計算論入門・レポート問題

1. Newton-Coates の公式の 4 次の場合を計算せよ。

2. Simpson の公式の誤差評価をせよ。

3. $f(x)=0$ の解を根 α の十分近くから始めて Newton 法で求める。$f'(\alpha)=0$ を満たす場合、1 乗収束することを示せ。

4. 星の光度は 5 等級で 100 倍の明るさの違いがある。1 等級ではおおよそ何倍違うか。Newton 法を用いて（適当な精度まで）計算せよ。

5. Euclid の互除法が各ステップで 2 つの数の最大公約数を保ちつづけることを示せ。

6. べき乗を乗算により評価するための最小ステップ数 $\ell(n)$ $(n \le 16)$ を上限・下限に注意して求めよ。

7. n を自然数とし、P をある $n+2$ 変数多項式とする（固定する）。$a_0, a_1, \ldots, a_n, x$ から多項式

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + P(a_0, \ldots, a_n, x) x^{n+1}$$

を加減乗算のみで評価するアルゴリズムは、最低 n 回の純乗算ステップを含むことを証明せよ。

ただし、純乗算ステップとは a_i たちや x を少なくとも 1 つ含んだ式同士の掛け算をいう。a_i にも x によらない定数を掛ける操作は純乗算ステップとは呼ばない。

8. $\mathrm{dec}(x) = x \ominus 1$ を計算する Turing 機械の状態遷移図を設計せよ。

9. 次の 2 つの条件を満たす 1 テープ Turing 機械で、テープが空白で埋まった初期状態から有限時間内に停止し、停止した時にできるだけ多くの 0 を出力しているものを設計せよ。ただし、終了状態に達したときにテープヘッドが 0 の左端に来ている必要はない。

a) 内部状態は開始状態を含めて 4 個以下（終了状態は含めない）
b) テープ記号は $\{0, B\}$ (B は空白)

10. 標準的な Turing 機械ではテープは左右に無限に延びている。テープの左側が切れていて端がある Turing 機械を考えても、標準的な Turing 機械を模倣できること（の概略）を示せ。

なお、テープヘッドは初期状態で左端にあるとするなど、条件は適当に仮定してよい。

11. 「１００字以内で表わせない最小の自然数」について考えることを述べよ。

12. 命題論理における様々な法則（プリント）を論理関数の言葉で証明せよ。もし Venn 図を使うなら、論理関数との関係を説明すること。

13. 命題論理において、2 変数の論理関数は NAND の組み合わせで実現できることを示せ（NOT, AND, OR が NAND で実現できることを示せ）。

14. n 個の自然数 $x_1, \ldots, x_n$ に対し、それらの最大値・最小値を与える関数

$$\max\{x_1, \ldots, x_n\},\ \min\{x_1, \ldots, x_n\}$$

は原始帰納的であることを示せ。

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

15. $\mathrm{fib}(x)$ を次で定義される関数（Fibonacci 数列）とする。

$$\begin{aligned}\mathrm{fib}(0) &= 0\\ \mathrm{fib}(1) &= 1\\ \mathrm{fib}(x+2) &= \mathrm{fib}(x+1)+\mathrm{fib}(x)\end{aligned}$$

$\mathrm{fib}(x)$ は原始帰納的であることを示せ。

16. Ackermann 関数 $A(x,y)$ について次を示せ。

(1) $x+y+1 \leq A(x,y)$
(2) $A(x,y) < A(x,y+1) \leq A(x+1,y)$
(3) 自然数 a,b に対し、$A(a,A(b,y)) < A(c,y)$ を満たす自然数 c がある。
(4) $g:\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ が原始帰納的関数ならば、ある自然数 c に対して

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n) < A(c,\max(x_1,x_2,\ldots,x_n))\ (x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ。（但し、空集合の max は 0 とする）
(5) $A(x,y)$ は原始帰納的関数でない

17. 自然数列 $1,3,2,0$ の Gödel 数を求めよ。

18. Gödel 数 $y=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ から様々な文字列操作をする関数を考える。
$\mathrm{length}(y)=n=y$ に含まれる数列の長さ、
$\mathrm{first}(y)=x_1=y$ に含まれる先頭の数、
$\mathrm{last}(y)=x_n=y$ に含まれる最後の数、
$\mathrm{get}(y,i)=x_i=y$ の i 番めの数、
$\mathrm{put}(y,i,x)=\langle x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_i,\ldots,x_n\rangle=y$ の i 番めに x を挿入した数列の Gödel 数、
$\mathrm{append}(y,x)=\langle x_1,\ldots,x_n,x\rangle=$ 最後に x を追加した数列の Gödel 数、
$\mathrm{insert}(y,x)=\langle x,x_1,\ldots,x_n\rangle=$ 最初に x を追加した数列の Gödel 数、
$\mathrm{left}(y)=\langle x_1,\ldots,x_{n-1}\rangle=$ 右端を除いた数列の Gödel 数、
$\mathrm{right}(y)=\langle x_2,\ldots,x_n\rangle=$ 左端を除いた数列の Gödel 数。
このうち、講義で説明しなかったものを原始帰納的関数として構成せよ。ただし、全域関数にするための吟味は省略してもよい（たとえば空列に対する first のように定義できない部分は 0 と定める、など）。

19. その他、講義で省略した部分を埋めよ。この他に講義中に出したレポート問題も有効である。また、講義に関連する事柄で考えたことを提出してもよい。