複度 -1）．

$A-2E=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$． より $V_2=\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$

$A+E=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} ② \\ ①-2\times② \\ ③+② \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より $V_{-1}=\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$．

固有空間の次元の和 $2+1$ が全体空間の次元 3 に等しいから A は対角化可能．

$P=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば $J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$．

（3）固有多項式を計算すると（略）$\varphi(x)=(x+1)^2(x-3)$ より固有値 -1（重複度 2），3（重複度 1）．

固有空間を求めると（略）$V_{-1}=\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$，$V_3=\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$．

固有値 -1 の重複度 2 に対し固有空間の次元は 1 だから，$J=J(-1,2)\oplus J(3,1)$ とできる．

$P=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3]$ とおくと，

$$P^{-1}AP=J \iff AP=PJ \iff [A\boldsymbol{v}_1,\ A\boldsymbol{v}_2,\ A\boldsymbol{v}_3]=[-\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2,\ 3\boldsymbol{v}_3].$$

よって $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3$ は固有ベクトルだから，例えば $\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を選ぶ．

$(A+E)\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1$ を解くと（略），例えば $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$．

以上より，$P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば，$J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$．

（4）固有多項式を計算すると（略）$\varphi(x) = (x-2)^3$ より固有値 2（重複度 3）.

$A - 2E = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ より固有空間 $V_2 = \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$.

固有空間の次元が 2 であるからジョルダン細胞の個数は 2. これより $J = J(2,2) \oplus J(2,1)$（直和の順序を除いて一意的）となる. $P = [\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3]$ に対し $P^{-1}AP = J$ とすると, $AP = PJ$ より

$$[A\boldsymbol{v}_1,\ A\boldsymbol{v}_2,\ A\boldsymbol{v}_3] = [2\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2,\ 2\boldsymbol{v}_3]$$

となる. 書き直すと

$$(A-2E)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0},\ (A-2E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1,\ (A-2E)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}.$$

（解1）$\boldsymbol{v}_1$ は固有ベクトルであるから, パラメータ a, b を用いて $\boldsymbol{v}_1 = a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+3b \\ a \\ b \end{bmatrix}$

と書ける. $(A-2E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ を $\boldsymbol{v}_2$ について解く. 拡大係数行列を行基本変形すると,

$$[A-2E|\boldsymbol{v}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 6 & -a+3b \\ -1 & -1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 3 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -a \\ 0 & 0 & 0 & -3a+3b \\ 0 & 0 & 0 & -a+b \end{array}\right] \begin{array}{l} -② \\ ① - 2\times② \\ ③ - ② \end{array}.$$

これが解をもつ条件は $-3a+3b = -a+b = 0$. これは $a = b$ と同値. よって例えば $a = b = 1$ とすると $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり, このとき特殊解として $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が選べる. $\boldsymbol{v}_3$ を, $\boldsymbol{v}_1$ と合わせて V_2 の基底になるように一次独立に選ぶと, 例えば $a = 0, b = 1$ のときの $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすればよい. よって,

$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば $J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

（解2）まず $\boldsymbol{v}_2$ を,

$$(A-2E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{0}, \quad (A-2E)^2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$$

を満たすように選ぶ. $(A-2E)^2 = O$ だから第 2 の条件は自明に満たされるので, $\boldsymbol{v}_2$ として, 固有ベクトル以外の（$\boldsymbol{0}$ でない）任意のベクトルを選ぶ. 例えば, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とする. このとき $\boldsymbol{v}_1 = (A-2E)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\boldsymbol{v}_3$ は, $\boldsymbol{v}_1$ と合わせて V_2 の基底になるように一次独立に選ぶ.

例えば $\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とすると, $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

（5）固有多項式を計算すると（略）$\varphi(x)=(x-1)^3$ だから固有値 1（重複度 3）．固有空間を求めると（略）$V_1=\langle\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\rangle$．固有空間の次元が 1 だからジョルダン細胞の個数も 1 であり，$J=J(1,3)$．$P=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ とすると，$P^{-1}AP=J \iff AP=PJ \iff [A\boldsymbol{v}_1\ A\boldsymbol{v}_2\ A\boldsymbol{v}_3]=[\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3]$

$$\iff (A-E)\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0},\quad (A-E)\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1,\quad (A-E)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_2.$$

（解 1）$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ として，$(A-E)\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1$ となる $\boldsymbol{v}_2$ を求める．

$$[A-E|\boldsymbol{v}_1]=\left[\begin{array}{ccc|c}-4&2&-7&1\\0&0&2&2\\2&-1&4&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&4&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}③\\②/2\\①+2\times③\end{array}$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&0&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}①/2-2\times②\\ \\③-②\end{array}$$

これより特殊解として例えば $\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ が取れる．次に $(A-E)\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_2$ となる $\boldsymbol{v}_3$ を求める．

$$[A-E|\boldsymbol{v}_2]=\left[\begin{array}{ccc|c}-4&2&-7&-2\\0&0&2&0\\2&-1&4&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&4&1\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\begin{array}{l}③\\②/2\\①+2\times③\end{array}$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1/2&0&1/2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}①/2-2\times②\\ \\③-②\end{array}$$

これより特殊解として例えば $\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$ が取れる．

よって $P=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$ とすれば，$J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$．

（解 2）$(A-E)^2=\begin{bmatrix}2&-1&4\\4&-2&8\\0&0&0\end{bmatrix}$，$(A-E)^3=O$ である．

$(A-E)^3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$ および $(A-E)^2\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0}$ から，例えば $\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ と選ぶ．このとき $\boldsymbol{v}_2=(A-E)\boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{v}_1=(A-E)\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix}$ と定まる．

よって $P=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-2&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$ とすれば，$J=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$．

（参考）与えられた n 次行列 A の**ジョルダン標準形** J と基底変換行列 P の計算法

STEP 1. **固有多項式**を計算し，**固有値**とその**重複度**を求める．

固有多項式 $\varphi(x) = |xE - A|$ の行列式の計算は特に慎重に行う．$\varphi(x) = 0$ の解が固有値．

STEP 2. 各固有値に対応する**固有空間**の次元と基底を求める．

固有値 α に対応する固有空間 V_α は，方程式 $(A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間．

STEP 3. J を決定する．J の対角成分には固有値が（重複度の分だけ）順に並ぶ．

また，各固有値に対して，固有空間の次元はジョルダン細胞の個数に等しい．

STEP 4. $P = [\boldsymbol{v}_1\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n]$ とおき，$AP = PJ$ から $\boldsymbol{v}_j$ たちの方程式を求めて解く．

各ジョルダン細胞の左端に対応する $\boldsymbol{v}_j$ は固有ベクトルである．

※ STEP 3 詳細：

もし，固有空間の次元の和が n に等しい（$\iff$ すべての重複度が 1）なら**対角化可能**であり，対応する固有空間の基底を順に並べれば P が作れる．

$n = 2$ の場合は簡単なので省略．

$n = 3$ の場合：

1. 固有空間の次元の和が 3 なら $J(\alpha, 1) \oplus J(\beta, 1) \oplus J(\gamma, 1)$.（対角化可能）
2. 固有空間の次元の和が 2 なら $J(\alpha, 2) \oplus J(\beta, 1)$.
3. 固有空間の次元の和が 1 なら $J(\alpha, 3)$.

一般の場合（$n \le 3$ の場合は必要ないので，最初は読まなくてよい）：

各固有空間の次元だけでは，例えば $n = 4$ で $J(\alpha, 2) \oplus J(\alpha, 2)$ と $J(\alpha, 3) \oplus J(\alpha, 1)$ の区別がつかないが，最小多項式における α の重複度 $\nu (= 2, 3)$ で区別できる．ν はその固有値に対応するジョルダン細胞の大きさの最大値と等しい．$n \le 6$ ならこの方法で分かる．

$n \ge 7$ の場合，ν を見ても，例えば $J(\alpha, 3) \oplus J(\alpha, 2) \oplus J(\alpha, 2)$ と $J(\alpha, 3) \oplus J(\alpha, 3) \oplus J(\alpha, 1)$ の区別が付かないが，一般に $\mathrm{rank}(A - \alpha E)^i$（$i = 1, 2, \ldots, \nu$）の変化を調べればわかる．

※ STEP 4 で面倒な部分（$n = 3$ の場合，$J(\alpha, 2) \oplus J(\alpha, 1)$ の場合のみ関係する）：

固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を任意に取ってしまうと，一般には $(A - \alpha E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ の解が存在しない．

解 1：固有ベクトルから求めていく．J が分かっていなくても一般的に使える．

(1) $\boldsymbol{v}_1$ を $(A - \alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の一般解としてパラメータ表示しておく．

(2) $(A - \alpha E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$ の解 $\boldsymbol{v}_2$ が存在するための $\boldsymbol{v}_1$ のパラメータの条件を求める．

(3) そのときの解 $\boldsymbol{v}_2$ を求める（パラメータ表示する）．

(4) 以下，解が存在しなくなるまで繰り返す．

解 2：逆に，一般固有空間 W_α の最も深い基底から決めていく．

（一般に，$\ker(A - \alpha E)^i$ のベクトルを一つ浅い $\ker(A - \alpha E)^{i-1}$ の基底の延長となるように選ぶ.）

a) $J(\alpha, 2) \oplus J(\alpha, 1)$ の場合は，次のようにすればよい．

(1) W_α のベクトル（$(A - \alpha E)^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解）で，V_α に属さない $\boldsymbol{v}_2$ を選ぶ．

(2) $\boldsymbol{v}_1 = (A - \alpha E)\boldsymbol{v}_2$ で $\boldsymbol{v}_1$ を定める．

(3) 固有ベクトル $\boldsymbol{v}_3$ を $\boldsymbol{v}_1$ と独立になるように選ぶ．

b) $J(\alpha, 3)$ の場合は，次のようにすればよい．

(1) W_α のベクトル $\boldsymbol{v}_3$ で，$(A - \alpha E)^2\boldsymbol{v}_3 \ne \boldsymbol{0}$ なるものを選ぶ．

(2) $\boldsymbol{v}_2 = (A - \alpha E)\boldsymbol{v}_3$，$\boldsymbol{v}_1 = (A - \alpha E)\boldsymbol{v}_2$ で順に残りのベクトルを定める．

一般の場合は煩雑なので略．例えば $J(\alpha, 2) \oplus J(\alpha, 2)$ なら，$\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ を自明でない 1 次結合が固有空間に入らないように選び，$(A - \alpha E)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1$，$(A - \alpha E)\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_3$ とする．