幾何学序論演習

講義でやらなかったテキストの問題を解いてもよい。

平面曲線

陰関数定理. $f(x,y)$ を C^1 級関数とし、点 (a,b) で $f(a,b)=0,\ f_y(a,b)\neq 0$ とする。このとき、$x=a$ の十分近くで、陰関数 $f(x,y)=0$ の分枝 $y=\varphi(x)$ （すなわち $x=a$ の十分近くで $f(x,\varphi(x))\equiv 0$ を満たし $\varphi(a)=b$ となるもの）がただ一つ存在する。また、$\varphi(x)$ は C^1 級関数であり、次を満たす。

$$\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

特異点. C^1 級関数 $f(x,y)$ で定義される ‘曲線’ $C\colon f(x,y)=0$ を考える。$f=0$ かつ $\operatorname{grad} f=0$ となる点を C の特異点と呼ぶ。

接線の方程式. $f(x,y)$ を C^1 級関数として、C を $f=0$ で定まる集合とする。点 $P(a,b)$ は $f(a,b)=0$ かつ $\operatorname{grad} f(a,b)\neq(0,0)$ を満たすとすると、C は P の十分近くで曲線であり、P での接線の方程式は

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$$

となる。

1. $f(x,y)=x^2-y^2-1$ として、集合 $C=\{(x,y)\ |f(x,y)=0\}$ を考える。

(1) C は滑らかな曲線であること（すなわち、各点で局所的に C^∞ 級の媒介変数表示を持つこと）を示せ。
(2) C 上の点 (a,b) における接線の方程式を求めよ。
(3) C 全体を表わす媒介変数表示は存在しないことを説明せよ。

2. $f(x,y)=y^2-x^3+x$ について、同様のことを示せ。

3. $g(x)$ を 3 次多項式とする。簡単のため、x^3 の係数は 1 であるとする。$f(x,y)=y^2-g(x)$ とする。$g(x)=0$ の解が次のようになる場合に分けて、$f(x,y)=0$ の解集合の概形を書いてみよ。

(1) 相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ を持つ場合。
(2) 実数解を 1 つだけ（簡単のため 0 とする）持ち、$x>0$ で $g(x)$ が単調増加である場合。
(3) 実数解を 1 つだけ（簡単のため 0 とする）持ち、$x>0$ で $g(x)$ が単調増加でない場合。
(4) 2 重解（簡単のため 0 とする）と負の解 α を持つ場合。
(5) 2 重解（簡単のため 0 とする）と正の解 α を持つ場合。
(6) 3 重解（簡単のため 0 とする）を持つ場合。

4. $a>0$ に対し、媒介変数表示された曲線

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}\ (t\neq -1)$$

を考える。

(1) t を消去して x と y の陰関数表示を求めよ。
(2) 原点は陰関数表示で定まる曲線の特異点であることを確かめよ。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

5. m, n を互いに素な正の整数として、$x = \cos mt,\ y = \sin nt\ (0 \leq t \leq 2\pi)$ で表わされる曲線を考える。速度ベクトルがどこでも零ベクトルにならないための m, n に関する条件を求めよ。

6. 放物線 $y = x^2$ の媒介変数表示で次の 2 つの条件を共に満たすものを考える。このときの媒介変数 t を x で表わせ。(a) 各点での速度ベクトルが単位ベクトルになる。(b) $t = 0$ で $x = 0$ となる。

7. もし講義でやっていなければ、半径 r の円の曲率は $1/r$ であることを確かめよ。

8. $a > 0$ として、$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分 C を考える。

(1) 媒介変数表示（変数の動く範囲も）を一つ求めよ。（ヒント：$x = a\cos^3 t$）
(2) 極座標表示を求めよ。
(3) C の長さを求めよ。
(4) C と x 軸、y 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。
(5) C の各点での単位接ベクトル e と Frenet 枠 (e, n) を求め、曲率を計算せよ。

9. 媒介変数表示 $x = \cosh t,\ y = \sinh t$ で表わされる曲線の曲率を求めよ。

10. $a > 0$ として、曲線 $C\colon \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ を考える。

(1) 原点を中心として角 $\pi/4$ だけ回転するとどのような式で定義されるか。
(2) 各点での曲率を計算せよ。
(3) 各点での曲率円を求めよ。

11. $g(\theta)$ を C^2 級の関数として、極座標表示された曲線 $r = g(\theta)$ を考える。

(1) 各点での単位接ベクトルを求めよ。
(2) 各点での曲率を求めよ。

（テキストの問題）次の極座標表示された曲線の曲率を求めよ。媒介変数は偏角である。

(1) $r = a\theta\ (a > 0, \theta > 0)$
(2) $r = a^\theta\ (a > 1)$

包絡線. t を媒介変数として、C^1 級の陰関数 $F(x,y,t)=0$ で与えられた（特異点のない）曲線族 $\{C_t\}$ を考える（テキスト付録 B-1)。

t ごとに C_t 上の 1 点 $(x(t),y(t))$ を選び、t に関して $x(t)$, $y(t)$ は C^1 級であるとする。曲線 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$ が各 t で C_t に接しているとき、$\sigma(t)$ を $\{C_t\}$ の**包絡線**と呼ぶ。簡単のため、$(\dot{x}(t),\dot{y}(t))\neq(0,0)$ となる t のみ考える。

定理. $\{C_t\}$ の包絡線 $\sigma(t)$ が存在するなら、$F(\sigma(t),t)=F_t(\sigma(t),t)=0$ を満たす。逆に、$F(\sigma(t),t)=F_t(\sigma(t),t)=0$ を満たす C^1 級曲線 $\sigma(t)$ は $\{C_t\}$ の包絡線である。

注意. 上の定理より、包絡線を求めるためには $F=F_t=0$ を解けばよい。すなわち、t を消去して (x,y) の関係式を求めるか、t を残したままで x, y を t で媒介変数表示すればよい。

一般には、平行線 $F(x,y,t)=x-t$ のように解がないこともある。t の取り方によっては $v=0$ となる点が出て、そこが包絡線の特異点になることもありうる。また、C_t に特異点（$n=0$ となる点の集合）がある時は、特異点も $F=F_t=0$ の解集合に含まれてしまう。

F を t で微分するとき、F の形が分数になっているときは分母を払ってから微分する (F を取替える) など、計算が簡単になるように工夫すること。

12.

$$\frac{x}{t}+\frac{y}{1-t}=1 \qquad (0<t<1)$$

の包絡線を求めよ（テキストの例題)。

13. 直線族 $y=3tx-t^3$ の包絡線を求めよ。

14.

$$(x-(\sqrt{2})t)^2+y^2=t^2 \qquad (t\neq 0)$$

の包絡線を求めよ。

15.

$$y^2=t(x-t)^3 \qquad (t>0)$$

の包絡線を求めよ。

16. 曲線の接線族の包絡線は、もとの曲線を含むことを示せ。

17. 平面曲線 $\gamma(t)$ に対し、縮閉線（曲率中心の軌跡）は法線族の包絡線になることを証明せよ。

18. 放物線 (t,t^2) について、

(1) 法線の方程式を求めよ。
(2) 縮閉線を上の方法で計算せよ。

19. サイクロイド

$$\begin{cases} x(t)=t-\sin(t) \\ y(t)=1-\cos(t) \end{cases} \qquad 0<t<2\pi$$

の縮閉線を上の方法で計算せよ。

（ヒント：行き詰まったら $(1-\cos t)(1+\cos t)=\sin^2 t$ を用いて式の見かけを変え、$\sin t(\neq 0)$ で割り算する）

20. $F(x,y)$ を C^2 級関数とし、点 P で $F=0$ かつ $\operatorname{grad} F \neq 0$ とする。

(1) P における曲線 $F(x,y)=0$ の曲率が符号を除いて

$$\frac{F_{yy}F_x^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{xx}F_y^2}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

で与えられることを示せ。

(2) 2 次式 $F(x,y)=\frac{1}{2}ax^2+bxy+\frac{1}{2}cy^2+dx+ey+\frac{1}{2}f$ に対し、曲率の絶対値を計算せよ。

運動. ユークリッド空間の合同変換を**運動**という。

運動は、直交変換と平行移動の合成で得られる。2 次元の直交変換は回転と鏡映である。

21. 3 次直交変換を行列式が 1 であるか (-1) であるかに分けて、具体的にどのような運動になるか分類せよ。

22. 方程式 $F(x,y)=0$ で表わされる図形 C を考える。

(1) C をベクトル (a,b) だけ平行移動したものは $F(x-a,y-b)=0$ で表わされる。C を原点を中心に角 θ だけ回転したものは $F(x\cos\theta+y\sin\theta, -x\sin\theta+y\cos\theta)=0$ で表わされる。C を原点を中心に k 倍 $(k>0)$ したものは $F(x/k,y/k)=0$ で表わされる。これらを示せ。

(2) $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f(\neq 0)$ で表わされる（非特異）2 次曲線を原点を中心に角 θ だけ回転したところ、xy の項がない 2 次式で表わせたという。$\tan 2\theta$ の値を求めよ。

(3) (2) で $D:=b^2-4ac$ の値は運動で不変であることを示せ。また、$D\neq 0$ なら運動で $b=d=e=0$ とできることを示せ。

変曲点. 平面曲線において、接線が 3 次以上の接触をする点を（広義の）**変曲点**と呼ぶ。

平面曲線が C^2 級関数 $F(x,y)=0$ で表わされているとき、その上の非特異点 $P(a,b)$ において F を Taylor 展開すると、1 次までが接線の方程式である。P が変曲点とは、接線上の点で 2 次の部分が恒等的に消えることである。

23. C^2 級関数 $F(x,y)$ の零点が非特異平面曲線 C を定めている時、C 上の点 P に対し、P で

$$F_{yy}F_x^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{xx}F_y^2 = 0$$

が成り立つことが P が変曲点であるための必要十分条件であることを示せ。

特に、非特異平面曲線に対して、変曲点であることとその点での曲率が 0 であることは同値である。

狭義には、変曲点とは曲率が符号を変える点のことを言う。

空間曲線

テキストの章末問題も解いてください。

24. $\sigma(t)=(t, t^2/\sqrt{2}, t^3/3)$ の曲率・捩率を計算せよ。（計算機を用いてよい）

25. $r>0$, $a>0$, $b>0$ に対し、空間曲線

$$\sigma(t)=(r\cos at\cos bt, r\cos at\sin bt, r\sin at)$$

の曲率・捩率を計算せよ。（計算機を用いてよい）

20 の解答例.
(1) $F=0$ を満たす点 P において $F_y \neq 0$ であるとき、陰関数定理より、 P の十分近くで、C^2 級関数 $y=\varphi(x)$ が存在し $F(x,y)=0$ を満たす点は $(x,\varphi(x))$ と書け、さらに $F(x,\varphi(x)) \equiv 0$, $\varphi'(x) = -F_x/F_y$ が成り立つ。

さて、x を曲線のパラメータと思うと曲率は $\kappa = \varphi''(x)/(1+\{\varphi'(x)\}^2)^{3/2}$ である。

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{F_y \frac{d}{dx} F_x(x,\varphi(x)) - F_x \frac{d}{dx} F_y(x,\varphi(x))}{F_y^2} \\ &= \frac{F_y(F_{xx}+F_{yx}\varphi'(x)) - F_x(F_{xy}+F_{yy}\varphi'(x))}{F_y^2} \\ &= \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2F_{yy}}{F_y^3}\end{aligned}$$

ただし、$F(x,y)$ は C^2 級であるから $F_{yx}=F_{xy}$ が成り立つことを用いた。また、

$$(1+\{\varphi'(x)\}^2)^{3/2} = (1+F_x^2/F_y^2)^{3/2} = (F_x^2+F_y^2)^{3/2}/|F_y|^3$$

であるから（左辺が正であるから右辺分母の F_y に絶対値が必要)、κ は符号を除いて

$$(F_y^2F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2F_{yy})/(F_x^2+F_y^2)^{3/2}$$

に等しい。

なお、$F_y=0$ のとき、$\operatorname{grad} F \neq 0$ であるから $F_x \neq 0$ である。このとき x と y の役割を入れ替えて同様に議論すると同じ答を得る。 □

(2) $F_x = ax+by+d, F_y = bx+cy+e, F_{xx}=a, F_{xy}=b, F_{yy}=c$ より

$$\begin{aligned}&F_y^2F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2F_{yy} \\ =&a(bx+cy+e)^2 - 2b(ax+by+d)(bx+cy+e) + c(ax+by+d)^2 \\ =&a(ac-b^2)x^2 + 2b(ac-b^2)xy + c(ac-b^2)y^2 + 2d(ac-b^2)x + 2e(ac-b^2)y \\ &+ ae^2 - 2bde + cd^2 \\ =&2(ac-b^2)F(x,y) - (ac-b^2)f + ae^2 - 2bde + cd^2\end{aligned}$$

これは $F=0$ のもとでは定数

$$-(ac-b^2)f + ae^2 - 2bde + cd^2$$

に等しい。よって、

$$|\kappa| = \frac{\left|ae^2 - 2bde + cd^2 - (ac-b^2)f\right|}{\{(ax+by+d)^2 + (bx+cy+e)^2\}^{3/2}}.$$

空間曲線の特異点. $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ を C^1 級関数とする。$F=G=0$ を満たす点 P において、行列

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

の階数が 2 とすると、陰関数定理により $F=G=0$ は P の近くで非特異な曲線を定める。階数が 1 以下の点を曲線の**特異点**と呼ぶ。

26. $F=z-xy$, $G=xz-y^2$ のとき $F=G=0$ の特異点を求めよ。

曲面

27. $F(x,y,z)=z^2+(x^2+2y^2-1)(2x^2+y^2-1)$ とする。$F=0$ で定まる曲面の特異点を求めよ。

28. n を正の整数として、$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^{n+1}$ とする。$F=0$ で定まる曲面 S において原点は唯一の特異点である。S は xz 平面上の曲線 $x^2=z^{n+1}$ を z 軸の回りに回転した回転面でもある。原点における S の「単位接ベクトル」$\lim_{P\to O}\vec{OP}/|OP|$ 全体のなす集合を求めよ。

29. 半径 r, 高さ h の円筒において、高さを m 等分、円周を n 等分する ($n\geq 3$)。ただし、高さを等分した各直截面において、円周の等分点は半分 ($2n$ 等分点の分) ずつ交互にずれていくとする。これらの分点を結んで $2mn$ 個の二等辺三角形を面とする多面体を作る。

(1) この多面体の表面積を求めよ。
(2) 多面体上の点と円筒との距離の最大値は m, n が限りなく大きくなる時 0 に収束することを説明せよ。
(3) $m=n$, $m=n^2$, $m=n^3$ のもとで n を限りなく大きくするとき、それぞれ表面積の極限を求めよ。

30. 母線 $x=\varphi(u)$, $z=\psi(u)$ が z 軸を軸として一定の各速度で回転しながら上昇したときに描く曲面（**螺旋面**）

$$x=\varphi(u)\cos v,\ y=\varphi(u)\sin v,\ z=\psi(u)+cv \qquad (a\leq u\leq b,\ 0\leq v\leq 2\pi)$$

を S とする。ただし、φ, ψ は C^1 級関数とする。

(1) S の u, v に関する第一基本形式を求めよ。
(2) S の表面積を求めよ。

31. 極座標表示された平面の単位円板 $D=\{(r,\theta)\mid r<1\}$ に、

$$ds^2=4\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{(1-r^2)^2}$$

で第一基本形式を入れる。

(1) 第一基本形式を直交座標 (x,y) で表わせ。
(2) $w=x+iy$, $\bar{w}=x-iy$ とすると、$dw=dx+idy$, $d\bar{w}=dx-idy$ である。第一基本形式を $(w,\bar{w})$ で表わせ。
(3) 一次分数写像 $z=i(1-w)/(1+w)$ による D の像 H を求めよ。
(4) 上の同形写像により H に導かれる第一基本形式を $u=\Re z$, $v=\Im z$ で表わせ。

32. $a > 0$ とする。**懸垂面**

$$\alpha(u,v) = (\sqrt{u^2+a^2}\cos v, \sqrt{u^2+a^2}\sin v, a\sinh^{-1}(u/a))$$

と**常螺旋面**

$$\beta(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av)$$

について、次の問に答えよ。

(1) α は (u,v) 平面からの写像として単射ではないが、β は単射であることを示せ。
(2) それぞれの第一基本形式を求めよ。
(3) それぞれの第二基本形式を求めよ。
(4) 何れも極小曲面であることを示せ。また、Gauss 曲率も一致することを示せ。

33.

$$\alpha(u,v) = (3u+3uv^2-u^3, v^3-3v-3u^2v, 3(u^2-v^2))$$

とするとき、平均曲率 H と Gauss 曲率 K を求めよ。

34. 曲面

$$e^z\cos x = \cos y$$

に対し、平均曲率 H と Gauss 曲率 K を求めよ。

35. 曲面の第一基本形式

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

に対し次の問に答えよ。

(1) (u,v) 座標系を原点の回りに角 $(-\theta)$ だけ回転した座標系を (u',v') とする：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

θ をうまく取ると

$$I = E'(du')^2 + G'(dv')^2$$

の形に変形できることを示せ（もちろん過去の問題を用いてよい）。

(2) $E' > 0, G' > 0$ であることを示せ。

36. 上半平面 $H := \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ に、

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$$

で第一基本形式を与える。Gauss 曲率 K を求めよ。

レポート問題（締切：12 月 24 日午後 3 時）

メルカトル図法・正積図法などについて、平面（地図）から球面へのパラメータ表示を与え、第一基本形式を計算せよ。長さ・角度・面積などで、地図上で測ったものが正確になるものがあれば、計算により指摘せよ。（提出先：理学部棟 665）

幾何学序論演習小テスト（15.1.15)

自筆のＢ５の紙１枚のみ持ち込み可。答案用紙に氏名と学籍番号を記入すること。計算の過程もしっかり書くこと。携帯の電源は切ること。

1. $a > 0, b > 0$ に対し、空間曲線

$$\gamma(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$$

の曲率・捩率を計算せよ。

2. xz 平面の $x > 0$ の部分に、弧長パラメータ u により媒介変数表示された C^2 級曲線 $C\colon (x(u), z(u))$ があるとする。C を z 軸の回りに回転してできる曲面

$$S\colon \alpha(u,v) = (x(u)\cos v,\ x(u)\sin v,\ z(u))$$

について次の問に答えよ。

(1) u が弧長パラメータである条件を $x(u), z(u)$ を用いて表わせ（答だけでよい)。
(2) 第一基本形式 I を計算せよ。
(3) 第二基本形式 II を計算せよ。
(4) 平均曲率 H と Gauss 曲率 K を求めよ。

3. $a > 0$ とする。サイクロイド

$$\gamma(t) = (a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t)) \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

について縮閉線を求めよ。

解答

1. テキスト *pp*.46–47。
（20 点）

2. (1)

$$x'(u)^2 + z'(u)^2 = 1$$

(2) テキスト *p*.71 練習問題 7 問 6。
(3)(4) テキスト *pp*.77-78。ただし、z' で割り算してはいけない。
（40 点）

3.

$$\dot{\gamma}(t) = a(1-\cos t, \sin t),\ |\dot{\gamma}(t)| = a\sqrt{2-2\cos t},\ \ddot{\gamma}(t) = a(\sin t, \cos t)$$

である。$t = 0,\, 2\pi$ のとき $\dot{\gamma} = 0$ となるので端点は除いて考える。法線ベクトルは $\dot{\gamma}$ を反時計回りに 90 度回転して単位ベクトルにした

$$\mathbf{n} = \frac{a}{|\dot{\gamma}|}(-\sin t, 1-\cos t)$$

となる。曲率を計算すると、

$$\kappa = \frac{\dot{\gamma}\times\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^3} = \frac{a^2(\cos t - 1)}{|\dot{\gamma}|^3} = -\frac{1}{2|\dot{\gamma}|}.$$

よって縮閉線の媒介変数表示は

$$\begin{aligned}\gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n} &= a(t-\sin t, 1-\cos t) - 2|\dot{\gamma}|\frac{a}{|\dot{\gamma}|}(-\sin t, 1-\cos t)\\ &= (a(t+\sin t), a(\cos t - 1)).\end{aligned}$$

（20 点）