代数学 B レポート問題

1. d を整数とするとき、次は $\mathbb{C}$ の部分環であることを示せ。

$$R = \left\{ a + b\sqrt{d} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$R' = \left\{ a + b\frac{-1+\sqrt{d}}{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\} \quad (d \equiv 1 \mod 4 \text{ のとき})$$

2. $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ とする。

(1) 前問の R の単元は、$a^2 - b^2 d = \pm 1$ となる元に等しいことを示せ。
(2) $d = -1$ のとき $R^\times$ を求めよ。
(3) $a + b\frac{-1+\sqrt{d}}{2} \in (R')^\times$ となるための整数 a, b の条件を求めよ。

3. （テキスト問 6.5）整域上の多項式環も整域である。

4. （テキスト問 6.6）R が整域のとき $f(x), g(x) \in R[x]$ について次を示せ。

$$\deg(f(x)+g(x)) \le \max\{\deg f(x),\ \deg g(x)\},\ \deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$$

整域でないと必ずしも成り立たないことも確認せよ。

5. 有限整域は体である（テキスト 11）。

6. $f\colon R \to R'$ を環準同型、$x \in R$ とする。次のうち正しいものは証明し、誤りであるものには反例を示せ。

(1) x が単元なら $f(x)$ も単元
(2) f が単射、$f(x)$ が零因子なら x も零因子
(3) f が全射、$f(x)$ が零因子なら x も零因子
(4) f が単射、x が零因子なら $f(x)$ も零因子
(5) f が全射、x が零因子なら $f(x)$ も零因子

7. 可換環 R の単元 u と 冪零元 n に対し、$u + n$ は単元であることを示せ。

8. R を可換環とする。$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x]$ について次を示せ。

(1) $f(x)$ が $R[x]$ の単元 $\iff a_0$ が R の単元, $a_1, \ldots, a_n$ が R のべき零元.
(特に R が整域なら、$R[x]^\times = R^\times$ となる。)
(2) $f(x)$ がべき零 $\iff a_0, \ldots, a_n$ がべき零.
(3) $f(x)$ が零因子 $\iff 0 \ne \exists a \in R, af(x) = 0$.

9. $m, n \in \mathbb{Z}$ について、

(1) $n | m \iff (m) \subset (n)$, $(m) = (n) \iff m = \pm n$.
(2) $(m) + (n) = (d)$, $(m) \cap (n) = (\ell)$ とすると、d, ℓ はそれぞれ m, n の最大公約数、最小公倍数である。

10. m を平方因子を持たない整数とする。$\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ の元 $a + b\sqrt{m}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ に対し、$N(a + b\sqrt{m}) = |a^2 - b^2 m|$ と定める。次を示せ。

(1) N は well-defined である。すなわち、$a + b\sqrt{m} = a' + b'\sqrt{m}$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{Q})$ なら $a = a'$, $b = b'$ である。
(2) $N(\alpha) \ge 0$, $N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$,
(3) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

11. $m = 3, 2, -1, -2$ のとき $R = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ とする。次を示せ。

(1) 任意の $k + \ell\sqrt{m} \in R$, $a + b\sqrt{m} \in R^\times$ に対し、

$$\frac{k + \ell\sqrt{m}}{a + b\sqrt{m}} = (p + q\sqrt{m}) + (r + s\sqrt{m})$$

となる 整数 p, q と $-1/2 \le r, s < 1/2$ が取れる。

(2) N は Euclid ノルムである。

12. $m = -3, -7, -11$ のとき $R = \mathbb{Z}[\alpha]$ と置く（α は $x^2 + x + (1-m)/4 \in \mathbb{Z}[x]$ の根の一つ）。$N(z) = |z|^2$ である。次を示せ。

(1) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し、ある $n \in R$ が存在して、$|z - n| < 1$ となる（R の点を中心とする単位円で $\mathbb{C}$ を覆える）。

(2) N は Euclid ノルムである。

13. k を体とし、t, x, y を不定元とする。k 代数の準同型

$$\varphi\colon k[x, y] \to k[t],\ \varphi(x) = t^2,\ \varphi(y) = t^3$$

を考える。$I = (x^3 - y^2) \subset k[x, y]$ とする。

(1) $I \subset \ker\varphi$ を示せ。

(2) 任意の $f(x, y) \in k[x, y]$ に対し、ある $g(x), h(x) \in k[x]$ が存在して $f(x, y) \equiv g(x) + h(x)y \mod I$ と書けることを示せ。

(3) $I = \ker\varphi$ を示せ。

14. k を体とし、t, x, y, z を不定元とする。環準同型

$$\varphi\colon k[x, y, z] \to k[t],\ \varphi(x) = t^4,\ \varphi(y) = t^5, \varphi(z) = t^6$$

に対し、$\ker\varphi$ を求めよ。

15. 可換環 R の真のイデアルが全て素イデアルならば、R は体であることを証明せよ。（テキスト１０）

16. N を 可換環 R の冪零元全体の集合 (**冪零根基** (nilradical)) とする。次を示せ。

(1) N はイデアルである。

(2) 剰余環 R/N は 0 以外の冪零元を持たない。

(3) N は R の任意の素イデアルに含まれる。

(4) N は R の素イデアル全体の共通部分と一致する。（Hint: 任意の素イデアルに含まれる冪零でない元 x が存在すると仮定し、どの x^n $(n > 0)$ も含まないイデアルの全体 $\mathcal{I}$ を考えて Zorn の補題を用いる）

17. $0 \neq f(x) \in \mathbb{R}[x]$ とする。

(1) f が 1 次式の時、$\mathbb{R}[x]/(f(x)) \cong \mathbb{R}$ を示せ（剰余定理）。

(2) 3 つの環 $\mathbb{C}$, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ は互いに同型でないことを示せ。

(3) $a, b \in \mathbb{R}$ について、環 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + ax + b)$ は (2) の環のどれかに同型であることを示せ。

(4) 一般の場合に $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ は $\mathbb{C}[x]/(x^n)$, $\mathbb{R}[x]/(x^n)$ $(n > 0)$ 達の有限個の直和に同形であり、直和因子は順序を除いて一意的であることを示せ。

18. $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ とする。前の問題より R は Euclid 整域であることは使ってよい。

(1) イデアル $(2), (5)$ は素イデアルでないことを示せ。
(2) 剰余環 $R/(3)$ は 9 個の元からなる体であることを示せ。
(3) p を素数とする。$p \equiv 3 \mod 4$ なら p は R の既約元であることを示せ。
(4) $p \equiv 1 \mod 4$ なら $(p)=I_1I_2$ と相異なる二つの素イデアルの積に分解されることを示せ。
(5) R の全ての素イデアルは $(0), (1+i), (a+bi)$ (a^2+b^2 は 4 で割って 1 余る素数), (p) ($p \equiv 3 \mod 4$) であることを示せ。
(6) 最後の場合を除き、それぞれの剰余環を求めよ。

19. $\mathbb{R}[x]$ の素イデアルをすべて求め、それぞれの剰余環を計算せよ。

20. 可換環 R は、全ての元が冪等（i.e. $x^2=x$）であると仮定する。次を示せ。

(1) $\forall x \in R, 2x=0.$
(2) 全ての素イデアル P は極大イデアルであって、$R/P \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。
(3) R の有限生成イデアルは単項イデアルである。

21. x を不定元、$R=\mathbb{Z}[x]$ とする。次を示せ。

(1) R の素イデアルは、$(0), (p), (f(x)), (p, f(x))$ の形に限る。ただし、p は素数、$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ は既約とする。
(2) $(2, x)$ は単項イデアルではなく、従って R は PID ではない。

22. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ に対し方程式 $ax+by=c$ の整数解 (x, y) について考えよう。

(1) $\gcd(a, b)=d$ とする。$d|c$ は整数解が存在するための必要十分条件であることを示せ。
(2) $d|c$ のとき両辺を d で割り最初から a, b は互いに素であると仮定する。一つの解を (x_0, y_0) と置くと、解の全体は $\{(x_0-nb, y_0+na) | n \in \mathbb{Z}\}$ と書けることを示せ。

23. a, b を互いに素な正整数とする。非負整数全体 $\mathbb{N}$ の部分集合 $\mathbb{N}a+\mathbb{N}b=\{ma+nb | m, n \in \mathbb{N}\}$ を S とする。

(1) 任意の正整数 j に対し、整数 k, ℓ で、$kb+j=\ell a$, $0 \le k \le a-1$, $1 \le \ell$ を満たすものが存在することを示せ。
(2) 任意の正整数 j に対し $ab-a-b+j \in S$ を示せ。
(3) $ab-a-b \notin S$ を示せ。
(4) $a=5, b=7$ のとき、$\mathbb{N} \setminus S$ を求めよ。

24. 前問において、$c \in \mathbb{N}$ に対し、$c \in S \iff ab-a-b-c \notin S$ を示せ。

25. k を体とし、環準同型 $\varphi\colon k[x, y] \to k[t]$, $f(x, y) \mapsto f(t^5, t^7)$ を考える。$\operatorname{im}\varphi$ は $k[t]$ の部分 k 代数である。k 上の商線型空間 $\operatorname{coker}\varphi := k[t]/\operatorname{im}\varphi$ の次元を求めよ。

26. $x, y, z \in \mathbb{Z}$ に対して、方程式

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{z}{7}=\frac{1}{105}$$

を考える。

(1) 解を一組与えよ。
(2) $35x+21y+15z=0$ の任意の整数解をパラメータ表示せよ。
(3) 元の方程式の任意の整数解をパラメータ表示せよ。

27. $R = \mathbb{C}[x]$, α, β を相異なる複素数とする。

(1) $(x-\alpha)^2$ を $x-\beta$ で割った商と余りを求めよ。

(2) 中国剰余定理による標準的な同形

$$f\colon \mathbb{C}[x]/((x-\alpha)^2(x-\beta)) \longrightarrow \mathbb{C}[x]/((x-\alpha)^2) \times \mathbb{C}[x]/((x-\beta))$$

に対し、$f^{-1}(1,0)$, $f^{-1}(x-\alpha,0)$, $f^{-1}(0,1)$ のそれぞれについて 2 次以下の代表元を求めよ。

(3) $a, a', b \in \mathbb{C}$ に対し $f(\alpha)=a$, $f'(\alpha)=a'$, $f(\beta)=b$ を満たす 2 次式を求めよ。

28. 中国剰余定理と準同型定理の同形の合成

$$\mathbb{R}[x]/(x^4-1) \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \times \mathbb{R}[x]/(x+1) \times \mathbb{R}[x]/(x-1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

を f とする。ただし、2 番目の同形の第 1 成分は x を i に写している。$f^{-1}(1,0,0)$, $f^{-1}(i,0,0)$, $f^{-1}(0,1,0)$, $f^{-1}(0,0,1)$ の 3 次以下の代表元をを求めよ。

29. $R = M_n(\mathbb{R})$ とする。$\mathbb{R}^n$ は列ベクトルの全体とみると行列の掛け算によって左 R 加群になる。部分左 R 加群は $\mathbb{R}^n$ 全体と $\{0\}$ しかないことを示せ。

30. 可換環 R の極大イデアルの一つを m とする。R 加群の同形 $f\colon R^{\oplus I} \to M$ があるとき次を示せ。

(1) f から自然に R 同形 $\bar{f}\colon (R/m)^{\oplus I} \to M/mM$ が定まる。

(2) 標準的な全射 R 準同形 $\pi\colon R^{\oplus I} \to R/m$, $\varpi\colon M \to M/mM$ に対し $\bar{f}\circ\pi = \varpi\circ f$ を満たす。

(3) f は R/m 同形である。

31. $M = \mathbb{Z}^3$ の部分加群 $N = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$ を考える。剰余群 M/N の素因子型（階数と単因子）を求めよ。

32. 正の整数 n をいくつかの正の整数の和に表わす方法（和の順序は区別しない）の数を n の**分割数**といい、$c(n)$ で表わす。

(1) p を素数とするとき、位数 p^n の Abel 群は同形を除いてちょうど $c(n)$ 個あることを示せ。（n の分割に対し、位数 p^n の Abel 群を与える対応が作れて、それが全単射であることを示せ。）

(2) 位数 10000 の Abel 群は同形を除いて何個あるか。

33. 行列 A, B は、ある正則行列 P, Q があって $B = PAQ$ と書ける時に**共役**であるといい、$A \sim B$ と書く。

(1) 共役は同値関係であることを示せ。

(2) 複素 n 次正方行列で冪零であるものは、共役を除いてちょうど $c(n)$ 個存在することを示せ。

34. 次の群同型を示せ。

(1) $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)p^{n-1}\mathbb{Z} \quad (p$ は奇素数, $n \geq 1)$

(2) $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z} \quad (n \geq 2)$

(Hint : それぞれ $1+p$, $5 = 1+2^2$ の位数に着目せよ。)