レポート問題（第 1 回）

締切：6 月 5 日の講義の時

1. n 次式 $f(x)$ が整数 x に対して必ず整数の値になるとき、ある整数 $a_n, \ldots, a_1, a_0$ が存在して

$$f(x) = a_n(x)_n/n! + \cdots + a_2(x)_2/2! + a_1x + a_0$$

と書けることを示せ。

2. {数学、国語、英語、理科、社会} から 1 時間単位で 7 時間分の勉強スケジュールを作ろう。好きな数学だけずっとやってもよいなどとすると ${}_5\Pi_7 = 5^7$ 通りある。しかし、どの教科も必ず 1 回は勉強するとすると？

3. n 個の球から r 個を抜き出して数珠を作る場合の数を求めよ。（朝の講義の時とは微妙に変えてあるので注意せよ）

4. Catalan 数 C_n と、凸多角形の三角形分割の方法の数 D_{n+2} が等しいことを直接関係づけよ。

5.

$$\begin{cases} u+v+w+x+y=17 \\ 1 \le u \le 2 \\ 1 \le v \le 5 \\ 3 \le w, x, y \le 7 \end{cases}$$

の整数解の個数を求めよ（適当に係数を変えて自分で問題を作って解け）。

6. Bell 数 $B_n = S_1^n + \cdots + S_n^n$ の漸化式を求めよ（B_1, ..., B_n を用いて B_{n+1} を表わせ）。

7. $\sum_{x=1}^{m} x^t$ について、$t = 4, 5$ など低次のものに対して公式を計算せよ。また、一般に、$m^{t+1}/(t+1) + m^t/2 +$（低次）となることを示せ。

8. 5 名の男性（A, B, C, D, E）と 4 名の女性（a, b, c, d）が結婚相談所に申込み、コンピュータで相性診断を行った結果、次の組合わせは好ましくないという結果が出た。

$$a-C,\ a-D,\ b-A,\ b-E,\ c-B,\ c-C,\ d-E$$

これらを含まないで 4 対の組合わせを作る方法は何通りあるか。また、B は必ず組になるという仮定のもとでは何通りあるか。

9. ダイヤモンド・ルビー・サファイアを 6 個等間隔に腕輪に埋め込むデザインは何通りあるか。ただし、回転して重なる 12 個の配置は同じデザインと思う。

必要なら次の定理を用いよ。

Burnside の定理. 群 G が集合 S に作用しているとき、S の G の作用による剰余類の元の個数は、

$$\#\{(g, s) \in G \times S | g(s) = s\}/\#(G)$$

に等しい。

レポート問題 解答例

1. n に関する数学的帰納法による。$n=0$ のときは $f(x)=a_0$ であるから、a_0 は整数であるから成り立つ。

さて、任意の n 次多項式は（整数とは限らない）$a_0,\ldots,a_n$ を用いて

$$f(x)=a_n(x)_n/n!+\cdots+a_2(x)_2/2!+a_1x+a_0$$

と書ける。差分 $\Delta(x)_n=n(x)_{n-1}$ であるから、

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=a_n(x)_{n-1}/(n-1)!+\cdots+a_2(x)_1+a_1$$

が成り立つ。帰納法の仮定から $\Delta f(x)$ の係数 $a_1,\ldots,a_n$ は整数である。他方、$f(0)=a_0$ も整数である。よって $n-1$ で成立すれば n でも成立する。 □

2. （解１）7 時間の割り振りは同じ教科を何時間勉強するかの組合わせだけ考えると、3+1+1+1+1 あるいは 2+2+1+1+1 の 2 通りある。前者の場合、7 時間のうちどの 3 時間を同じ教科にするかで $\binom{7}{3}=35$ 通りあり、教科の割り振りで 3 時間の教科と残りを時間の順序に並べるので $5!=120$ 通りあるので、$35\times120=4200$ 通り。後者の場合、2 時間勉強する時間（合計 4 時間）を割り振るのに、$\binom{7}{4}=35$ 通り、そのうち最初の時間と同じ教科を残り 3 時間のうちどこに入れるかで 3 通り、教科の並べ方（初めて勉強する順序に並べる）で 120 通りあるので $35\times3\times120=12600$ 通り。よって、合計 16800 通り。

（解２）ある教科を全く勉強しないという性質を考えて、PIE を用いる。

$$5^7-\binom{5}{1}4^7+\binom{5}{2}3^7-\binom{5}{3}2^7+\binom{5}{4}=78125-81920+21870-1280+5$$
$$=100000-83200=16800 \text{ 通り。}$$

（解３）７つのもの（1 時間目から 7 時間目）を 5 つのグループに分けて、早い時間から順に５つの教科を並べることを考えると、第 2 種スターリング数を用いて $S_5^7\cdot5!=140\times120=16800$ 通り。

3. 数珠は円順列でさらに向きをひっくり返しても区別できない。ただし、$r=2$ のときはひっくり返しても球の位置は変らないので $\binom{n}{2}$ 通り、$r>2$ のときは $\binom{n}{r}(r-1)!/2$ 通り。

4. （略解）$(n+2)$ 角形の三角形分割と、$n\times n$ の道がある格子を右に進んだ数が上に進んだ数を下まわらないように最短経路で左下 $(0,0)$ から右上 (n,n) まで通る道 L との間の一対一対応を以下のようにして帰納的に作ることができる。

$(n+2)$ 角形の頂点を右回りに $P,P_0,\ldots,P_n$ とする。(i) L が対角線上の格子点を始点と終点以外では通らない時、P_0 と P_n を線分で結んで三角形 $\triangle PP_0P_n$ を作り、残りの $(n+1)$ 角形を $(1,0)$ から $(n,n-1)$ への経路に従って分割する（多角形の頂点の番号は添字を 1 ずつ減らし P_{-1} を P とする）。(ii) L が対角線上の格子点 (k,k) を通る時、P と P_k を線分で結び、できた小多角形を帰納的に分割する。

5. 係数は各人で異なる。PIE を用いる。この例では講義で述べたように、

${}_5H_6-({}_5H_4+4{}_5H_1)={}_{10}C_6-({}_8C_4+4{}_5C_1)={}_{10}C_4-(70+20)=210-90=120$ 個。

6. $(n+1)$ 番めの人が属するグループ以外に、ちょうど k 人いるとすると、n 人のなかからその k 人を選んで、k 人をいくつかのグループに分けるから、

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

が成り立つ。ただし、$B_0=1$ である。

7. （テキスト 101–104 ページ参照)。前半の答だけ書くと、4 乗和が

$$\frac{1}{30}m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)=\frac{m^5}{5}+\frac{m^4}{2}+\frac{m^3}{3}-\frac{m}{30},$$

5 乗和が

$$\frac{1}{12}m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1)=\frac{m^6}{6}+\frac{m^5}{2}+\frac{5m^4}{12}-\frac{m^2}{12}.$$

8. PIE を用いる。前半：女性 a,b,c,d が好ましくない組合わせになるという状態をそれぞれ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ とすると求める数は

$$\begin{aligned}N_0=&N-(N_\alpha+N_\beta+N_\gamma+N_\delta)+(N_{\alpha\beta}+N_{\alpha\gamma}+N_{\alpha\delta}+N_{\beta\gamma}+N_{\beta\delta}+N_{\gamma\delta})\\&-(N_{\alpha\beta\gamma}+N_{\alpha\beta\delta}+N_{\alpha\gamma\delta}+N_{\beta\gamma\delta})+N_{\alpha\beta\gamma\delta}\\=&{}_5P_4-(2+2+2+1){}_4P_3+(2\cdot2+3+2+2\cdot2+1+2){}_3P_2\\&-(6+2+3+2){}_2P_1+3\\=&120-7\times24+16\times6-13\times2+3=120-168+96-26+3=25\text{ 通り。}\end{aligned}$$

後半：同じ場合分けで B を選ばないものを考えると、$c-B$ は考えなくてよくなるので、

$${}_4P_4-(2+2+1+1){}_3P_3+(2\cdot2+1+2+2+1+1){}_2P_2-(2+2+1+1){}_1P_1+1$$
$$=24-36+22-6+1=5$$

よって、$25-5=20$ 通り。

※なお、もし、同じ場合分けで、B が組になるものだけ数える方法だと、

$$\begin{aligned}&({}_5P_4-{}_4P_4)-(2+2+1+1)({}_4P_3-{}_3P_3)-1{}_4P_3\\&+(2\cdot2+1+2+2+1+1)({}_3P_2-{}_2P_2)\\&+(2+2+1){}_3P_2-(2+2+1+1)({}_2P_1-{}_1P_1)-(4+2+1){}_2P_1+2\\&=96-6\times18-24+11\times4+5\times6-6\times1-7\times2+2\\&=96-108-24+44+30-6-14+2=20\text{ 通り。}\end{aligned}$$

9. 位数 12 の 2 面体群 G を考えることになっている。講義と同様に、0 度、±60 度、±120 度、180 度回転で元と重なる配置と、6 通りの折り返しで元と重なる配置の数を数える。折り返しには、ある向かい合う 2 個の位置を固定するので 4ヶ所の自由度があるもの（3 通り）と、すべての位置が対を作って入れ替わり 3ヶ所の自由度があるもの（3 通り）とがある。

$(3^6+2\times3+2\times3^2+3^3+3\times3^4+3\times3^3)/12=(729+6+18+27+243+81)/12=92$ 通り

レポート問題（第 2 回）

10. 立方体の頂点を、赤・青・黄・緑の各色を 2 回ずつ使って塗り分ける場合の数を求めよ。

11. 講義のマッチングアルゴリズムが男性最適・女性最悪であることを説明せよ。ただし、テキストのままでは 0 点とし、分かりやすい説明に加点する。

12. {2 重確率行列 }={ 置換行列の非負かつ和が 1 の一次結合 } を証明せよ。
　ただし、2 重確率行列とは、すべての成分が 0 以上 1 以下であり、各行各列について成分の和がすべて 1 になる正方行列のことをいう。また、置換行列とは、各行各列にそれぞれ 1 個だけ 1 があり他の成分はすべて 0 となる正方行列のことをいう。

13. 6 頂点からなる完全グラフ K_6 の辺を 2 色で塗り分けると、単色 3 角形が 2 つ以上存在することを示せ。

レポート問題（第 2 回）解答例

10. 目録は $(f_1^8 + 8f_1^2 f_3^2 + (3+6)f_2^4 + 6f_4^2)/24$ なので、

$$\frac{1}{24}\left(\frac{8!}{2!2!2!2!} + 9\frac{4!}{1!1!1!1!}\right) = 105 + 9 = 114 \text{ 通り。}$$

11. 男性最適：どの男性も、このアルゴリズムで見つかる相手よりもよい相手と組むことは（安定マッチングの範囲では）できない。

男性 m にとって、アルゴリズムで最終的に見つかる相手よりも良い女性 W と組む安定マッチング P が存在したと仮定する。アルゴリズムを適用していくと m は自分のリストの上位から求婚していくから、W に求婚したが最終的には拒否されたことになる。

m が W に拒否されたときに W とペアになった（最終的にアルゴリズムでペアになったかどうかは不明だが）男性 m' は W のリストで m より上位にある。m' は P では別の女性 W' とペアになっている。P の安定性から m' のリストでは W' が W より上位にある。するとアルゴリズムでは、m' が W に求婚してペアになっていた瞬間がある以上その前に W' が m' を拒否していたことになる。W' が m' を拒否 → W と m' がペアになる →（ここは同時かもしれない） W が m を拒否、の順に起こるので、アルゴリズムである拒否 (W が m を拒否) が起こるならば、それより前に別の拒否 (W' が m' を拒否) が起こることが示された。これを無限に繰り返すことはできないから矛盾。

女性最悪：どの女性も、このアルゴリズムで見つかる相手よりも悪い相手と組むことは（安定マッチングの範囲では）できない。

女性 W がアルゴリズムで組む相手 m より悪い相手 m' と組む安定マッチングがあったとする。男性最適であるから m は安定マッチングの範囲内では他の誰よりも W を好む。したがってこのマッチングは不安定である。矛盾。

12. 2 重確率行列 A に対し、(i,j) 成分が 0 でないときに i 行目と j 列目を辺で結ぶことにする。

k 個の行を任意に選ぶと、含まれる成分の和は k である。もし、これらの行と結ばれる列が $k-1$ 個以下しかないとすると、ある列の成分の和が 1 を越えてしまうので矛盾である。したがって、結ばれる列が k 個以上存在するので、Hall の定理より完全マッチングが存在する。

そのマッチングに対応する置換行列 R をとり、対応する部分の係数の最小値を c として $A - cR$ をつくる。これは成分が非負であり、各行各列の成分の和がすべて $1-c$ になる行列である。これが 0 でなければ同様の操作を続ける。1 回の操作で最低一つの成分は 0 になるから、いつかは終了する。1 回の操作で、係数の和の増加分と各行各列の成分の和の減少分は等しいから、係数の和は 1 である。

13. 頂点を $P_1, \ldots, P_6$ とする。色は赤と黄とする。講義で単色三角形が 1 つ存在することは示したので、それが赤い三角形 $P_1P_2P_3$ であるとしよう。残りの頂点 P_4, P_5, P_6 が赤い三角形を作ったなら 2 つあるから終わり。

そこで、例えば辺 P_4P_5 は黄色いとする。P_4 から P_1, P_2, P_3 への 3 本の辺を考えると、赤が 2 本あれば別の赤い三角形ができる。そこで、以下、赤が 1 本以下すなわち黄が 2 本以上であると仮定する。P_5 についても同様であるので、部屋割り論法より P_4 と P_5 のどちらからも黄色い辺でつながれている頂点が P_1, P_2, P_3 の中に存在する。それを P とすると、三角形 PP_4P_5 は黄色い三角形である。 □