[代数学 A 演習]
黒板で発表することと小テストによって評価する。期末試験は行わない。

1. 次の集合 G は、演算 $*$ に関して群を成すことを示せ。

(1) 自然数 n に対し, $G = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$, $* =$ 積.

(2) 正の実数 a に対し, $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2 - ay_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

(3) $G = \{x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} | x, y, z \in \mathbb{Q}\} \backslash \{0\}$, $* =$ 積.

2. 次の表を群の乗法表になるように埋め、実際に群になっていることを確かめよ。

$*$	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1		g_2		
g_2		g_3		
g_3				
g_4				

3. 次の表を群の乗法表になるように埋め、実際に群になっていることを確かめよ。

$*$	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1						
g_2		g_5			g_1	
g_3				g_2		
g_4						
g_5						
g_6			g_2			

4. 群 G の任意の元 a が $a^2 = e$ を満たすなら、G は Abel 群であることを示せ。

5. 群 G に位数 2 の元 a が一つだけある時、a は G の任意の元と可換であることを示せ。

6. G を群、$a, b \in G$ とする。ab の位数が有限であると仮定し、それを d とおく。ba の位数も d になることを示せ。

7. $C^0(\mathbb{R}) = \{\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $\}$ は積によって自然にモノイドになる。$C^0(\mathbb{R})$ の単元群を求めよ。

8. 加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群をすべて求めよ。

9. 群 G の部分群 H, K について次を示せ。

(1) $H \cap K$ も G の部分群になる。

(2) $H \cup K < G \Leftrightarrow H < K$ or $H > K$.

(3) $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ が G の部分群 $\Leftrightarrow HK = KH$.

10. 次の集合 G は、$GL_n(\mathbb{R})$ の部分群であることを示せ。

(1) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(2) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3) $A \in GL_n(\mathbb{R})$ をひとつ固定した時、$G = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tXAX = A\}$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

11. G を群とする。写像 $\sigma : G \to G$ を $\sigma(x) = x^{-1}$ で定める。σ が群準同型になるならば、G は Abel 群であることを示せ。

12. $f : G \to G'$ を群の全射準同形とする。G が可換ならば G' も可換であることを示せ。

13.

(1) $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}$ は $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群になることを示せ。

(2) $G_2 = \{f(x) = ax + b | a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ は関数の合成に関して群をなすことを示せ。また、$G_1 \cong G_2$ であることを示せ。

14. G は有限群（有限個の元からなる群）とする。G の任意の元 x について、$x^{|G|}$ は単位元に等しいことを示せ。

15. 次を示せ。ただし、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ で、ある超平面 ($\mathbb{R}^2$ のときは直線) に関する対称移動を鏡映という。ここでは原点を通る超平面だけ考えることにする。

(1) $O(2) = SO(2) \coprod \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO(2)$

(2) $SO(2) = \{$ 平面の回転行列 $\} \cong U(1) = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = 1\}$,

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} SO(2) = \{$ 平面の鏡映行列 $\}$

16. $GL_2(K)$ (K は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$) の部分群 $P = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \xi \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \middle| \lambda\mu \neq 0 \right\}$, $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ をとる。このとき、$GL_2(K) = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} N \coprod P$ となることを示せ。

17. G を群とし、H, K は G の部分群とする。$K \lhd G$ ならば、HK も G の部分群であり、$(G : H)$ は $(G : HK)$ で (有限な値なら) 割り切れることを示せ。

18. H_i $(i = 1, \ldots, n)$ を群 G の部分群とするとき、次を示せ。

$$(G : H_i) < \infty \quad (i = 1, \ldots, n) \Longrightarrow (G : \bigcap_{i=1}^{n} H_i) < \infty.$$

19. $\mathfrak{S}_3$ の部分群を全て挙げよ。そのうち正規部分群はどれか。

20. $\mathfrak{A}_4$ の正規部分群を全て挙げよ。

21. n を 3 以上の自然数とする。n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の中で、
$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) $a^n = b^2 = e$, $ba = a^{-1}b$ を示せ。

(2) a, b の生成する部分群の位数を求めよ。この群を (正) 二面体群といい、D_n で表す。これは非 Abel 群である。

(3) 平面の一次変換で、原点を中心とする角度 $(2\pi/n)$ の回転行列を A, x 軸に関する折り返しを B とする。A, B が生成する $GL_2(\mathbb{R})$ の部分群は D_n に同型であることを示せ。

(4) (1) の関係式は $n = 2$ のとき位数 4 の Abel 群 V を定義することを示せ。V を Klein の四元群という。単位元以外の元の位数は 2 である。

(5) 2 つの位数 2 の元で生成される有限群は、二面体群と Klein の四元群に限ることを示せ。

22. G を $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ で生成される $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群とする。次を示せ。

(1) G は位数 8 の非 Abel 群。
(2) G のどの部分群も正規部分群。
(3) G は $Q := \langle u, i, j, k \mid u^2 = e,\ i^2 = j^2 = k^2 = u,\ ij = k \rangle$ (四元数群) と同型。
(4) 前問の D_4 も位数 8 の非 Abel 群であるが、Q と D_4 は同形でない。(Hint : (2))

23. 次を示せ。

(1) $\mathfrak{S}_n$ の任意の元は、共通文字のない巡回置換の積で表され、その表し方は順序を除いて一意的である。
(2) $\mathfrak{S}_n$ の任意の元は $(n-1)$ 個以下の互換の積で表される。この個数の評価は最良である。($(n-2)$ 個以下の互換の積では書けない元が存在する。)
(3) $\mathfrak{S}_n$ の任意の元は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個以下の隣接互換の積で表される。この個数の評価は最良である。
(4) $\mathfrak{S}_n$ は $(1 \quad 2 \quad \dots \quad n)$ と $(1 \quad 2)$ で生成される。

24. 群準同型 $\sigma\colon G \to G'$ が全単射であるとき、逆写像 $\sigma^{-1}\colon G' \to G$ も群準同型であることを示せ。

25. 群準同型 $\sigma\colon G \to G',\ \tau\colon G' \to G''$ を考える。

(1) 合成写像 $\tau \circ \sigma\colon G \to G''$ も群準同型であることを示せ。
(2) $\tau \circ \sigma$ が単射なら σ も単射であることを示せ。さらに、$\tau \circ \sigma$ が単射で τ が単射とならない群準同型の例を与えよ。

26. 群 G は一つの元で生成されるとき、巡回群と呼ばれる。巡回群は $\mathbb{Z}$ か $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n はある正の整数) に同型であることを示せ。

27. 自然数 n を固定する。

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ において、代表元が n と互いに素であるという性質は代表元の取り方によらないこと、すなわち、$a \equiv a' \mod n$ ならば、$(a, n) = 1 \Longleftrightarrow (a', n) = 1$ を示せ。
(2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の中で、上の性質を満たす同値類からなる部分集合 G をとる。
　G は代表元の乗法によって Abel 群になることを示せ。(G を $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ などと書く。)
　$(\mathbb{Z}/2000\mathbb{Z})^\times$ の位数はいくつか？

28. G を群とし、$a, b \in G$ とする。a, b の位数をそれぞれ m, n とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $ab = ba$ かつ $(m, n) = 1$ ならば、 ab の位数は mn であることを示せ。
(2) a^d $(d \in \mathbb{Z})$ の位数を求めよ。また、$\langle a^d \rangle = \langle a \rangle \Longleftrightarrow (d, m) = 1$ を示せ。

29. G を群とする。G の自明な部分群とは、$\{e\}$(単位群) と G 自身のことをいう。
　G は自明な部分群しかもたない $\Leftrightarrow G = \{e\}$ または素数位数の巡回群、を示せ。

30. 有理式 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ を考える。ただし、$ad-bc=0$ のときは考えないことにして、$G=\left\{ f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \;\middle|\; a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc\neq 0\right\}$ とおく。

(1) G は合成に関して群をなすことを示せ。

(2) 写像 $\varphi\colon GL_2(\mathbb{R})\ni\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\mapsto\frac{ax+b}{cx+d}\in G$ は群の全射準同型になることを示せ。

(3) φ の核はスカラー行列の全体 $Z=\{aI|a\in\mathbb{R}\}$ に等しいことを示せ。したがって、$G\cong GL_2(\mathbb{R})/Z$ である。(なお、右辺を $PGL_2(\mathbb{R})$ と書く。)

31. 前問の記号を用いる。

(1) f を関数と思うために、数 ∞ を導入する。

$$\begin{cases} c\neq 0 \text{ のとき } f(\infty)=\frac{a}{c},\ f(-\frac{d}{c})=\infty \\ c=0 \text{ のとき } f(\infty)=\infty \end{cases}$$

と定め、$\mathbb{R}\cup\{\infty\}=\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ と書く。f は $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ から $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ への全単射になることを示せ。f を $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ の一次分数変換という。

(2) $\mathbb{R}$ の相異なる 3 点 α,β,γ を与えたとき、$f(\alpha)=0, f(\beta)=1, f(\gamma)=\infty$ となる $f\in G$ がただ一つ定まることを示し、具体的に求めよ。特に、有理式として一致することと、$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上の関数として一致することは同じである。

(3) G の元で、集合 $\{0,1,\infty\}$ を保つ部分集合を求め、部分群になることを示せ。

(なお、以上の 2 問は $\mathbb{R}$ を任意の体にしても同様である。確認せよ)

32. $S\in M_n(\mathbb{R})$ を正定値対称行列とし、$X\in GL_n(\mathbb{R})$ とする。$S=\begin{pmatrix} S_0 & \mathbf{s}_1\\ {}^t\mathbf{s}_1 & s_2\end{pmatrix}$, $S_0\in M_{n-1}(\mathbb{R})$, $\mathbf{s}_1\in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $s_2\in\mathbb{R}$ とブロック分けする。

(1) S_0 もまた正定値対称行列であることを示せ。

(2) $s_2>{}^t\mathbf{s}_1S_0^{-1}\mathbf{s}_1$ を示せ。

(3) ある $N=\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{R}),\quad T=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $(\lambda_i>0)$ が一意的に存在して、$S={}^tNTN$ の形に書けることを証明せよ。(Hint : induction on n)

(4) X は、$X=KTN$ $(K\in O(n)$, T, N は上と同様) の形に一意的に書けることを証明せよ。(岩澤分解)

(5) $S={}^tKTK$ $(K\in O(n)$, T は同様) と書けることを説明せよ。

(6) $X=KTK'$ $(K,K'\in O(n)$, T は同様) と書けることを示せ。(Cartan 分解)

33. 指数 2 の部分群は正規部分群であることを証明せよ。

34. G を有限可換群とし、n を $|G|$ と互いに素な整数とする。$f(g)=g^n$ で定まる写像 $f:G\to G$ は群の同型写像になることを示せ。

35. $SO(2)$ の有限部分群をすべて求めよ。

36. 有限群 G は、共役類が 2 つしかないという。$|G|=2$ を示せ。

37. 52 枚のトランプを半分に分けて 1 枚ずつ交互になるようにシャッフルする。つまり、上からもともと $1, 2, 3, \ldots, 52$ となっていたものを $1, 27, 2, 28, \ldots, 26, 52$ となるように並べ替える。何回続けると元と全く同じ並び方になるか。

38. 赤・橙・黄・緑・青・藍・菫のそれぞれの色の同じ大きさの玉がこの順に一列に並んでおり、その前にスイッチを押すと予めプログラムされた通りにこの 7 個の玉を入れ替えるロボットがいる（ただしこのロボットは色は区別できない）。例えば、プログラムが 1 番めと 2 番めの玉を入れ替えて 5 番めと 6 番めの玉を入れ替えよというものであれば、一度スイッチを押すと、橙・赤・黄・緑・藍・青・菫の順に並ぶ。この場合もう一度スイッチを押すと、最初と同じ色の並び方になる。

どんなプログラムに対しても何回かスイッチを押すと最初と全く同じ色の並び方に戻ることを説明せよ。

また、n 回スイッチを押して初めて同じ並び方に戻ったとして、このような正の整数 n の最大値を求めよ。

39. n を正の整数とし、$E := \mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, 0, \ldots, 0)$ とする。E における関係 $\sim$ を、$a = (a_0, a_1, \ldots, a_n), b = (b_0, b_1, \ldots, b_n) \in E$ に対し

$$a \sim b \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \ b = \lambda a$$

で定める。$\sim$ は同値関係であることを示せ。

（$E/\sim$ を n 次元実射影空間と呼び $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ とか $\mathbb{R}P^n$ などと表わす。$\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ などとしても同様である。）

40. $\mathfrak{S}_4$ の中で、4 を 4 に移す元全体からなる部分集合を H とする。H は $\mathfrak{S}_4$ の部分群であり、$H \cong \mathfrak{S}_3$ である。

$\mathfrak{S}_4$ の H に関する左剰余類別を求めよ。

41. $\mathfrak{S}_4$ の部分集合 $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ を考える。V は $\mathfrak{A}_4$ の部分群であることに注意して、$\mathfrak{A}_4$ の V に関する剰余類を求めよ。

42. N を正の整数とする。$SL_2(\mathbb{Z}) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) | \det A = 1\}$ の次の部分集合を考える：

$$\begin{aligned}
\Gamma(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \mod N \right\} \\
\Gamma_0(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| a \equiv d \equiv 1, c \equiv 0 \mod N \right\} \\
\Gamma_1(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \mod N \right\}
\end{aligned}$$

$SL_2(\mathbb{Z}) \supset \Gamma_1(N) \supset \Gamma_0(N) \supset \Gamma(N)$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群の降鎖列であることを示し、各段階の左剰余類分割を求めよ。左隣の正規部分群になるものはあるか？

43. 3 以上の整数 m に対し、$\Gamma(m) = \{X \in SL_n(\mathbb{Z}) | \ X \equiv I \mod m\}$ とおく。

(1) $\Gamma(m)$ は群になることを示せ。
(2) $\Gamma(m)$ の位数有限な元は I だけであることを示せ。(難しければ $n = 2$ としてもよい)

44. $\mathfrak{S}_4$ の部分群 $V = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ を考える。$V \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。

(1) $\mathfrak{S}_4 \triangleright V$ を示せ。
(2) $\mathfrak{S}_4/V \cong \mathfrak{S}_3$ を示せ。

45. 対称群に関して、次を示せ。

(1) $(1\ 2)(3\ 4)$ をいくつかの 3 次の巡回置換の積で表わせ。
(2) 交代群は 3 次の巡回置換で生成されることを示せ。

46. $\mathfrak{S}_n$ の指数 2 の部分群は $\mathfrak{A}_n$ に限ることを証明せよ。

47. $\mathfrak{S}_n$ の部分集合 $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in \mathfrak{S}_n\}$ が $\mathfrak{A}_n$ に等しいことを示せ。

48. p を奇素数とし、G を位数 $2p$ の群とする。

(1) G の単位元以外の元の位数が全て 2 となることはない。これを示せ。
(2) G には位数 p の元が存在することを示せ。
(3) G は巡回群か、D_p に同型であることを示せ。

49. 次の生成元と関係式で定まる群の位数を求めよ。

(1) $\langle x, y | x^3 = y^2 = (xy)^2 = e \rangle$.
(2) $\langle x, y | x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1 \rangle$,
(3) $\langle x, y | xy^2 = y^3x,\ yx^3 = x^2y \rangle$.

50. G を位数 8 の群とする。以下の問では G に位数 8 の元が存在しないと仮定する。(なお、もし存在すれば巡回群 $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ に同形である)

(1) G に位数 4 の元もなければ、$G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であることを示せ。
(2) G に位数 4 の元 a が存在したとする。$\langle a \rangle$ に入らない位数 2 の元 b が存在すれば、$G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ または $G \cong D_4$ であることを示せ。
(3) (1)(2) にあてはまらない場合、$G \cong Q$ であることを示せ。

51. $O(n)$ は鏡映 (原点を通る超平面に関する対称変換) で生成されることを証明せよ。

52.

(1) $SO(3)$ の元は、空間で原点を通るある直線を軸とした回転を表すことを示せ。
(2) Δ を $\mathbb{R}^3$ の原点を重心とする図形とし、

$$G = \{X \in SO(3) \mid X \text{ は}\Delta\text{を}\Delta\text{の上に写す}\}$$

とおく。

Δ が正 n 角形なら $G \cong D_n$、正方形でない菱形なら $G \cong V$(四元群) であることを示せ。(二面体群の呼称の由来)

(3) Δ が正四面体、立方体 (or 正八面体)、正十二面体 (or 正二十面体) なら G はそれぞれ $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$ に同型であることを示せ。

53. 集合 X から集合 Y への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(X, Y)$ で表わす。

X を空でない集合とし、$\mathrm{Map}(X, X)$ の部分集合 G が写像の合成に関して群であるとする。

このとき、G の単位元は X の恒等写像 $\mathrm{id}_X \colon x \mapsto x$ とは限らないし、G の元は全単射であるとは限らない。$X = \{0, 1\}$ のときに例を作って確かめよ。

54. n を正の整数、K を体とする。群 G の中心を $Z(G)$ で表わす。

(1) $G > H$ に対して $H > Z(H) > Z(G) \cap H$ を示せ。
(2) $Z(GL_n(K))$ はスカラー行列の全体 $\{aI \mid a \in K\}$ であることを示せ。
(3) $Z(SL_n(K))$ を求めよ。

55. G を群とする。$\{a_1, \ldots, a_n\}$ が G を生成するとき、任意の自己同形 $\sigma \in \operatorname{Aut} G$ に対し、$\{\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)\}$ は G を生成することを示せ。

56. 群 G の自己同形 $\sigma \in \operatorname{Aut}(G)$ と $g \in G$ に対し次の問いに答えよ。

(1) g と $\sigma(g)$ の位数は等しいことを示せ。
(2) g と $\sigma(g)$ とは必ずしも共役であるとは限らない。$G = Q$ の場合に例を作れ。

57. 群 G は一個の元で生成されるとする。すなわち、G は巡回群 ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (n は自然数) あるいは $\mathbb{Z}$) とする。

(1) G の生成元になる元が k 個あるとき、$\operatorname{Aut} G$ の位数は k であることを証明せよ。
(2) $|\operatorname{Aut} \mathbb{Z}|$, $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ (p は素数) を求めよ。
(3) $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| =$ (n と互いに素な n 以下の自然数の個数) と定義する。(Euler の関数という)
　$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の生成元になるのは位数がちょうど n の元である。それは $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元であることを示し、$|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})| = \varphi(n)$ を導け。
(4) 群同型 $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を証明せよ。(Hint: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元の掛け算)
(5) 2 元 $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の位数が等しいとき、$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の自己同型 σ で、$\sigma(a) = b$ を満たすものが存在することを示せ。

58. 次の群 G の自己同型群 $\operatorname{Aut} G$ を決定せよ。
(1) $\mathfrak{S}_3$　(2) $SO(2)$　(3) D_4　(4) Q

59. $\mathfrak{S}_n$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型 χ としては、a) $\chi(\sigma) = 1$ または b) $\chi(\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma$ ($\sigma \in \mathfrak{S}_n$) の 2 種類しかないことを示せ。

60. $\mathfrak{A}_n$ から $\mathbb{C}^\times$ への準同型にはどのようなものがあるか？

61. 次の群の部分群の個数を求めよ。　(1) $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$　(2) $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$　(3) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 4}$

62. D_n の部分群の個数は $\displaystyle\sum_{d|n}(1+d)$ に等しいことを証明せよ。

63. 自然数 n を一つ固定するとき、次を示せ。
(位数 n の有限群の同型類の個数) = ($\mathfrak{S}_n$ の位数 n の部分群の同型類の個数) $< \infty$.

64. G を有限群とし、$|G| = n$ とする。

(1) $|\operatorname{Aut} G| \leq (n-1)(n-2)\ldots(n-[\log_2 n])$ を示せ。
(2) $|\operatorname{End} G| \leq n^{[\log_2 n]}$ を示せ。

65. G を群とする。$g \in G$ に対し、写像 $\operatorname{Ad}_g \colon G \ni x \to gxg^{-1} \in G$ を考える。

(1) Ad_g は G から G への同形写像になることを示せ。
(2) $\operatorname{Ad} \colon G \ni g \to \operatorname{Ad}_g \in \operatorname{Aut}(G)$ は群準同型であることを示せ。像を G の内部自己同形群といい、$\operatorname{Int}(G)$ で表わす。
(3) G が Abel 群のとき $\operatorname{Int}(G) = \{\mathrm{id}_G\}$ であることを示せ。

(4) G の中心を $Z(G)$ とする。$Z(G)$ は G の正規部分群であり、$G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G)$ であることを示せ。
(5) $\mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$ $(n \geq 3)$, $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ $(n \geq 4)$ であることを示せ。
(6) $\mathrm{Int}(G)$ は $\mathrm{Aut}(G)$ の正規部分群であることを示せ。
(7) 剰余群 $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ を G の外部自己同型群といい、$\mathrm{Out}(G)$ で表わす。$\mathrm{Out}(\mathfrak{S}_3)$ を求めよ。

66. $\mathfrak{A}_4$ には位数 6 の部分群がないことを示せ。

67. 位数 10 以下の群を同形を除いて分類せよ。

68. 位数 15 の群は巡回群 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ に同形であることを示せ。
より一般に次を示してもよい。
$p < q$ を素数として $q \not\equiv 1 \mod p$ のとき、位数 pq の群は巡回群 $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ に同形である。

69. 位数 12 の群を同形を除いて分類せよ。

70. 位数 18 の群を同形を除いて分類せよ。

71. 位数 20 の群を同形を除いて分類せよ。

72. $SO(3)$ の有限部分群を同形を除いてすべて求めよ。

73. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$ を求めよ。

74. 位数 45, 99 の群は Abel 群であることを示せ。

75. 位数 2001 の群は巡回群であることを示せ。

76. 位数 56 の単純群は存在しないことを示せ。

77. G を有限群とする。
(1) G が巡回群ではなく、かつ自明でない部分群がすべて Abel 群であるなら、G は単純群ではないことを示せ。
(2) $n = |G|$ とする。n と $\varphi(n)$ が互いに素であるなら、G は Abel 群であることを示せ。

78. 有限個の元からなる体を有限体という。
(1) p を素数とするとき、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体になることを示せ。
(2) 任意の正数 e と任意の素数 p に対して、$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 係数の e 次既約多項式が存在することを示せ。
(3) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]/(f(x))$ は位数 p^e の体になることを示せ。
(4) 有限体の位数は素数のべきであることを示せ。
(5) 位数の等しい有限体は体として同形であることを示せ。

79. $PGL_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$, $PGL_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$ を示せ。

80. $PGL_2(\mathbb{F}_4) \cong \mathfrak{A}_5$ を示せ。

81. $\mathfrak{S}_{12}$ の元 $x = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11)$, $y = (5\ 6\ 4\ 10)(11\ 8\ 3\ 7)$, $z = (1\ 12)(2\ 11)(3\ 6)(4\ 8)(5\ 9)(7\ 10)$ をとる。
(1) x と y で生成される部分群 M_{11} の位数は $8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$ であることを示せ。
(2) x, y, z で生成される部分群 M_{12} の位数は $8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$ であることを示せ。

代数学 A 演習小テスト（15.1.15)

自筆のＢ５の紙１枚のみ持ち込み可。答案用紙に氏名と学籍番号を記入すること。計算の過程もしっかり書くこと。携帯の電源は切ること。

1. $\mathfrak{S}_4$ の元の掛け算

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^3$$

を計算せよ。

2. $\mathfrak{S}_5$ の元 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ を共通の文字のない巡回置換の積で表わせ。また、この元の位数はいくらか。（答のみでよい）

3. 巡回群 $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ の元で、位数が 10 以下であるものは何個あるか。

4. n を正の整数とする。$G = GL_n(\mathbb{C})$ の中で行列式の絶対値が 1 である行列全体を

$$H = \{A \in G \mid |\det A| = 1\}$$

とする。H は G の正規部分群であることを示せ。

さらに、剰余群 G/H は加法群 $\mathbb{R}$（群演算は足し算）に同形であることを示せ。

（ヒント：$A \in G$ に対し $f(A) = \log|\det A| \in \mathbb{R}$ を与える写像は、群の全射準同型写像であることを示せ。）

解答例

80 点満点。

1.

$$(1\ 4\ 3\ 2)^3 = (1\ 2\ 3\ 4)$$

（10 点）

2. $(1\ 4\ 2)(3\ 5)$, 位数は 3 と 2 の最小公倍数で 6 。
（15 点）
※共通の文字を含まない 2 つの置換は可換であることに注意。

3. $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ の元の位数は、代表元が 2, 3, 5 をそれぞれ素因子に持つかどうかで決まる。位数が 10 以下となるのは、代表元が 3 または 5 で割り切れることと同値で、$30/3 + 30/5 - 30/15 = 14$ 個。
（15 点）

4. 写像 $f\colon G \to \mathbb{R}$ を、$A \in G$ に対し $f(A) = \log|\det A| \in \mathbb{R}$ と定める。$A, B \in G$ に対し

$$f(AB) = \log|\det AB| = \log|\det A \det B| = \log|\det A| + \log|\det B| = f(A) + f(B)$$

であるから、f は群の準同型写像である。任意の実数 x に対し、$(1,1)$ 成分が e^x で他の対角成分が 1 である対角行列を A_x とすると、$A_x \in G$ かつ $f(A_x) = x$ となるから、f は全射。$H = \ker f$ であるから H は G の正規部分群であり、準同型定理により $G/H \cong \mathbb{R}$ である。 $\square$
（40 点）