平成 16 年度後期 線形代数 IID

10/4 計量線形空間 5-2 〜 5-5

(1) 前期のまとめ：連立１次方程式・行列式、数ベクトル空間と線形空間の関係
(2) 内積とノルムの復習、内積による係数の読み取り
(3) 内積、ノルム、計量線形空間の定義
(4) 線形結合に表す例：Fourier 級数。周期関数を余弦・正弦関数の和に書く
(5) Gram-Schmidt の直交化法、区間 $[0,1]$ における積分に関する直交多項式

演習問題：テキスト pp.130–131 [2][3][4]

10/13 計量線形空間 5-2 〜 5-5

(1) 前回の復習・補足
(2) x の Fourier 展開

演習問題：テキスト pp.130–131 [2][3][4][5]（前回の続き）

10/18 線形常微分方程式の解法 5-1, 微分方程式と固有値問題 6-1

(1) 直交変換
(2) 定数係数 1 変数線形常微分方程式の解法:1 階の場合
(3) 因数分解により 1 階の組合わせ、線型方程式の解の構造定理の応用
(4) 対角化による解法

演習問題：なし。出席のみ。

10/25 行列の固有値・固有ベクトルと固有空間への分解 6-2

(1) 固有値・固有ベクトル
(2) 計算方法

演習問題：プリント [8]（3 次行列）

11/8 続き

(1) 対角化可能・固有ベクトルからなる基底の存在
(2) 固有空間の直和、固有多項式の重複度と固有空間の次元、最小多項式が重解なし
(3) 計量線形空間の場合。ユニタリ行列で対角化可能・固有ベクトルからなる正規直交基底の存在・固有空間の直交直和
(4) 正規行列

演習問題：プリント [8]（4 次行列）、[9]

11/15 正規行列のユニタリ行列による対角化 6-3

(1) 計算例
(2) ユニタリ行列により対角化可能と正規行列であることは同値
(3) Hermite/unitary 行列の固有値

演習問題

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

をユニタリ行列により対角化せよ。

11/22 スペクトル分解 6-4

(1) 最小多項式と固有多項式の根の一致
(2) 射影（演算）子
(3) 直交射影、スペクトル分解

演習問題 [4][1]

11/29 2 次形式 6-5, 中間試験

(1) 2 次形式・双一次形式・Hermite 形式
(2) 正定値

12/6

(1) 試験の解説
(2) 2 次形式の標準形
(3) 2 次曲面

12/13 7-1 7-2

(1) 2 階の線形常微分方程式（特性方程式が重解の場合）と、微分作用素の表現行列
(2) 代数学の基本定理（証明なし）
(3) 複素行列の上三角化
(4) 固有値の和・積はトレース・行列式と一致。

演習問題：次の中から選んで解け。
p.181 [1][2][3].
Jordan 細胞のべき乗を計算せよ。
$D = d/dt$ とする。$(D-\alpha)^3 u(t) = 0$ を解け。
プリント [8](a) 以降の問題。

12/20 7-2 ～ 7-5

(1) 冪零行列の標準形
(2) Jordan 標準形
(3) 広義固有空間
(4) Cayley-Hamilton の定理

演習問題：プリント 4(3) （Jordan 標準形 $J(0,1)+J(5,2)$）

1/17 8-1

(1) LU 分解

演習問題：章末 [3](c)

1/24 例題解説

プリント 1,2,4(3),5(1) の解説

線形代数 IIᴅ 中間試験 （平成 16 年 11 月 29 日）

答だけでなく途中の計算もしっかり書くこと。持込相談等不可。45 分。

1.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \,\middle|\, x+y+z+w=0 \right\}$$

とする。すなわち、$\mathbb{C}^4$ の座標を x, y, z, w とするとき、$x+y+z+w=0$ を満たす元からなる部分空間が W である。

(1) W の元

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は一次独立であることを示せ。

(2) v_1, v_2, v_3 を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ。

2. 次の行列 A に対し問いに答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 固有多項式、固有値を求めよ。
(2) 固有ベクトルを求めよ。
(3) 可能ならユニタリ行列で対角化せよ。

略解と採点基準など

1. (1) $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ とすると、$a+b=0$, $-a=0$, $a+c=0$, $-a-b-c=0$. これを解くと $a=b=c=0$ となるから v_1, v_2, v_3 は一次独立。

（5 点。v_i を並べた行列を基本変形した結果に到達している場合は 3 点。一次独立の定義をわかっているようであれば 2 点。）

(2) 計算は省略すると、

$$\tilde{v_1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \tilde{v_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \tilde{v_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

（5 点。計算方法がわかっているようなら 2 点。）

2. (1) 計算は省略すると、$\Phi_A(\lambda) = (\lambda+2)^3(\lambda-2)$, 固有値は $\lambda = \pm 2$.

（5 点。部分点はなし）

(2) 固有値 2 に対する固有ベクトルは、

$$t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

（2 点）

固有値 -2 に対する固有空間は第 1 問の W と一致するので、第 1 問の v_1, v_2, v_3 の 0 でない一次結合。

（3 点）

(3) 第 1 問により W の正規直交基底が一組求まっている。

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

は正規直交基底をならべた行列であるからユニタリ行列（直交行列）であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

（5 点。実対称行列だから直交行列で対角化できることを言っていれば 2 点。単なる対角化は 1 点。）

合計 25 点。受験者 68 人、最高点 25 点、平均点 11.8 点。

1. 線形変換 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の表現行列を A とする。

(1) n が奇数の時、f の固有ベクトルが存在することを示せ。

(2) k を正の偶数として、$A^k+E=O$ が成り立つ時、任意の f-不変部分空間は偶数次元であることを示せ。(特に n は偶数になる。)

2. A を実 3 次行列とし、$A^4+A^2=O$ とする。

(1) A は固有値 0 を持つことを示せ。

(2) A の最小多項式 $m_A(t)$ の可能性をすべて求めよ。

(3) A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ の可能性をすべて求めよ。

3. $A\in M_n(\mathbb{R})$ に対し、$Z(A)=\{X\in M_n(\mathbb{R})|AX=XA\}$ とおく。単位行列のスカラー倍で書ける行列をスカラー行列と呼ぶ。次を示せ。

(1) $n=2$ のとき、
A がスカラー行列でない $\Leftrightarrow Z(A)=\{A$ の多項式全体$\}=\{pA+qE|p,q\in\mathbb{R}\}$.

(2) $n=3$ のとき、$Z(A)=\{pA^2+qA+rE|p,q,r\in\mathbb{R}\}$
$\Leftrightarrow A$ の各固有値に対応する固有空間が 1 次元.
(難しければ $\mathbb{C}$ 上で考えてもよい。一般の n ではどうなるか？)

4. 次の行列 A の Jordan 標準形 J および $J=P^{-1}AP$ となる正則行列 P を求めよ。係数は複素数で考える。

(1) $\begin{pmatrix}6&-1&-3\\12&-4&-6\\4&0&-2\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}2&0&0\\4&0&2\\6&-3&5\end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix}-4&6&0\\-6&9&0\\-5&5&5\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}5&2&-2\\-3&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix}5&-3&-19\\-4&8&-17\\-1&2&8\end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix}3&4&6&-2\\-1&-2&-5&2\\-1&-1&0&0\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&-2&0\end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\-9&5&0&3\\-3&1&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix}5&-3&2&1\\1&2&1&0\\-3&3&0&-1\\0&2&1&1\end{pmatrix}$ (a) $\begin{pmatrix}5&-1&-2&1\\-5&-11&-10&-1\\8&26&22&1\\10&34&20&8\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}2&0&-1&-2\\-2&4&4&6\\4&-4&-4&-8\\-2&2&3&6\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1&0&0&2&1\\0&0&1&1&0\\1&-1&2&0&-1\\-1&0&0&4&1\\2&0&0&-4&0\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-1\\1&3&-2&-2&2\\-1&-1&0&0&1\\-1&-1&-2&2&1\\-2&-2&-4&0&4\end{pmatrix}$

5. 次の行列の Jordan 標準形はどうなるか。また、加法的 Jordan 分解はどうなるか。なお、固有値は複素数の範囲で考える。

$$(1)\ \begin{pmatrix}2&0&0\\6&5&3\\-6&-3&-1\end{pmatrix}\qquad (2)\ \begin{pmatrix}1&2&2\\1&-1&1\\4&-12&1\end{pmatrix}$$

6. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ。ただし、$\varepsilon=0$ または 1 とする。

$$A=\begin{pmatrix}0&1&\varepsilon&0\\-\alpha^2&2\alpha&0&\varepsilon\\0&0&0&1\\0&0&-\alpha^2&2\alpha\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&\varepsilon&0\\-\alpha^2&2\alpha&0&\varepsilon\\0&0&0&-\alpha^2\\0&0&1&2\alpha\end{pmatrix}$$

線形代数 IIᴅ 期末試験 （平成 17 年 1 月 31 日）

答だけでなく途中の計算もしっかり書くこと。持込相談等不可。中間試験の点数との合計が 60 点までとして採点する。なお、採点した答案は研究室（理学部棟 670）の前で返却するので後日取りに来ること。

1. （１５点）
次の行列 A の LU 分解を求め、それを用いて逆行列 A^{-1} を計算せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. （１０点）
次の行列 A をユニタリ行列で対角化せよ。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. （５点）
A を 3 次行列とする。A の固有多項式が $\varPhi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3$ となるとき、A の最小多項式の可能性をすべて挙げ、それぞれを最小多項式とする A の例を与えよ。

4. （２０点）
次の行列 A に対し問に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 10 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

(1) 固有多項式と固有値を求めよ。
(2) 最小多項式を求めよ。
(3) A の Jordan 標準形 J と $P^{-1}AP = J$ となる正則行列 P を一組求めよ。

解答例

1.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

L, U, L^{-1}, U^{-1}, A^{-1} に各 3 点。

2. A は実対称行列であるからユニタリ行列（直交行列）によって対角化できる。固有多項式は $\Phi_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda-3)^2$ となるので, 固有値は 3（重解）, 0.（2 点）

0 に対応する単位固有ベクトルとして $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が取れる。（2 点）3 に対応する固有空間はその直交補空間で, 正規直交基底として $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が取れる。（5 点）$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とすれば U はユニタリ行列（直交行列）で, $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ と対角化される.（1 点）

3. A の最小多項式は、固有多項式を割り切り、固有多項式と根の集合が一致し、1 次以上 3 次以下の、最高次の係数が 1 である多項式だから、$\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$, $(\lambda+1)^3$ の 3 通りで、それぞれの A の例は $-E$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

例まで書いて各 1 点、理由に 2 点。

4. 固有多項式は $(\lambda+1)^3$ となるので固有値は -1（3 重解）.（5 点、固有多項式にマイナスがついていても減点しなかった）

$A+E \neq O$, $(A+E)^2 = O$ となるので, 最小多項式は $(\lambda+1)^2$.（5 点）

(2) より Jordan 細胞の大きさの最大値は 2 であり 2 次の細胞と 1 次の細胞の直和になる.（5 点）$\ker(A+E)^2$ に含まれ $\ker(A+E)$ に含まれないベクトルとして例えば $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選ぶと、$(A+E)v = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$. これと一次独立な固有ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を選び、$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると、$J = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる.（5 点、固有空間を求めていれば 2 点）

平成 16 年度前期 線形代数 ID

質問は随時。Office Hour を水曜 14:00〜15:30 に理学部棟 670 で設けている。

4/12 1-1 1-4 数ベクトル空間

1. 複素 n 次元ベクトル

(1) 高校までの、数ベクトル/矢線ベクトル/位置ベクトル、の対応を確認
(2) n 次元に一般化、さらに応用のため複素ベクトルに一般化
(3) 加法とスカラー倍の定義と性質（証明抜き）

2. ベクトル値関数の微積分
成分ごとに普通の微積分。

3. 内積・ノルム

(1) 内積の定義
(2) 双線形性（第 1 成分について歪線形とする）、歪対称性（口頭での説明のみ）
(3) Schwarz の不等式（まず、ノルムを定義し非負性を示す。その後、教科書にあるように線形結合の係数に適切な値を代入して証明した）
(4) 三角不等式（Schwarz の不等式を用いた）

演習：

(1) テキスト p.18 [1]（特に (1)）
(2) 次の $P(t)$ について、$\frac{d}{dt}P(t)$, $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 P(t)$ を計算せよ。

$$P(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t + 1 \\ 2\cos t + 2\sin t + 3 \\ -1\cos t + 2\sin t - 2 \end{pmatrix}$$

(3) 次の複素ベクトル a, b について、$||a||$, $||b||$, $a \cdot b$ を計算せよ。

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 2+i \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5+5i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

4/19 1-3 R^3 の幾何

内積とノルムの定義の復習（複素の場合、共役を取る）

1. 外積

(1) 座標による定義
(2) 性質（役に立つ）：向き（直交・右手系）と大きさ（面積)、外積の交代性

Cauchy-Schwarz のお釣りが外積、複素でも定義はできるし内積が０という意味で「直交」する、外積は軸性ベクトル

2. 直線平面のパラメータ表示・方程式

(1) 直線の方向ベクトルとパラメータ表示
(2) 平面のパラメータ表示
(3) 平面の法線ベクトルと方程式
(4) 直線の方程式

3. 応用

(1) 直線・平面への正射影
(2) 点と平面の距離の公式
(3) 点と直線の距離（正射影、パラメータ表示の平方完成、平行四辺形の面積/底辺）
(4) 直線と直線の距離（パラメータ表示の平方完成、平行六面体の体積/底面積)

演習：

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とする。

(1) a, b の外積を計算せよ。
(2) $(0, 0, 1)$ を通り a, b に平行な平面 α の方程式を求めよ。
(3) 点 $(1, 1, 1)$ と α の距離を求めよ。

テキスト p.18 問題 [2]（平行四辺形の面積＝外積ベクトルの長さ)、[3](a)（平行六面体の体積/6）

4/26 1-2 回転、1-5 3 次元の一次変換、2-1 行列

1. 平面の回転
 (1) 相似変換
 (2) 平面の原点を中心とする角 θ の回転
 (3) 等長変換であること（略）
 (4) 行列の掛け算による表示
 (5) 回転の合成、加法定理、行列の積

2. ３次元の一次変換（具体的に書く）(略)
 (1) R^3 の原点を固定する等長変換（例)、クロネッカーの δ
 (2) 一次変換と行列表示、一次変換＝線形変換

3. 行列
 (1) 行列の定義と例、成分、対角成分、行、列、1 次変換は線形変換（あとで）
 (2) 行列の等号、加法・スカラー倍、$-A$、零行列、行列全体は線形空間（演習）
 (3) 1 次変換の合成、積、単位行列（次回)、交換可能
 (4) 実行列、複素行列、複素共役行列、転置行列、対角和（トレース)、対角和は転置不変（演習）

演習：
テキスト問題：
 (1) p.56 [7]（行列の積）（行列の積に慣れたい人は例題 2-1, 2-2 も）
 (2) p.55 [3]（積の trace）（難しければ 2×2 行列でよい）
 (3) テキスト $(2, 8)$ を確かめよ。
 (4) $\mathrm{Tr}\,{}^t A = \mathrm{Tr}\,A$ を示せ。

5/10 2-2 逆行列

1. 逆行列の定義
 (1) 積の復習、結合法則、一般には交換法則は成り立たない、単位行列
 (2) n 次正方行列、逆行列（左右の逆行列は一致)、正則行列

2. 逆行列の計算
 (1) 連立１次方程式を Gauss の消去法で解く
 (2) $(A\ E)$ の基本変形

テキスト問題：
 (1) p.55[1]
 (2) p.55[2]

5/17 2-3 行列の基本変形

 (1) 行に関する基本変形
 (2) 要を作り、掃き出す
 (3) 基本行列と左側からの掛け算、列に関する基本変形
 (4) 階数

テキスト問題：p.56[5]

$$(e)\ \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix},\ (f)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -3 & -6 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

5/24 2-4 〜 2-6

(1) 随伴行列、内積との関係
(2) エルミート行列、反エルミート行列、対称行列、交代行列、ユニタリ行列、直交行列、正規行列
(3) 線形常微分方程式の解法（おはなし）、行列の関数・微分

テキスト問題：p.56[6]

2 次行列

$$\begin{pmatrix} a_{11}+ib_{11} & a_{12}+ib_{12} \\ a_{21}+ib_{21} & a_{22}+ib_{22} \end{pmatrix}$$

がエルミート行列になるための条件を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を対称行列と交代行列の和に表せ。

5/31 3-1,3-2

(1) 2 元 2 次、3 元 3 次連立１次方程式の解法と行列式
(2) サラスの方法

中間試験（第 1〜2 章）

線形代数 Id 中間試験（平成 16 年 5 月 31 日）

答だけでなく、基本変形など途中の計算もしっかり書くこと。持込相談等不可。45 分。

1. 次の行列の階数はいくらか。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\mathbb{R}^3$ の中で、3 点 $A(1,0,0)$, $B(2,1,-1)$, $C(1,2,3)$ を通る平面を α とする。点 $D(4,-5,4)$ と α の距離を求めよ。

解答

1. 基本変形による（略）。
答：階数 2。
6 点。計算間違いの場合どのような基本変形をしたか記入しているものは 2 点。

2. (AE) に行に関する基本変形を行い (EA^{-1}) にする（略）。

$$答：\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8 点。部分点は 2 点。

3. α の法線ベクトルは

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

点 A を通ることから、α の方程式は $5x - 3y + 2z - 5 = 0$. 点と平面の距離の公式から求める距離は、

$$\frac{|5 \cdot 4 - 3(-5) + 2 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \sqrt{38}. \ \cdots 答$$

別解：AB, AC, AD で張られる平行六面体の体積を AB, AC で張る底面の平行四辺形の面積で割ればよい。

$$|\vec{AD} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AC})| / |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{38}.$$

6 点。法線ベクトルが求まっているなどの場合部分点 3 点。

6/7 3-3 〜 3-5 行列式

(1) 行列式の定義：各行各列から一つずつ選んだ積の符号付き和
(2) 順列・置換、符号についてはあとで。
(3) 単位行列に対しては 1 に正規化、多重線形性、交代性
(4) 同じ行（列）ベクトルがあれば 0、基本変形による変換
(5) $|AB| = |A||B|, {}^t|A| = |A|$

問題：

(1) p.55[1] の行列の行列式を求めよ。
(2) p.87[1] (b)(c)

6/14 3-6 Cramer の公式、3-8 行列式の計算

(1) 符号
(2) 小行列式
(3) 余因子、余因子展開
(4) Cramer の公式

6/21 3-7 Laplace 展開、3-9 方程式の独立性

(1) Laplace 展開
(2) 連立１次方程式の階数

6/28 4-1 4-2 4-4 線型空間の概要

(1) 線型空間
(2) 基底、線型独立、張る
(3) 例

問題：

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$$
が一次独立になるための a の条件を求めよ。
(2) $V = \{2$ 次式 $\}$ に対し、d/dx の表現行列を求めよ。
(3) p.113[3](b)

7/12 4-3 線型空間の概要

(1) 線型写像
(2) 単射（線型写像の場合は $f^{-1}(0) = 0$）、核、全射、像、同形
(3) 基底の意味：数ベクトルに基底の一次結合を対応させる写像が単射（線型独立）かつ全射（張る）
(4) 表現行列、基底の変換行列、基底変換による表現行列の変化
(5) 線型写像の標準形、階数＝像の次元、次元公式
(6) 解の重ね合わせの原理

線形代数 ID 期末試験 （平成 16 年 7 月 26 日 2 限）

答だけでなく、基本変形など途中の計算もしっかり書くこと。持込相談等不可。中間試験の成績との合計が 60 点までとして採点する。

1. 次の行列式を計算せよ。

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

（10 点）

2. 次の連立一次方程式を $a = -4, 0, 1$ の時にそれぞれ解け。

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 \qquad\quad + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + ax_3 - 3x_4 = -1 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + ax_4 = -7 \end{cases}$$

（20 点）

3. 次の行列がユニタリ行列となる x の値を求めよ。

$$\begin{pmatrix} x & 1/2 \\ 1/2 & x \end{pmatrix}$$

（10 点）

4. $\mathbb{R}^3$ の 2 つの基底

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

に対し、E から F への基底の変換行列を求めよ。なお、基底であることは確認しなくてよい。
（10 点）

解答例

1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 13 & -2 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 8 & -5 & 0 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)+2(2) \\ -(2) \\ (3) \\ (4)+2(2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 13 & -2 & 9 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & -5 & 13 \end{vmatrix} (\text{第 3 列で展開})$$

$$= \begin{vmatrix} 15 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & -5 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1)+(2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 15 & 1 & 5 \\ -43 & 0 & -19 \\ 83 & 0 & 38 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2)-3(1) \\ (3)+5(1) \end{matrix}$$

$$= -19 \begin{vmatrix} -43 & -1 \\ 83 & 2 \end{vmatrix} (\text{第 2 列で展開し第 3 列から 19 を括り出す}) = \underline{57}$$

間違い 1 個の場合 5 点（ただし同種の計算法則の間違いは 1 個と数える）。

2. 拡大係数行列を基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & a & -3 & -1 \\ -2 & -3 & -4 & a & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -7 & 9 \\ 0 & -2 & a+4 & -7 & 3 \\ 0 & -3 & -8 & a+4 & -11 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(2) \\ (1)+3(2) \\ (3)+2(2) \\ (4)-2(2) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & a+20 & -21 & 21 \\ 0 & 0 & 16 & a-17 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3)+2(2) \\ (4)+3(2) \end{matrix}$$

（ここからの計算は略）

$a=-4$ のとき、拡大係数行列と係数行列の階数が違うので 解なし。（7 点）
$a=0$ のとき、$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \underline{(1/2,-5,21/4,4)}$（7 点）
$a=1$ のとき、$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \underline{(0,1-t,1+t,t)}$ (t は任意)（6 点）
原則として中間点なし。

3. ユニタリ行列となる必要十分条件は、

$$\begin{cases} \frac{1}{4} + |x|^2 = 1 \\ \frac{1}{2}(x+\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

（5 点）これを解いて、$x = \underline{\pm i\sqrt{3}/2}$（5 点）

4. $(E|F) \to (I|E^{-1}F)$ と基本変形することにより $E^{-1}F$ を求めると、

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

E^{-1} の計算に 3 点。$E^{-1}F$ であることに 5 点。
全般に、軽微なミスは 2 点減点。