解析入門 IIa（小林）第２回レポート問題

以下を全て解き，１月７日の講義開始時に提出すること．

1.

(1) $1-\sqrt{3}i$ を極形式（$re^{i\theta}$ の形）で表せ．

(2) $z^2 = 1-\sqrt{3}i$ の解をすべて求め，複素平面に図示せよ．

2. 複素数のべき乗は，$\alpha^\beta := e^{\beta \log \alpha}$ で定義され，一般には多価である．

(1) i^{-i} を計算せよ．

(2) $f(z) = i^z$ とする．$f'(-i)$ を計算せよ．

3. 複素関数 $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$ の実部・虚部を求めよ．

4. 次の微分を計算せよ．

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(1 + z^2 - \bar{z} + 2\log|z|)$$

以下では「単位円」とは 0 を中心とし半径 1 の円とする．

5. 単位円（反時計回り）のパラメータ表示は，たとえば $z = e^{it}$（$0 \le t \le 2\pi$）で与えられる．次の曲線をパラメータ表示せよ．

(1) 1 と $1+i$ までを結ぶ線分

(2) 単位上半円で 1 から -1 まで

(3) 1 を中心とし半径 1/2 の円（反時計回り）

6. $f(z)$ と C が次のように与えられたとき，$\displaystyle\int_C f(z)dz$ を計算せよ．

(1) $f(z) = 3z+1$，C は 1 から $1+i$ までの線分

(2) $f(z) = z^{-2} + z^3$，C は単位上半円で 1 から -1 まで

(3) $f(z) = \cos z$，C は 0 から i までの線分

(4) $f(z) = |z|$，C は単位円（時計回り）

(5) $f(z) = z^3 - z - 2z^{-1}$，C は単位円（反時計回り）

(6) $f(z) = \dfrac{1}{i+2z}$，C は単位円（反時計回り）

(7) $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1-z}$，$C$ は $2+i, -1+i, -1-i, 2-i$ を結ぶ長方形（反時計回り）

(8) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$，$C$ は単位円（反時計回り）

7. $1/(1-z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \ (|z| < 1)$ が成り立つ．
$f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1-2z)}$ とする．点 $z=0$ のまわりのテイラー級数を求めよ．

[解析入門 IIa 第 2 回レポート問題解答例]

1.

(1) $1-\sqrt{3}i$ を極形式（$re^{i\theta}$ の形）で表せ．

$r=|1-\sqrt{3}i|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2$，$\tan\theta=-\sqrt{3}/1$ よりたとえば $\theta=-\pi/3$ とすればよいから，$1-\sqrt{3}i=2e^{(-1/3+2n)\pi i}$．（$n$ は任意の整数）

（$1-\sqrt{3}i=2e^{-\pi i/3}$ だけでもよい）

(2) $z^2=1-\sqrt{3}i$ の解をすべて求め，複素平面に図示せよ．

$z=r'e^{i\theta'}$ とすると，$r'^2=2$，$2\theta'=(-1/3+2n)\pi$ より，$r'=\sqrt{2}$，$\theta'=-\pi/6+n\pi$．これより $z=\pm\sqrt{2}\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)$

（図は省略）

2. 複素数のべき乗は，$\alpha^\beta:=e^{\beta\log\alpha}$ で定義され，一般には多価である．

(1) i^{-i} を計算せよ．

$i^{-i}=e^{(-i)\log i}$．$\log i=0+\frac{\pi}{2}i+2n\pi i=(2n+\frac{1}{2})\pi i$（$n$ は任意の整数）であるから，

$$i^{-i}=e^{(-i)(2n+\frac{1}{2})\pi i}=e^{(2n+\frac{1}{2})\pi}$$

(2) $f(z)=i^z$ とする．$f'(-i)$ を計算せよ．

$f(z)=e^{z\log i}$ より $f'(z)=e^{z\log i}\log i=i^z\log i$．

$$f'(-i)=i^{-i}\log i=i\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi e^{(2n+\frac{1}{2})\pi}$$

（n は $\log i$ の値から決まったものだから共通の整数）

3. 複素関数 $f(z)=z+\dfrac{1}{z}$ の実部・虚部を求めよ．

様々な表し方があるが，共役を用いると

$$\mathrm{Re}(z+\frac{1}{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}+\overline{(z+\frac{1}{z})}\right)=\frac{1}{2}(z+\bar{z}+\frac{z+\bar{z}}{\bar{z}z})=\frac{z+\bar{z}}{2}(1+\frac{1}{\bar{z}z}),$$
$$\mathrm{Im}(z+\frac{1}{z})=\frac{1}{2i}\left(z+\frac{1}{z}-\overline{(z+\frac{1}{z})}\right)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}+\frac{\bar{z}-z}{\bar{z}z})=\frac{z-\bar{z}}{2i}(1-\frac{1}{\bar{z}z}),$$

$z=x+iy$（x,y は実数）と表すと

$$z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\text{ より，実部 }x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)\text{，虚部 }y\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

あるいは，極形式で $z=re^{i\theta}$ と表すと

$$z+\frac{1}{z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\text{ より実部 }(r+\frac{1}{r})\cos\theta,\text{ 虚部 }(r-\frac{1}{r})\sin\theta.$$

4. 次の微分を計算せよ．

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(1+z^2-\bar{z}+2\log|z|)$$

$2\log|z|=\log\bar{z}z=\log\bar{z}+\log z$ に注意すると 0.（調和関数の例）

以下では「単位円」とは 0 を中心とし半径 1 の円とする．

5. 単位円（反時計回り）のパラメータ表示は，たとえば $z=e^{it}$（$0\le t\le 2\pi$）で与えられる．
次の曲線をパラメータ表示せよ．

(1) 1 と $1+i$ までを結ぶ線分

$z=1+it$（$0\le t\le 1$）．

※一般に，z_0 と z_1 を結ぶ線分は $z=(1-t)z_0+tz_1$（$0\le t\le 1$）でパラメータ表示できる．

(2) 単位上半円で 1 から -1 まで

$z = e^{it}$（$0 \le t \le \pi$）

(3) 1 を中心とし半径 1/2 の円（反時計回り）

$z = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$（$0 \le t \le 2\pi$）

6. $f(z)$ と C が次のように与えられたとき，$\displaystyle\int_C f(z)dz$ を計算せよ．

(1) $f(z) = 3z + 1$，C は 1 から $1 + i$ までの線分

$$\int_C (3z+1)dz = \int_0^1 (3(1+it)+1)idt = \int_0^1 (4i - 3t)dt = 4i - \frac{3}{2}$$

(2) $f(z) = z^{-2} + z^3$，C は単位上半円で 1 から -1 まで

$$\int_C (z^{-2}+z^3)dz = \int_0^\pi (e^{-2it} + e^{3it})ie^{it}dt = \int_0^\pi (e^{-it} + e^{4it})idt = [-e^{-it} + \frac{1}{4}e^{4it}]_0^\pi = 2$$

(3) $f(z) = \cos z$，C は 0 から i までの線分

$$\int_C \cos z dz = \int_0^1 \cos(it)\cdot idt = \int_0^1 \frac{e^{-t}+e^t}{2}idt = \frac{i}{2}[-e^{-t}+e^t]_0^1 = \frac{i}{2}(e - e^{-1}) = \frac{e^2-1}{2e}i$$

(4) $f(z) = |z|$，C は単位円（時計回り）

C 上では定数関数 1 と同じだから正則関数に対するコーシーの積分定理より 0.

(5) $f(z) = z^3 - z - 2z^{-1}$，C は単位円（反時計回り）

$f(z) = (z^4 - z^2 - 2)/z$．$g(z) = z^4 - z^2 - 2$ とおくと

$$\int_C f(z)dz = \int_C \frac{g(z)}{z}dz$$

この値はコーシーの積分公式より $2\pi i g(0) = -4\pi i$

(6) $f(z) = \dfrac{1}{i+2z}$，C は単位円（反時計回り）

$z = -\frac{i}{2}$ 以外で $f(z)$ は正則であるから，コーシーの積分定理より，積分路を $z = -\frac{i}{2}$ を中心とし半径 $\frac{1}{2}$ の円に取り替えても積分値は変わらない．分母が「$z-$ 定数」の形になるよう変形すると，

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z+\frac{i}{2}}$$

であり，コーシーの積分公式（あるいは置換積分）より $\frac{1}{2}2\pi i = \pi i$

(7) $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{1-z}$，$C$ は $2+i, -1+i, -1-i, 2-i$ を結ぶ長方形（反時計回り）

$f(z)$ は $z = 0, 1$ 以外では正則だから，積分路を $0, 1$ をそれぞれ中心とする半径 1/2 の円（反時計回り）C_0, C_1 の和に取り替えても，コーシーの積分定理により積分の値は変わらない．よって，

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0+C_1} \frac{dz}{z} - \int_{C_0+C_1} \frac{dz}{z-1} = \oint_{C_0} \frac{dz}{z} + 0 - 0 - \int_{C_1} \frac{dz}{z-1} = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

(8) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$，$C$ は単位円（反時計回り）

導関数の積分表示を用いる．$\sin z$ の 3 回微分は $-\cos z$ であるから，$2\pi i(-\cos 0)/3! = -\pi i/3$.

7. $1/(1-z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ $(|z| < 1)$ が成り立つ．
$f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1-2z)}$ とする．点 $z = 0$ のまわりのテイラー級数を求めよ．

$$f(z) = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z}$$

を満たす定数 A, B を求めると，$A = -1$，$B = 2$．よって，

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k + 2\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(2^k - 1)z^k$$

ただし，べき級数は $|z| < 1, |2z| < 1$ で広義一様に絶対収束するから，この範囲で項の順序を取り替えても構わない．よって z の範囲は $|z| < \frac{1}{2}$.（実際，根判定法から収束半径は 1/2 であることが確かめられる．）

解析入門 IIa（小林）確認試験

２００８年1月7日（月）１３：００－１４：３０@１－２４０

まず **1.** がすべて正解したことを確認してもらってから，残りを解くこと．**1.** が不正解の場合は，席に戻って再挑戦.「第２回レポート問題解答例」・自筆ノートのみ持ち込み可．相談不可.

以下では，周回積分はすべて反時計回りとする.

1.

（1）C を 1 を中心とし，半径 1 の円とする．C のパラメータ表示（反時計回り）をひとつ与えよ.

（2）$\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z+1}{z-1}dz = \int_C \frac{z+1}{z-1}dz$ である．これを示すには例えば何という定理を用いればよいか ？

（3）（2）の積分の値を求めよ.

2.

$z^3 = -2\sqrt{2}$ の解をすべて求め，複素平面に図示せよ.

3.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(1-z)}$$

とする.

（1）

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1}$$

を満たす定数 A, B, C を求めよ.

（2）次の積分を計算せよ.

$$\int_{|z|=2} f(z)dz$$

解析入門 IIa（小林）確認試験　解答例

1.

（1）C を 1 を中心とし，半径 1 の円とする．C のパラメータ表示（反時計回り）をひとつ与えよ．

解．

$z = 1 + e^{it}$（$0 \le t \le 2\pi$）

（2）$\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z+1}{z-1} dz = \int_C \frac{z+1}{z-1} dz$ である．これを示すには例えば何という定理を用いればよいか ？

解．

コーシーの積分定理

（3）（2）の積分の値を求めよ．

解．

（解 1）$g(z) = z + 1$ とおいてコーシーの積分公式を用いれば，$2\pi i g(1) = 4\pi i$

（解 2）

$$\int_C \frac{z+1}{z-1} dz = \int_C \left(1 + \frac{2}{z-1}\right) dz$$

コーシーの積分定理より $\int_C dz = 0$ である．$\zeta = z - 1$ とおくと

$$= \int_{|\zeta|=1} \frac{2d\zeta}{\zeta} = 4\pi i$$

（解 3）$z = 1 + e^{it}$ を用いると，

$$\int_C \frac{z+1}{z-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{2+e^{it}}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} (2i + i\cos t - \sin t) dt = [2it + i\sin t + \cos t]_0^{2\pi} = 4\pi i$$

2. $z^3 = -2\sqrt{2}$ の解をすべて求め，複素平面に図示せよ．

解．

$z = re^{i\theta}$ と置くと，$r^3 e^{3i\theta} = 2^{3/2} e^{i\pi}$．よって，$r = \sqrt{2}$，$3\theta = \pi + 2n\pi$（$n$ は整数）．$-\pi < \theta \le \pi$ では，$\theta = -\pi/3,\ \pi/3,\ \pi$．

$$z = -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}i}{2}$$

図示は省略（実軸の負の部分に 1 つ，残り 2 点と原点を中心とする正三角形を形作る）

3.

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(1-z)}$$

とする．

（1）

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1}$$

を満たす定数 A, B, C を求めよ．

解．

$z \ne 0, 1$ のとき，分母を払うと $1 = A(1-z) + Bz(1-z) - Cz^2$．この式は無限個の z で成立する高々2 次方程式であるから，恒等式である．よって $z = 0, 1$ でも成り立つ．

$z = 0$ を代入すると $1 = A$．$z = 1$ を代入すると $1 = -C$．z^2 の係数を比較して $B = 1$．よって $A = B = 1$，$C = -1$．

（2）次の積分を計算せよ．

$$\int_{|z|=2} f(z) dz$$

解．

$(e^z)' = e^z$ に注意すると，コーシーの積分公式・導関数の積分表示から，

$$\int_{|z|=2} f(z) dz = \int_{|z|=2} \left(\frac{e^z}{z^2} + \frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z-1}\right) dz = 2\pi i(e^0 + e^0 - e) = 2\pi i(2 - e)$$

解析入門IIa（小林）・留数による積分計算

以下，積分は反時計回りとする．

留数：$f(z)$ の $z=a$ におけるローラン展開の -1 次の係数を $z=a$ における**留数**といい $\mathrm{Res}(f(z),a)$ で表す．

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots \quad \text{のとき}, \mathrm{Res}(f(z),a)=c_{-1}.$$

単純極の留数：$z=a$ で単純極の場合,（$g(z),h(z)$ は正則で $g(a)\neq 0$ とする）

$$\mathrm{Res}(f(z),a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z), \quad \mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},a\right)=\frac{g(a)}{h'(a)}$$

高位の極の留数：$z=a$ で m 位の極の場合,

$$\mathrm{Res}(f(z),a)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-a)^m f(z)\}\right]$$

部分分数展開：有理関数は部分分数の和に分けられる．未定係数法などで係数は求まる．

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^n (z-a_k)^{m_k}}=\sum_{1\le k\le n,\ 1\le l\le m_k}\frac{b_{kl}}{(z-a_k)^l} \quad (b_{kl}\ \text{は定数})$$

留数定理：$f(z)$ は，有限個の単純閉曲線 C が囲む閉領域上，内部の孤立特異点 $a_1,\ldots,a_n$ を除き正則ならば，次が成り立つ．

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(f(z),a_k)$$

三角関数の有理関数の積分：$z=e^{i\theta}$ と置換すると，単位円内の留数から計算できる．

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

有理関数の広義積分：$f(x)$ は，(i) 上半平面で有限個の極 $a_1,\ldots,a_n$ を除いて正則，(ii) 実軸上に特異点を持たず，(iii) $\lim_{|z|\to\infty}zf(z)=0$（例：<u>分母が分子より 2 次以上大</u>）とする．上半平面の半円上で積分する．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(f(z),a_k)$$

フーリエ積分：$f(x)$ は上の (i)(ii) および (iii) $|f(Re^{i\theta})|<\varepsilon(R)$，$\varepsilon(R)\to 0(R\to\infty)$ となる関数 $\varepsilon(R)$ が存在（例：<u>分母が分子より 1 次以上大</u>）を満たし，(iv) $\lambda>0$ とする．上と同じ積分路で積分する．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx=2\pi i\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}(f(z)e^{i\lambda z},a_k)$$

$f(x)$ が実数値関数のとき，実部・虚部を取ることで次が求まる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\lambda x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\lambda x dx$$

単純極の迂回：$f(z)$ が積分路上 $z=a$ で単純極を持つとき，小さい円弧（中心角 α）で迂回すると，$\alpha i\,\mathrm{Res}(f,a)$ の寄与がある（迂回路の向きに注意）．

例：e^{ix}/x の積分の虚部として計算する．積分路は 0 を迂回し，偶関数であることに注意．

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2} \quad \textbf{（正弦積分）}$$

ガウス積分：次を用いることもある．この式自体は重積分などでも示せる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}, \quad \int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$f(x)/x^\alpha$ の積分：有理関数 $f(z)$ は (i) 有限個の極 $a_1,\ldots,a_n$ を除いて正則，(ii) 負の実軸上に特異点を持たず，(iii) $\lim_{|z|\to\infty}|zf(z)|<\infty$ とする．$0<\alpha<1$ に対し，C 字型の積分路により，

$$(1-e^{-2\alpha\pi i})\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}dx=2\pi i\sum_{k=1}^n \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z^\alpha},a_k\right)$$

積分区間の変更：偶関数・周期関数など対称性がある場合，積分区間を適宜変えて計算する場合がある．

解析入門 IIa（小林）期末試験

平成 20 年（2008 年）2 月 4 日（月）3 限

自筆のノートのみ持ち込み可．答えのみではなく，詳細に理由を説明すること．

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z+1)}$ の極と，そこでの位数および留数を求めよ．

2. 次の広義積分の値を留数定理を用いて求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$$

3. 有理関数 $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^2+1}$ に対し次の問いに答えよ．

（１）$f(z)$ の孤立特異点を求め，複素平面に図示せよ．(ヒント：$(z^2-1)(z^4+z^2+1)$ を計算せよ)

（２）次の広義積分の値を留数定理を用いて求めよ．

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}$$

4. D を複素平面内の領域，$z = x+iy$（x, y は実数）とし，D 上の実数値連続関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を考える．

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が D 上で正則となる条件について，知るところを述べよ．

解答例（略解）

1. 極は分母が 0 を解いて $z=0,-1$．分子が 1 なので極の位数は分母における解の重複度に等しいからそれぞれ $3,1$．$z=0$ におけるローラン展開は

$$f(z)=\frac{1}{z^3}(1-z+z^2-h.o.t.)=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-h.o.t.$$

これより留数は 1．$z=-1$ における留数は

$$\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{1}{z^3(z+1)}=-1.$$

2. $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{1+z^2}$ とおく．分子は整型関数（複素平面全体で正則な関数）である．分母は $z=\pm i$ のみに零点を持つ正則関数である．よって，$f(z)$ は有理型関数で，上半平面で極 $z=i$ を除いて正則であり，実軸上に特異点を持たない．$z/(1+z^2)$ は分母の次数が分子の次数より 1 大きいので，フーリエ積分の留数定理による計算方法が使える．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx=\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^2}dx=\mathrm{Im}\left(2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)\right)=\mathrm{Im}(2\pi i\frac{ie^{-1}}{2i})=\frac{\pi}{e}$$

3. （1）$f(z)$ は正則関数の比であるから，特異点は分母の零点に他ならない．

$(z^2-1)(z^4+z^2+1)=z^6-1$ より $z^6=1$．よって，$\alpha=e^{\frac{2\pi i}{6}}=(1+i\sqrt{3})/2$ とおいて $z=\alpha^k$ と表せる．このうち ±1 を除いて，$k=1,2,4,5$．極は $(\pm1\pm i\sqrt{3})/2$ の 4 つ．(図示は省略)

（あるいは，$z^4+z^2+1=(z^2+1)^2-z^2=(z^2+z+1)(z^2-z+1)$ より）

（2）被積分関数は偶関数であるから，

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$$

となる．$f(z)$ は，分母の次数が分子の次数より 2 以上大きい有理関数であり，$f(z)$ の上半平面上の極は α,α^2 であり，実軸上に極は存在しない．上半平面の半円上の積分路を用いた留数計算を用いる．

$$=\frac{2\pi i}{2}\sum_{k=1}^{2}\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+z^2+1},\alpha^k\right)$$

極は単純極であるから g/h' の公式を用いる．また，$\alpha^3=-1$，および $\alpha\neq\pm1$ より導かれる $\alpha^2-\alpha+1=0$ に注意して整理する．

$$=\pi i\left(\frac{1}{4\alpha^3+2\alpha}+\frac{1}{4\alpha^6+2\alpha^2}\right)=\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{-2+\alpha}+\frac{1}{2+\alpha^2}\right)=\frac{\pi i}{2}\frac{\alpha^2+\alpha}{-2\alpha^2+2\alpha-5}=\pi i\frac{2\alpha-1}{-6}=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

4. $f(z)$ が D の各点で複素微分可能（正則）

$\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$，$v(x,y)$ が D の各点で全微分可能で，コーシー・リーマンの関係式を満たす

$\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$，$v(x,y)$ が D の各点で全微分可能で，$\dfrac{\partial f}{\partial\bar{z}}=0$

$\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$，$v(x,y)$ が D の各点で調和関数で，コーシー・リーマンの関係式を満たす

$\Longleftrightarrow$ $f(z)$ が D の各点でべき級数に展開され，正の収束半径をもつ（解析的）

$\Longleftrightarrow$ 単純閉曲線 C が囲む領域が D に含まれるとき $\int_C f(z)dz=0$ （コーシーの積分定理，モレラの定理）

$\Longleftrightarrow$ D の各点 z に対し，単純閉曲線 C が囲む領域が D に含まれ，z を含むように C を取るとき，$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$（コーシーの積分公式，コーシーの積分公式の逆＋一致の定理）