第2回八ヶ岳セミナー レクチャーノート

Calabi-Yau多様体セミナー

報告集

平成10年(1998年) 1月9日～12日

於　山梨県大泉村 八ヶ岳泉郷

はじめに

この報告集は、第2回八ヶ岳セミナー、すなわち、平成10年(1998年)1月9日から12日に甲斐大泉村の八ヶ岳泉郷に於いて行ったCalabi-Yau多様体セミナーの内容をまとめたものです。

Calabi-Yau多様体という言葉は、Ricci-flatなKähler計量を持つ多様体、小平次元が0の代数多様体、あるいはその一部を指す用語として使われています。Calabi-Yau多様体はホロノミー群の既約分解や、飯高fibration及びAlbanese写像による構造定理のbuilding blockであり、それ自身やモジュライに美しい構造があることが期待される重要な幾何的対象です。その研究は物理学との関りもあって、近年大きく進展しています。

ところが、いざ興味を惹かれても、初心者が勉強できる文献があまり存在しないのが実情です。そこでこのセミナーでは、どのようなことが、どこまでわかっていて、まずどの文献にあたればよいのかを講演してもらい、その結果を報告集として広く配布することによって、今後のこの分野の研究の一助となることを目論みました。

話題の発散を防ぐために、今回のセミナーでは主に代数幾何の観点からに絞りました。数論との関係など独自の話題が多い複素トーラスやK3曲面に限る内容や、物理に関する話題など、大変重要ではありますが、時間の関係で割愛したものが多数あります。どうかご容赦下さい。

髙木氏、川又氏、並河氏、小木曾氏の原稿は、講演ノートを元に小林がタイプしたものを直して頂きました。それ以外の原稿は、講演者に作って頂いたものです。講演、寄稿、校正をして下さった各氏、ノートを取って下さった参加者の皆様に感謝いたします。

なお、この報告集の出版及び旅費については、文部省科学研究費基盤A(1)(課題番号09304001, 代表 石田正典) の援助を受けました。また、会場である八ヶ岳泉郷のすばらしい宿泊・会議施設は、齋藤氏と上野氏のご協力で、一般よりも安く利用することができました。手配も齋藤氏にしていただきました。この場を借りて感謝いたします。

東京工業大学理工学研究科数学教室　小林 正典

参加者

石井 亮	京大理	髙木 寛通*	東大数理
石原 裕信	東工大理工	髙橋 宣能*	広島大理
上野 健爾	京大理	中島 徹*	都立大理
大平 まり	広島大総合科学	中野 英明	東工大理工
小木曾 啓示*	東大数理	中本 和典	京大理
面田 康裕	京大理	並河 良典*	上智大理
川添 充	大阪府大総合科学	廣門 正行*	東大数理
川又 雄二郎*	東大数理	藤木 明*	阪大理
小島 秀雄	阪大理	藤澤 太郎	長野高専一般科
小林 正典*	東工大理	細野 忍	富山大理
齋藤 秀司	東工大理	前野 俊昭	京大理
坂牧 和宏	京大理	松下 大介*	京大数理研
清水 勇二	京大理	皆川 龍博*	東大数理
秦泉寺 雅夫	東大数理	宮崎 誓	長野高専一般科

*は講演者

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

目次

極小モデル入門

高木 寛通

東京大学数理科学研究科

目的：LMMP を lc, $\mathbb{R}$-divisor の範囲で説明する。この講演では $/\mathbb{C}$ とする。

LMMP

きちんと勉強したい人は [2] を読んでから[6] を読むとよいと思います。また最近[5] も出版されました。Base point free theorem の証明はこちらの方が整理されていてとてもわかりやすくなっています。

極小モデルプログラム (MMP).
任意の代数多様体 X から、birational transformation で

(1) minimal model
(2) Mori fiber space

を構成する。

対数的極小モデルプログラム (LMMP).
任意の代数多様体とその divisor の pair から、birational map で

(1) log minimal model
(2) log Mori fiber space

を構成する。

対数化の利点.
MMP で生じた (1) や (2) を、divisor をくっつけることでさらに研究することができる。

例.

(1) flop：minimal model の birational map を調べる (後述)。
(2) Sarkisov program： 2つの Mori fiber space の間の birational map を基本的な birational map に分解する。

$$\begin{array}{ccc} & X \dashrightarrow X' & \\ \text{Mori fiber space} & \downarrow \quad \downarrow & \text{Mori fiber space} \\ & S \quad S' & \end{array}$$

に対して、基本的な birational map の例：

$$\begin{array}{ccc} & Z \overset{g}{\dashrightarrow} X' \\ f\swarrow & \\ X & \downarrow\beta \\ \alpha\downarrow & \\ S \underset{\gamma}{\longleftarrow} & S' \end{array}$$

α, β, γ は、MMP で出てくる morphism、しかし g は、LMMP で出てくる morphism。詳しくは[37] を参照。

定義1． X: normal variety, $\dim X = n$, $f : X \to S$: projective morphism とする。

$$\mathrm{Div}(X) := \{X \text{ 上の Cartier divisor のなす group}\},$$
$$Z_1(X/S) := \{X \text{ 上の 1 次元の cycle } C \text{ で } f_*(C) = 0 \text{ となるもののなす group}\}.$$

ここで f_* は cycle としての push-forward を表す。このとき

$\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の元を $\mathbb{R}$-*Cartier divisor* といい、
$Z_1(X/S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の元を *relative* $\mathbb{R}$-*1-cycle* という。

$\mathbb{R}$ のかわりに $\mathbb{Q}$ についても同様。
$D \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $C \in Z_1(X/S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ に対し、交点数 $(D \cdot C)$ が定まる。

$$N^1(X/S) := \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \underset{S}{\equiv},$$
$$N_1(X/S) := Z_1(X/S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} / \underset{S}{\equiv}.$$

ここで、

$$D \underset{S}{\equiv} D' \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall C \in Z_1(X/S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},\ D \cdot C = D' \cdot C,$$
$$C \underset{S}{\equiv} C' \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall D \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},\ D \cdot C = D \cdot C'.$$

交点形式により N_1 と N^1 は互いに dual になる。

$$\rho(X/S) := \dim_{\mathbb{R}} N^1(X/S)$$

を *relative Picard number* という。

$N^1(X/S)$, $N_1(X/S)$ には次の重要な cone がある。

$$\mathrm{Amp}(X/S) := (X \text{ 上の } f\text{-ample Cartier divisor の生成する cone}) \subset N^1(X/S),$$
$$\overline{NE}(X/S) := (X \text{ 上の effective relative } \mathbb{R}\text{-1-cycle の生成する cone の closure}) \subset N_1(X/S).$$

ただし、Cartier divisor D が *f-ample* $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists m_0\ \forall m \geq m_0, mD$ による map は S 上の埋め込み

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}(f_*\mathcal{O}(mD)) \\ & \searrow \circlearrowleft \swarrow & \\ & S & \end{array}$$

を定める。

定理 (Kleiman).

$$\mathrm{Amp}(X/S) = \{D \in N^1(X/S) \mid \forall C \in \overline{NE}(X/S) \setminus \{0\}, D \cdot C > 0\},$$

$$\overline{NE}(X/S) \setminus \{0\} = \{C \in N_1(X/S) \mid \forall D \in \mathrm{Amp}(X/S), D \cdot C > 0\}.$$

特に、f-ample は open condition であることがわかる。

注. $\mathbb{R}$-divisor D に対し、

$$D \text{ が } f\text{-}ample \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} D \in \mathrm{Amp}(X/S)$$

と定義すると、$\mathbb{R}$-divisor についても、X が projective, S が一点の場合には Nakai-Moishezon の ampleness criterion が成立する。[38] を参照。

定義 2. X: normal variety, $B = \sum b_i B_i$ s.t. B_i は prime divisor, $0 < \forall b_i \leq 1$ とする (B のことを $\mathbb{R}$-boundary という)。

(X, B) が高々 *log canonical (Kawamata log terminal, canonical, terminal)* singularity のみをもつ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $K_X + B$: $\mathbb{R}$-Cartier,

(2) $\forall f : Y \to X$: log resolution for (X, B) (i.e. Y : smooth, $f^{-1}(B) \cup \mathrm{excep} f$ が simple normal crossing divisor),
$K_Y + B_Y = f^*(K_X + B)$ と書くとき B_Y のすべての係数 ≤ 1 ($< 1, \leq 0, < 0$).

このとき、(X, B) は lc (klt, canonical, terminal) であるともいう。

$\mathcal{C}_S :=$ {lc, klt, canonical, terminal を持つ projective morphism $(X, B) \to S$ 全体のなす category}

注.

(1) canonical, terminal のときは $\mathrm{Supp} B = \emptyset$ も条件に入っていることに注意。

(2) log terminal にはいろいろな variant がある。ここでは一番広い意味での log terminal について補充する。

(X, B) が高々 *log terminal* singularity のみもつ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) $K_X + B$: $\mathbb{R}$-Cartier,

(2) $\exists f : Y \to X$: log resolution for (X, B), B_Y の exceptional な係数がすべて < 1.

くわしくは、[17, p.33] を参照。

定義 3. X normal, $f : X \to S$ projective morphism, B: $\mathbb{R}$-boundary とする。

(X, B) が *f-weak log canonical model (f-log minimal model, f-weak canonical model, f-minimal model)* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(1) (X, B) が lc (klt, canonical, terminal),

(2) $K_X + B$ が f-nef.

ただし、D が *f-nef* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall C$: irreducible curve s.t. $f_*(C) = 0$ に対し、$D \cdot C \geq 0$.

定義4．X, S を定義3の通りとする。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[dr, "f"'] & S' \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

としたとき、$f': X \to S'$ が *(log) Mori fiber space* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

(0) f' が connected fiber のみを持つ,
(1) (X, B) が lc (klt, canonical, terminal),
(2) $-(K_X + B)$ が f'-ample,
(3) $\rho(X/S') = 1$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C},S} := \{S \text{ 上の } \mathcal{C} \text{ に対応した定義3の model のなす category}\},$$
$$\mathcal{F}_{\mathcal{C},S} := \{S \text{ 上の } \mathcal{C} \text{ に対応した定義4の model のなす category}\}.$$

さて、LMMP の説明に移る。

MMP の場合、X を任意の代数多様体とする。X を X の resolution で置き換えることで X が smooth としてよい。とくに、X は $\mathbb{Q}$-factorial (X が $\mathbb{Q}$-*factorial* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全ての integral Weil divisor は $\mathbb{Q}$-Cartier) で高々 terminal singularity しかもたない。よって、$\mathbb{Q}$-factorial, terminal な X から始めて、$\mathcal{M}_{\mathcal{C},S}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{C},S}$ の元を得ればよい。

LMMP については (X, B) を任意の代数多様体とその上の boundary の pair とするとき、(X, B) をその log resolution で置き換える。そのとき exceptional divisor の係数を boundary にどうつけるかが問題となるが、ここでは説明しない。詳しくは[17, *p*.31, *p*.36] を参照。ここでは $(X, B) \in \mathcal{C}_s$ かつ X は $\mathbb{Q}$-factorial から出発して、$\mathcal{M}_{\mathcal{C},S}$ 又は $\mathcal{F}_{\mathcal{C},S}$ の元を得る方法を説明する。

問1．$K_X + B$ が f-nef?

YES → $(X, B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{C},S}$, 終わり。

NO → このとき、次の2つの (ほとんど) 定理がある。

'定理 1' (Cone Theorem). $(X, B) \in \mathcal{C}_s$ に対し、

(1) $\overline{NE}(X/S) = \overline{NE}^{K_X+B}(X/S) + \sum R_i$.

ここで、右辺第1項は $C \in \overline{NE}(X/S)$ s.t. $(K_X + B) \cdot C \geq 0$, のなす closed convex cone。第2項の R_i は $\overline{NE}(X/S)$ の 1-dimensional face で、$(K_X + B) \cdot R_i < 0$ となるもの。つまり、$\exists H \in N^1(X/S)$、H は $\overline{NE}$ 上 ≥ 0 かつ $H^\perp \cap \overline{NE} = R_i$. 特に H は f-nef. H を R_i の supporting divisor, R_i を extremal ray という。

(2) R_i は *discrete* である。

'定理 1' について：

- terminal の場合: Mori, [7] 参照。
- $\mathbb{R}$-divisor, klt(wklt) かつ一般次元で OK: Kawamata, [2][6][5] 参照。
- 3-dimensional なら $\mathbb{R}$-divisor, lc でも OK: Shokurov, [21] 参照。

'定理 2' (Base Point Free Theorem). *$(X, B) \in \mathcal{C}_S$, L: f-nef $\mathbb{R}$-Cartier divisor s.t. $mL - (K + B)$ は f-ample*

⇒ L は f-semi-ample.

ただし、L : $\mathbb{R}$-divisor が *f-semi-ample* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists f' : X \longrightarrow S' \qquad \begin{array}{c} f\searrow \ \swarrow g \\ S \end{array}, \quad L \sim_{\mathbb{R}} (f')^* A \text{ for some } A : g\text{-ample.}$$

$\sim_{\mathbb{R}}$: $\mathrm{Div}(X)\otimes\mathbb{R}$ において、$\mathrm{Pic}(X)\otimes\mathbb{R}$ の像での一致。$\mathbb{R}$-linear equivalence という。

これは L : $\mathbb{Q}$-divisor のときは普通の定義と一致する。つまり、L : $\mathbb{Q}$-divisor が *f-semi-ample* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists m_0$, m_0L は Cartier かつ $f^*f_*\mathcal{O}(m_0L) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(m_0L)$.

示した人・場合は上の '定理 1' と同じである。

さて、LMMP の説明に戻る。K_X+B が f-nef でないとすると、extremal ray R_i がある。さらに定理 2 と Stein factorization を使うと次のような S 上の morphism f' の存在がわかる ($\because H$: R_i の supporting divisor とすると、定理 2 より f-semi-ample)。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & X' \\ & f\searrow \ \swarrow g & \\ & S & \end{array}$$

s.t.

(1) X' : normal,
(2) f' は connected fiber のみ,
(3) C: irred curve, $[C] \in Z_1(X/S)$ に対し $(f')_*(C) = 0 \Leftrightarrow [C] \in R_i$.

f' のことを R_i の *contraction* という。実際、f' は (1) ~ (3) で特徴づけられる。

注. $-(K_X+B)$ は f'-ample であり、$\rho(X/X') = 1$ が成立していることに注意。また $\rho(X'/S) = \rho(X/S) - 1$ でもある ([5, Lemma 3-2-5])。

問 2 . f' の type?

Case 1. f' が birational でない場合。
$(X, B) \in \mathcal{F}_{C,S}$ よりここで終わり。

Case 2-1. f' が birational かつ codim(excep f')=1 (*divisorial contraction* という)
$\Rightarrow$ excep f' は prime divisor, $(X', f'(B)) \in \mathcal{C}_S$ かつ X' は $\mathbb{Q}$-factorial, $\rho(X'/S) = \rho(X/S) - 1$。

(X, B) を $(X', f'(B))$ で置き換えて、同じ問 1、問 2 を考えることで inductive に扱える。

Case 2-2. f' が birational かつ codim(excep f')≥ 2 (*flipping contraction* という)。
このとき、$(X', f(B)) \notin \mathcal{C}_S$ ($\because K_{X'} + f'(B)$ は $\mathbb{R}$-Cartier でない)。
そこで次の予想を考える。

予想 *1 (Existence of Flip).* 次のような log variery (X^+, B^+) と $(f')^+ : X^+ \to X'$ がある。

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & X^+ \\ & f'\searrow \ \swarrow (f')^+ & \\ & X' & \end{array}$$

(1) $K_{X^+} + B^+$ は f^+-ample (B^+ は B の strict transform on X^+)
(2) $\mathrm{codim}(\mathrm{excep}(f')^+) \geq 2$
(3) $\rho(X^+/X') = 1$

$X \dashrightarrow X^+$ を *flip* という。このとき、$(X^+, B^+) \in \mathcal{C}_S$ かつ X^+ は $\mathbb{Q}$-factorial がわかる。よってこの予想が成立すれば (X, B) を (X^+, B^+) で置き換えて再び問 1、問 2 を考える。

この予想は 3 次元、$\mathbb{Q}$-divisor case について、

- terminal の場合に Mori, ([18] を参照)
- klt の場合に Shokurov, ([21] を参照。[17] も)
- lc の場合に、Shokurov, 及び Kollár, Matsuki et al. ([17] 参照)

によって示されている。$\mathbb{R}$-divisor の場合は、ample は open condition だから $\mathbb{Q}$ で近似してやればよい。

flip が存在してもそれが無限回続いてしまうとらちがあかない。そこで、

予想 *2 (Termination of Flips).* flip の無限列はない。つまり、

$\exists n$, $X \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow X_2 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_n$, (X_n, B_n) は flipping contraction を持たない。

$\mathbb{Q}$-divisor の場合には、

- 3 次元 terminal の場合： Shokurov, ([9] を参照)
- klt の場合： Kawamata, ([15] を参照)
- lc の場合： Kollár et al. ([17] を参照)

により示されている。$\mathbb{R}$-divisor の場合も同じ論法で OK。ただし、$\mathbb{Q}$ 近似は許されない。

以上の予想 1, 2 が正しいとすると、有限回の flip を経て、Case 1 又は Case 2-1 になる。Case 1 ならおわりで、Case 2-1 なら inductive に扱う。このとき、$\rho(X'/S) = \rho(X/S) - 1$ なので、上の program はいつかは終わることになる。

系. *3 次元の (X, B) lc, $\mathbb{R}$-divisor の範囲で LMMP は OK。*

ABUNDANCE と FLOP

さて極小モデルを得たあと、その極小モデルを更に詳しく調べるにはどうしたらよいでしょうか？そのための重要な結果について述べます。

予想 *(abundance).* 定義 3 の各 model に対して $K_X + B$ は f-semi-ample.

この予想は 3 次元において

- terminal の場合に Miyaoka[30], Kawamata [28],
- $\mathbb{Q}$-divisor lc の場合に Keel-Matsuki-McKernan[29],
- $\mathbb{R}$-divisor lc の場合に Shokurov[31]

によって示された。

この予想が正しいと、定義 3 の $f: X \to S$ を $K_X + B$ によって定まる morphism (定理 2 の f-semi-ample の定義を参照) $f': X \to S'$ によって研究できる。ただし、$S \neq S'$ のときのみである。では、$S = S'$ のときどうしたらよいか?以下では terminal singularity のみもつ多様体の category で考える。主に[25] を参照。

定義 (flop). X, Y : terminal, D : divisor とする。projective birational morphism $f: X \to Y$ は codim(excep$f$)≥ 2 かつ $-D$ が f-ample のとき D-flopping contraction という。とくに $K_X = f^*K_Y$ なので、f でつぶれるすべての curve C に対して $K_X.C = 0$ である。D-flopping contraction f に対し、$f^+: X^+ \to Y$ は同じ条件で D^+ が f^+-ample のとき f の D-flop という。

D が effective のとき $0<\epsilon\ll 1$ に対して $(X,\epsilon D)$ は klt なので D-flop の存在は klt flip の存在と termination に帰着される。

しかし、$\dim X=3$ とすると存在についてもっとダイレクトなアプローチがある。

定理. $\dim X=3$ とするとき、任意の D に対して *D-flop* が存在する。

証明. Y が terminal singularity の germ のときに考えればよい。すると Y は cDV を群で割ったもの ([34][35][33])。その式の特性によって flop が作れる。

例えば Y が Gorenstein なら $x^2+f(y,z,w)=0$ と書ける。Y は $\iota\colon (x,y,z,w)\mapsto(-x,y,z,w)$ なる involution を持つが $f^+=\iota\circ f$ であることが容易にわかる。

$$\begin{array}{ccccc} X & & f^+ & & X \\ & f\searrow & \swarrow & & \downarrow f \\ & & Y & \xleftarrow{\iota} & Y \end{array}$$

その他も同様。 □

この証明は次のよい系をもつ。

系. *flop で X と X' の local analytic structure* は変わらない。

証明. 上の例でいうと X と X^+ は local analytic にまったく同じものであった。 □

この系は 4 次元では成立しない (すでに X を smooth としてもだめ:松下の例[26])。

この flop が自然に現れる状況は次である。

定理. *X,X' : 3-dimensional $\mathbb{Q}$-factorial minimal models s.t. $X\overset{\mathrm{bir}}{\sim}X'$.* このとき $\varphi\colon X\dashrightarrow X'$ は有限個の *flop* の合成で書ける。

この定理は一般次元でも flop の存在と termination が成立すれば従う ([27])。なお[27] では 4 次元の flop の termination が示されている。存在については smooth 4-fold からの flopping contraction についても難しい。

References

<u>分類論の一般論</u>

1. Clemens, Herbert; Kollár, Janos and Mori, Shigefumi: Higher dimensional complex geometry. Astérisque **166**, Soc. Math. France, Paris, 1988.

2. Kawamata, Yujiro: *The cone of curves of algebraic varieties.* Ann. of Math. **119** (1984) 603–633.

3. 川又 雄二郎: 高次元代数多様体の分類理論 —極小モデルの理論へ—. 数学 **40** (1988), 97–114.

4. 川又 雄二郎: 極小モデル理論の最近の発展について. 数学 **45** (1993), no. 4, 330–345.

5. 川又 雄二郎: 代数多様体論. 共立講座 21 世紀の数学 **19** (1997), 共立出版.

6. Kawamata, Yujiro; Matsuda, Katsumi and Matsuki, Kenji: *Introduction to the minimal model problem.* in: Algebraic geometry, Sendai 1985 (T. Oda, ed.), Adv. Stud. in Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam (1987) 283–360.

7. Mori, Shigefumi: *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective.* Ann. of Math. **116** (1982) 133–176.

8. Mori, Shigefumi: *Classification of higher dimensional varieties.* in : Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Sympos. Pure Math. vol. **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987) 269–332.

9. Shokurov, Vyacheslav V.: *The nonvanishing theorem.* Math. USSR Izv. **19** (1985) 591–604.

10. Ueno, Kenji: Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Lect. Notes Math. **439**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.

<ins>flip</ins>

11. Kachi, Yasuyuki: *Flips from semistable 4-folds whose degenerate fibers are unions of Cartier divisors which are factorial terminal 3-folds.* Math. Ann.

12. Kachi, Yasuyuki: *Flips from 4-folds with isolated complete intersection singularities.* to appear in Amer. Jour. Math.

13. Kawamata, Yujiro: *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces.* Ann. of Math. **127** (1988) 93–163.

14. Kawamata, Yujiro: *Small contractions of four dimensional algebraic manifolds.* Math. Ann. **284** (1989) 595–600.

15. Kawamata, Yujiro: *Termination of log flips for algebraic 3-folds.* Internat. J. Math. **3** (1992) 653–660.

16. Kollár, Janos: *Flips, flops, minimal models, etc.* Surv. in Diff. Geom. **1** (1991) 113–199.

17. Kollár, Janos et al.: Flips and Abundance for Algebraic Threefolds, a summer seminar at the University of Utah (Salt Lake City, 1991), Astérisque **211**, Soc. Math. France, Paris (1992).

18. Mori, Shigefumi: *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds.* J. Amer. Math. Soc. **1** (1988) 117–253.

19. Reid, Miles: *What is a flip?* preprint.

20. Shokurov, Vyacheslav V.: *Special 3-dimensional flip.* preprint MPI/89-22.

21. Shokurov, Vyacheslav V.: *3-fold log flips.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **56**, No. 1 (1992) 105–201. English translation: Math. USSR. Izv. **40**, No. 1 (1993) 95–202.

22. Shokurov, Vyacheslav V.: *Semi-stable 3-fold flips.* Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math. **57**, No. 2 (1993) 162–224.

23. Shokurov, Vyacheslav V.: *3-fold log models.* Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory **33** (1996) Algebraic Geometry-4. English translation: J. Math. Sci. **33** (1996) 2667–2699.

24. Takagi, Hiromichi: *Remarks on Gorenstein Terminal Fourfold Flips.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo **5** (1998), No. 1, 149–164.

flop

25. Kollár, Janos: *Flops.* Nagoya Math. J. **113** (1989) 14–36.

26. Matsushita, Daisuke: *On smooth 4-fold flops.* preprint.

27. Matsuki, Kenji: *Termination of flops for 4-folds.* Amer. J. Math. **113** (1991) 835–860.

abundance

28. Kawamata, Yujiro: *Abundance theorem for minimal threefolds.* Invent. Math. **108** (1992) 229–246.

29. Keel, Sean; Matsuki, Kenji and McKernan James: *Log abundance theorem for threefolds.* Duke Math. J. **75** No. 1 (1994) 99–119.

30. Miyaoka, Yoichi: *Abundance conjecture for threefolds : $r = 1$ case.* Comp. Math. **68** (1988) 203–220.

31. =**23**. Shokurov, Vyacheslav V.: *3-fold log models.* Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Sovremennaya Matematika i Ee Prilozheniya. Tematicheskie Obzory **33** (1996) Algebraic Geometry-4. English translation: J. Math. Sci. **33** (1996) 2667–2699.

特異点

32. 石井 志保子: 特異点論入門. シュプリンガー現代数学シリーズ, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997.

33. Mori, Shigefumi: *On 3-dimensional terminal singularities.* Nagoya Math. J. **98** (1985) 43–66.

34. Reid, Miles: *Canonical 3-folds.* in : Journées de Géométrie Algébrique d'Angers (A. Beauville, ed.), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, 273–310.

35. Reid, Miles: *Minimal models of canonical 3-folds.* in : Algebraic Varieties and Analytic Varieties (S. Iitaka, ed.), Adv. Stud. Pure. Math. **1** (1983) 131–180.

36. Reid, Miles: *Young persons' guide to canonical singularities.* in : Algebraic Geometry, Bowdoin 1985, Proc. Sympos. Pure Math. vol. **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987) 345–414.

その他

37. Corti, Alessio: *Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov.* J. Algebraic Geom. **4** (1995) 223–254.

38. Campana, Frédéric and Peternell, Thomas: *Algebraicity of the ample cone of projective varieties.* J. Reine Angew. Math. **407** (1990) 160–166.

カラビ・ヤウ多様体： C. Schoen の構成法, 正標数での non-liftable な例

東京大学大学院数理科学研究科
廣門正行

§1. 定義

X を三次元非特異射影的代数多様体とし, 定義体 k は代数的閉体とする.

定義. X が 次の条件を満たすとき Calabi-Yau threefold (以下 C.Y. 3-fold) であるとする. $K_X \cong \mathcal{O}_X$, $h^i(\mathcal{O}_X) = 0$ for $i = 1, 2$.

また 定義より即 従う性質として次が挙げられる

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}_X) &= 0 \qquad \text{Riemann-Roch.}\\
e(X) &:= \sum_{i=0}^{6} (-1)^i b_i(X) \qquad \text{Euler number}\\
&= -2\chi(\Omega_X).\\
h^j(\Omega_X^i) &= h^{3-j}(\Omega_X^{3-i}) \qquad \text{Serre duality.}
\end{aligned}$$

更に標数零ならば

$$\begin{aligned}
H^q(X, \mathbb{C}) &= \bigoplus_{i+j=q} H^j(\Omega_X^i)\\
h^j(\Omega_X^i) &= h^i(\Omega_X^j) \qquad \text{Hodge duality が成立.}
\end{aligned}$$

また exponential map: $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{exp.}} \mathcal{O}_X^* \to 0$ を考えることにより

$$\cdots \to H^1(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathcal{O}_X) \to \cdots$$

即ち Picard 数と 第二 Betti 数が等しいことが云える $\rho(X) = b_2(X)$.

§2. 例

ここでは最初に C. Schoen の例を紹介し, 次に正標数で non-liftable な例が作れることを示す.

Remark. Z を射影的非特異四次元有理多様体とする. もし 非特異な anti-canonical member $X \in |-K_Z|$ が取れれば X は C.Y. 3-fold である.

(I) Schoen's example.
$\phi_i : Y_i \to \mathbb{P}^1$ $(i = 1, 2)$ を有理楕円曲面とし セクションを持つと仮定する．この時 $Z := Y_1 \times Y_2$ と置き ϕ_i から誘導される map:

$$Z := Y_1 \times Y_2 \xrightarrow{\phi_1 \times \phi_2} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

を考える．この時 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上 general な直線 $l \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|$ に対しその pull-back $X := (\phi_1 \times \phi_2)^* l$ は非特異であり，Z の anti-canonical member になっていることが楕円曲面の canonical bundle formula より従う．よって X は C.Y. 3-fold であり，特に一般ファイバーが アーベル曲面であるようなファイブレーション $(\phi_1 \times \phi_2)|_X : X \to l\,(\cong \mathbb{P}^1)$ を持つ．

また彼は次の様にして更に様々な Euler number を持つ C.Y. 3-fold を構成した．S_i, $\bar{S}_i$ $(i = 1, 2)$ を $\mathbb{P}^1$ の部分集合で以下で与えられるものとする．

$$S_i := \{t \in \mathbb{P}^1 |\ \phi_i^{-1}(t) : \text{特異ファイバー}\}$$
$$\bar{S}_i := \{t \in \mathbb{P}^1 |\ \phi_i^{-1}(t) : \text{特異ファイバーで } I_n \text{ 型 }_{(n \geq 2)} \text{ のもの}\}.$$

ここで $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上の直線 $l \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|$ を $l \cap \left((S_1 \times S_2) \setminus (\bar{S}_1 \times \bar{S}_2)\right) = \emptyset$ が満たされる様に取る．この様にして pull-back $X := (\phi_1 \times \phi_2)^* l$ を考えると X は高々孤立特異点 (ordinary double point) を持つ三次元多様体で dualizing sheaf は trivial である．よって small resolution $\pi : \tilde{X} \to X$ を取ることにより C.Y. 3-fold $\tilde{X}$ が得られる．

Remark. 上の C.Y. 3-fold $\tilde{X}$ の Euler 数は $e(\tilde{X}) = 2(\#\mathrm{Sing}\, X)$ で与えらる．その値としては 0 以上 100 未満の $2, 4, 6, 10, 14, 28, 88, 94$ 以外の偶数値を取る例が存在することが分かっている [13].

(II) Example in char. $p > 0$.
ここでは正標数特有の p-閉ベクトル場による商多様体を考える (cf. [10])．先ず以下の事実を復習する: Z を非特異三次元多様体とし，有理ベクトル場 $\delta \in H^0(T_Z \otimes k(Z))$ で p-閉なもの (i.e., $\delta^p = \alpha\delta$ for some $\alpha \in k(Z)$) を取る．この時 Z の δ による商 V が各アファイン開集合ごとに以下のように定まる:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad g \quad} & V \\ \wr\!\shortparallel & & \wr\!\shortparallel \\ \bigcup_i \mathrm{Spec}\, A_i & & \bigcup_i \mathrm{Spec}\, A_i^\delta \end{array}$$

但し $A_i^\delta := \{a \in A_i |\ \delta(a) = 0\}$．この様にして正規三次元多様体 V が商として得られる．また $A_i^{(p)}$ を A_i の各元の p 巾より生成される環とすると $A_i \hookleftarrow A_i^\delta \hookleftarrow A_i^{(p)}$ が満たされることから商多様体 V は Z の相対フロベニウス射をファクターすることが分かる $\mathrm{Fr} : Z \to V \to Z^{(-1)}$．また δ を局所座標 x, y, z を用いて $\delta = f(A\partial/\partial x + B\partial/\partial y + C\partial/\partial z)$ と表した時 (但し $f \in \mathcal{O}_Z$ で A, B, C は共通因子を持たない)，δ の特異点が局所的に以下で定められる $\mathrm{Sing}\,\delta := \{A = B = C = 0\}$．この時 特に V の特異点は $\mathrm{Sing}\,\delta$ の g による像と一致することが分かっている．

ここで上の Z として $\mathbb{P}^3$ を取り，δ として以下で与えられるものを考える:

$$\delta := (x^p - x)\frac{\partial}{\partial x} + (y^p - y)\frac{\partial}{\partial y} + (z^p - z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

特にこの δ は $\delta^p = \delta$ を満たし 商多様体 V を定める．

定理. 以上の様にして得られた $\mathbb{P}^3$ の p-閉有理ベクトル場 δ による商多様体 V は 標数 $p=3$ の時 crepant resolution $\pi : X \to V$ を持ち, 以下を満たす:

i) X は Calabi-Yau threefold である,
ii) X は unirational, 即ち 超特異 C.Y.,
iii) $\pi_1^{\mathrm{alg.}}(X) = \{1\}$,
iv) $b_2(X) = 41$, $b_3(X) = 0$ が成立する,
v) $h^0(\Omega_X) = h^0(T_X) = 0$ である, 即ち Hodge duality が成立する,
vi) X は準楕円ファイブレーションを持つ.

(証明の概略). 我々の場合には局所的に Sing δ は $\{x^p - x = 0, y^p - y = 0, z^p - z = 0\}$ で与えられる. また他のアファインチャート, 例えば $(1 : x : y : z) = (x_1 : 1 : y_1 : z_1)$ で見ると

$$
\begin{aligned}
\delta :&= (x^p - x)\frac{\partial}{\partial x} + (y^p - y)\frac{\partial}{\partial y} + (z^p - z)\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \frac{1}{x_1^{p-1}}\Big[(x_1^p - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (y_1^p - y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + (z_1^p - z_1)\frac{\partial}{\partial z_1}\Big],
\end{aligned}
$$

となり Sing δ は素体上定義された $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_p}$ の $\mathbb{F}_p$-有理点の集合に対応していることがわかる. 更に $q \in$ Sing δ に対して特異点は

$$
\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3,q} & \hookleftarrow & \widehat{\mathcal{O}}_{V,g_0(q)} \\
\| & & \| \\
k[[x,y,z]] & \hookleftarrow & k[[x^i y^j z^k \,|\, i+j+k \equiv 0 \mod p]]
\end{array}
$$

で与えられる. この特異点はタイプ $\frac{1}{p}(1,1,1)$ のトーリック特異点であり, 特に $p=3$ の時 crepant resolution が存在する.

Remark. 実は $\mathbb{P}^3$ 上の δ の特異点 Sing δ は p^3+p^2+p+1 個の $\mathbb{F}_p$-有理点 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p)$ をブローアップすることによって解消される (即ち, δ は [3] で言う smoothable なベクトル場である). 実際 原点のブローアップ $(x = s, y = st, z = su)$ により

$$
\pi^*\delta = s\big[(s^{p-1} - 1)\frac{\partial}{\partial s} + s^{p-2}(t^p - t)\frac{\partial}{\partial t} + s^{p-2}(u^p - u)\frac{\partial}{\partial u}\big]
$$

となり, 例外因子 $E := \{s = 0\}$ 上で $\pi^*\delta$ は非特異である. よって p^3+p^2+p+1 個の点 Sing δ をブローアップ $\pi : S \to \mathbb{P}^3$ することにより, δ は S 上に非特異 p-閉ベクトル場 $\pi^*\delta$ を誘導し, 次の可換図式を与える:

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"', "\text{b-ups}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\text{resol.}"] & S^{(-1)} \arrow[d] \\
\mathbb{P}^3 \arrow[r, "g_0"] & V \arrow[r] & \mathbb{P}^{3(-1)}
\end{tikzcd}
$$

ここで g は有限, 平坦射で S の相対フロベニウス射をファクターする. よって 特に $b_2(X) = b_2(S) = \#(\text{blowing ups}) + 1$, $b_3(X) = b_3(S) = 0$ が成立する.

また 次の exact sequence が存在することが知られている [10]:

$$0 \to \mathcal{L} \to T_S \to g^*T_X \to F^*\mathcal{L} \to 0.$$

但し, F を S のフロベニウス射, $\mathcal{L} \hookrightarrow T_S$ を局所的に $\pi^*\delta$ より生成されたサブバンドル (smooth 1-foliation) とする. 今 π の例外集合を $\{E_i\}$ と置いた時 $\mathcal{L} \cong \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-p+1) \otimes \mathcal{O}_S(\sum_{i=1}^{p^3+p^2+p+1} E_i)$ であるので determinant を取ることによって

$$g^*K_X \cong \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}((p-1)^2-4) \otimes \mathcal{O}_S((3-p)\sum_{i=1}^{p^3+p^2+p+1} E_i).$$

よって 特に $p=3$ で $K_X \equiv_{\mathrm{num.}} 0$ である.

補題 [5]. 上の条件下で $H^1(\mathcal{O}_X)=0$ が成立する.

この補題を認めれば, $p=3$ の時 リーマン・ロッホより $\chi(\mathcal{O}_X)=0$ であるので

$$1 \le h^0(\mathcal{O}_X)+h^2(\mathcal{O}_X)=h^3(\mathcal{O}_X)=h^0(K_X)$$

がセール双対性より従う. また $K_X \equiv_{\mathrm{num.}} 0$ から $h^0(K_X) \le 1$ であり, $h^2(\mathcal{O}_X)=0$, $K_X \cong \mathcal{O}_X$ が従う. よって X は $p=3$ の時 C.Y. 3-fold である.

系. 上の様にして得られた *C.Y. 3-fold* X は標数零へ射影的に持ち上がらない.

証明. 今 X が標数零へ射影的に持ち上がるとする, 即ち 射影的でスムースな射

$$\mathfrak{X} \to \operatorname{Spec} R$$

が discrete valuation ring R 上に存在し, その閉ファイバーが X に同型 かつ R の商体は標数零であるとする. この時 geometric generic fiber $\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}$ の ベッチ数及び数値的種数 $p_a(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}})$ は閉ファイバーのそれと同じである. 即ち $b_3(\mathfrak{X}_{\bar{\eta}})=0$ かつ $h^3(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_{\bar{\eta}}})=1$ となり ホッジ理論より矛盾が導かれる. よって 定理で得られた C.Y. 3-fold X は標数零へ射影的に持ち上がらないことが分かる. □

Remark. P. Deligne は 正標数の $K3$ 曲面について常に標数零へ持ち上がることを示した [2]. 上で得られた例によりこの主張は C.Y. 3-fold においては常には成り立たないことが分かる.

References

M. Artin, B. Mazur, *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4^e série) 10, 87-132 (1977).

P. Deligne, *Relèvement des surfaces K3 en caractéristique nulle*, Lect. Notes in Math. 868, Springer-Verlag, 58-79, (1981).

M. Hirokado, *Zariski surfaces as quotients of Hirzebruch surfaces by 1-foliations*, preprint.

———, *Calabi-Yau threefolds obtained as fiber products of elliptic and quasi-elliptic rational surfaces*, preprint.

———, *A non-liftable Calabi-Yau Threefold in characteristic* 3, preprint.

W. Lang, N. Nygaard, *A short proof of the Rydakov-Safarevic theorem*, Math. Ann. 251, 171-173 (1980).

Y. Miyaoka, *Vector fields on Calabi-Yau manifolds in characteristic p*, 代数幾何学シンポジュウム記録 (於城崎), 149-156 (1995).

N. Nygaard, *On the fundamental group of a unirational 3-fold*, Inv. Math. 44, (1978), 75-86.

———, *A p-adic proof of the non-existence of vectorfields on K3 surfaces*, Ann. of Math. 110, 515-528 (1979).

A. Rudakov, I. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Math. USSR Izv, 10, 1205-1237 (1976).

———, *Surfaces of type K3 over fields of finite characteristics*, J. Soviet Math. 22, 1476-1533 (1983).

K. Sakamaki, *Artin-Mazur formal groups and Picard-Fuchs equations attached to certain Calabi-Yau threefolds*, Master's Thesis, Kyoto University, 1994.

C. Schoen, *On fiber products of rational elliptic surfaces with section*, Math. Z. 197, 177-199 (1988).

N. Suwa, *Hodge-Witt cohomology of complete intersections*, J. Math. Soc. Japan, vol. 45, no. 2, 295-300 (1993).

POLARIZED CALABI-YAU THREEFOLDS,
FIBERED CALABI-YAU THREEFOLDS
AND
CLEMENS CONJECTURE

小木曾 啓示

東京大学数理科学研究科

この講演では、X: Calabi-Yau 3-fold とは、projective smooth 3-fold/$\mathbb{C}$ で、$\mathcal{O}_X(K_X) \cong \mathcal{O}_X$, $\pi_1(X) = \{1\}$ を満たすものとする。なお、基本群の条件は、ほとんどの場合、irregularity=0 でも十分である。

1) Polarized Calabi-Yau 3-fold

(X, L) : polarized Calabi-Yau 3-fold とは、X : Calabi-Yau 3-fold と、L : ample (ample cone の内部) line bundle との pair のことをいう.

$$\text{視点}\begin{cases} X \text{ をその方程式を通じて調べる。} \\ X \text{ の方程式を調べる。} \end{cases}$$

graded ring $R(X, L) = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, mL)$: 有限生成,

$$(X, L) \cong (\mathrm{Proj}(R(X, L)), \mathcal{O}_X(1)).$$

ここで、$\zeta_1, \dots, \zeta_N$ を $R(X, L)$ の斉次な生成元とすると、graded polynomial ring $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]$ からの全射がある。次数を $d_1, \dots, d_N$ とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N] & \twoheadrightarrow & R(X, L) \\ \Psi & & \Psi \\ X_i & \mapsto & \zeta_i \\ \deg X_i = d_i & & \end{array}$$

Kernel の斉次な生成元を $F_1, \dots, F_M$ とし、その次数を $m_1, \dots, m_M$ とすると、

$$R(X, L) \cong \mathbb{C}[X_1, \dots, X_N]/(F_1, \dots, F_M) \text{ であり、}$$

X は WPS (weighted projective space) $\mathbb{P}(d_1, \dots, d_N)$ 内で $F_1 = 0, \dots, F_m = 0$ で定義される。

基本的な問.

$\boxed{1}$ 1) 生成元は？ 2) 関係式は？
最も簡単な場合は、
1) WCI (weighted complete intersection) 型

$$2) \begin{cases} \forall d_i = 1\text{— simply generated} \\ \forall m_j = 2\text{— normally presented} \end{cases}$$

$\boxed{2}$ mL はいつ free か？ mL はいつ very ample か？

$\boxed{1}$ 1) WCI 型

結果 ([10], [2] も). *(1)* $\Delta(X,L) = L^3 + \dim X - h^0(X,L)$: *藤田の* Δ*-genus とし、* $\dim X = 3$ *とする。*

$\Delta(X,L) \le 2$ ならば *WPS の WCI で書ける。*

$\Delta(X,L)$	(h,d)	(X,L)
1	$(3,1)$	$(10) \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,5)$
	$(4,2)$	$(8) \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,4)$
2	$(2,1)$	$(6)\cap(6) \subset \mathbb{P}(1,1,2,2,3,3)$
	$(3,2)$	$(4)\cap(6) \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,2,3)$
	$(4,3)$	$(6) \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2)$
		$(3)\cap(6) \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2,3)$
	$(5,4)$	$(2)\cap(6) \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,1,3)$

(2) $|\mathcal{O}_X(1)|\cap|\mathcal{O}_X(1)| \ni \exists C$*: irreducible curve となる WPS の general な WCI は次の 13 通り。*

$$(10) \subset \mathbb{P}(1^3,2,5),\quad (8) \subset \mathbb{P}(1^4,4),\quad (4,6) \subset \mathbb{P}(1^3,2^2,3),\quad (6) \subset \mathbb{P}(1^4,2),$$
$$(4)\cap(4) \subset \mathbb{P}(1^4,2^2),\quad (3)\cap(4) \subset \mathbb{P}(1^5,2),\quad (2)\cap(6) \subset \mathbb{P}(1^5,3),\quad (6)\cap(6) \subset \mathbb{P}(1^2,2^2,3^2),$$
$$(5) \subset \mathbb{P}^4,\quad (3)\cap(3) \subset \mathbb{P}^5,\quad (2)\cap(4) \subset \mathbb{P}^5,\quad (2)\cap(2)\cap(3) \subset \mathbb{P}^6,\quad (2)\cap(2)\cap(2)\cap(2) \subset \mathbb{P}^7.$$

C は Gorenstein になる.

基本的 *idea.* ladder method + half canonical linear system on curves.

ladder method とは、ample line bundle の section で次々に切り、切り口の環から元の環を復元する方法である。

$$H^0(X,mL) \twoheadrightarrow H^0(S,mL_S) \quad \forall m$$

が大切。ここで $S \in |L|$. また Gorenstein curve C に対して、$2L|_C = K_C$ となる line bundle $L|_C$ を half canonical というが、$R(C, L|_C)$ がよく分かっていることが (1),(2) で key になる。即ち、少数の例外 (よく分かっている) を除いて $\deg \le 3$ で生成され、$\deg \le 6$ で関係づけられる ([12])。

$\boxed{2}$ $|mL|$ いつ free か？

Theorem([1][3][7]). $|mL|$ *: free if* $m \ge 4 = 3+1$, $L^3 \ge 2 \Rightarrow$ *free if* $m \ge 3$

注. Calabi-Yau 3-fold については best possible である: $(10) \subset \mathbb{P}(1,1,1,2,5)$ では $L^3 = 1$, $|3L|$ not free.

Theorem([11]). $|L|$*: free,* $\Phi_{|L|}$ *birational* $\Rightarrow |mL|$ $(m \ge 2)$ *simply-generated.*

$\Phi_{|5L|}$ はいつでも birational([10][11]).
$\Rightarrow |mL|$ simply generated (特に very ample) if $m \ge 10$.

予想 *(Fujita conjecture).* $|mL|$ は $m \ge 5$ なら very ample.

先の例では $|4L|$ は not simply generated である。

2) Fibered Calabi-Yau 3-fold

前節で出てきた Calabi-Yau 3-fold は全て $\rho = 1$ であった. この節では $\rho \geq 2$ のもののみ意味がある。また、条件 $\pi_1(X) = \{1\}$ も必要になる。

定義. $\varphi_{|D|} : X \to W(\neq \mathrm{pt}, \not\cong X)$ が *contraction* (今度は、D は ample cone の境界に出てくる) $\Leftrightarrow$

(1) W : normal,
(2) φ: connected fiber.

$$\begin{cases} \dim W = 3 \text{ のとき birational contraction,} \\ \dim W < 3 \text{ のとき fiber space.} \end{cases}$$

2つの fiber structure $X \to W$, $X' \to W'$ が、同型であるとは、X, X' の間に fiber 構造と compatible な同型があること:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & X' \\ \varphi \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \varphi' \\ W & \xrightarrow{\sim} & W' \end{array}$$

同じ、とは、一つの X に対して、W の方に fiber 構造と compatible な同型があること:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \varphi \swarrow & \circlearrowright & \searrow \varphi' \\ W & \xrightarrow[\sim]{} & W' \end{array}$$

例. $V = \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1 \supset (4,2) = X$: Calabi-Yau 3-fold とする。2nd projection $p_2 : X \to \mathbb{P}^1$ の general fiber は K3 曲面。

§1 Calabi-Yau 3-fold in Fano 4-fold

より一般に、V: smooth Fano 4-fold ($-K_V$: ample)、$X \in |-K_V|$: smooth member とする。このとき X は Calabi-Yau threefold となり次が成り立つ。

Theorem([17]).

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(V)_{\mathbb{R}} & \xrightarrow[\iota^*]{\sim} & \mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{R}} \\ \cup & & \cup \\ \overline{\mathrm{Amp}}(V) & \xrightarrow[\iota^*]{\sim} & \overline{\mathrm{Amp}}(X) \end{array}$$

したがって、$\overline{\mathrm{Amp}}(V)$ のもつ次の性質は $\overline{\mathrm{Amp}}(X)$ の性質に遺伝する:

1) *finite rational polyhedral,*
2) $\forall$ *nef, rational* $\Rightarrow$ *semi-ample.*

Geometric conclusion.

3) X に付随する *contraction* は有限個,
4) $\mathrm{Aut}(X)$ は *finite* ([35]),
5) $c_2(X)$ を $\mathrm{Pic}(X) \ni D \mapsto D.c_2(X) \in \mathbb{Z}$ としたとき $c_2(X) > 0$ ([25]).

ここで次のことに注意しておく。

Theorem. X を K_X が *nef な smooth projective 3-fold とするとき、*

(1) $c_2(X) \geq 0$ *on* $\overline{\mathrm{Amp}}(X) \setminus \{0\}$ ([34]).

(2) $c_1(X) \equiv 0$ & $c_2(X) \equiv 0 \Rightarrow X$ は *Abelian 3-fold の étale quotient,* 特に $\pi_1(X) \neq \{1\}$ ([16]).

これら 1)–5) の性質が一般にどの程度成り立つか考えたい。

§2 Calabi-Yau 3-fold with $c_2(X) > 0$

$c_2(X) > 0$ とは、$c_2(X) > 0$ on $\overline{\mathrm{Amp}}(X) \setminus \{0\}$ ということ。

Theorem. この仮定の下で

(1) $\mathrm{Aut}(X)$ は *finite* ([35])。

(2) *fiber space* $f\colon X \to W$ は有限個 ([25])。

(3) *for* $D^3 > 0$ (例えば[31]) ; *for* $D^3 = 0$, $D^2 \not\equiv 0$ ([28]) ; *for* $D^2 \equiv 0$ ([19]) , $\forall D$ *nef* $\Rightarrow D$*: semi-ample.*

Question[35]. $\overline{\mathrm{Amp}}(X)$: finite rational polyhedral?

Theorem の (2),(3) は少し一般的にしても OK([25]):一般に、$D \in \overline{\mathrm{Amp}}(X)$ $\forall \epsilon > 0$, H: ample としたとき、

(2)' $c_2(X).D \geq \epsilon H^2.D \Rightarrow$ fiber space $\Phi_{|D|} : X \to W$ は有限個,

(3)' D: nef, $D.c_2(X) > 0 \Rightarrow D$: semi-ample.

Remark. K3-fibration $\Phi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^1$ を無数にもつ例がある ([19])。ここで、

$$\mathbb{R}_+ D \subset (\overline{\mathrm{Amp}}(X) \cap \mathrm{Sing}(W(X))(\mathbb{Q}) \cap \{c_2(X) > 0\}$$

と K3-fibration は 1:1 に対応する。ただし、$W(X) := \{x^3 = 0\}$: cubic cone.

$D^3 \equiv 0$, $(D + tH)^3 = 0 \Rightarrow t = 0$ は重解。従って、K3 fibrations が無数にあるとき、$\overline{\mathrm{Amp}}(X)$ 内に含まれる $W(X)$ の singular rational ray 達は、不思議なことに $c_2(X) = 0$ に向かって accumurate する。

§3 $c_2(X) = 0$ fibration

$\Phi = \Phi_{|D|} : X \to W$, $D.c_2(X) = 0$ とする。(最後の条件は $\Phi = \Phi_{|D|}$ となる D の選びかたによらない。)

Classification Theorem([19][20][21][22][26]). $\dim W = 3$ のとき、次のどちらかに同型である。

(1) $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{3})$, $E_\zeta = \mathbb{C}(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta)$ として、

$$\begin{array}{ccc} X_3 & \xrightarrow{\text{crepant resolution}} & \bar{X}_3 = E_\zeta^3 / \left\langle \begin{pmatrix} \zeta & & 0 \\ & \zeta & \\ 0 & & \zeta \end{pmatrix} \right\rangle \\ \cup & & \Psi \\ \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \frac{1}{3}(1,1,1) \text{ 特異点 } (27\text{点}) \end{array}$$

このとき、$\chi_{top(X)} = 72$, $h^{1,1}(X) = 36$, $h^{2,1}(X) = 0$: *rigid* である。

(2) $C = \{X_0^3 X_1 + X_1^3 X_2 + X_2^3 X_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$: *Klein の 4 次曲線,*

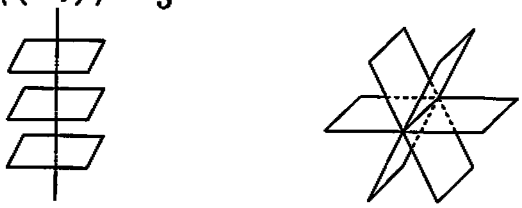
$g_7([X_0 : X_1 : X_2]) = [\zeta_7 X_0 : \zeta_7^2 X_1 : \zeta_7^4 X_2]$ とすると、g_7 は *order* 7 であり、*Gorenstein* に $A_7 = Jac(C)$ にも作用する。

$$\begin{array}{ccc} X_7 & \overset{\text{crepant resolution}}{\longrightarrow} & A_7/\langle g_7 \rangle = \bar{X}_7 \\ \cup & & \Downarrow \\ F_2 & \longrightarrow & \frac{1}{7}(1,2,4) \text{ 特異点 (7点)} \end{array}$$

このとき、$\chi_{top(X)} = 48$, $h^{1,1}(X) = 24$, $h^{2,1}(X) = 0$: *rigid* である。

$\dim W = 2$ のとき：次のどちらかに同型である：

(1) $X_3 \to \bar{X}_3 \xrightarrow{p_{12}} E_\zeta^2 / \left\langle \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \right\rangle \ni \dfrac{1}{3}(1,1)$ 又はその *flop*。



(2) S : *K3 with RDP*, E : *elliptic curve*, $G = G_N \ltimes \langle g \rangle$, $I := \operatorname{ord} g = 2, 3, 4$ *or* 6, g は S, E に作用。

$$g^* \omega_S = \zeta_I^{-1} \omega_S, \ S^{[G]} : \textit{finite}, \ g^* \omega_E = \zeta_I \omega_E.$$

$G_N \ni h$: *form* を保つ作用 $(S, E$ 上それぞれ *faithful*).

$X \overset{\text{crepant resolution}}{\longrightarrow} \bar{X} = (S \times E)/G \to S/G$, 又はその *flop* ($S/G$ の特異点上の *fiber* でのみ).

(2) の様子は次の通り：

$$\begin{array}{ccccc} \bar{X} = (S \times E)/G & \longleftarrow & (S \times E)/G_N & \longleftarrow & S \times E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S/G = (S/G_N)/\langle g \rangle & \xleftarrow[\text{canonical cover}]{\text{base:}} & S/G_N & \longleftarrow & S \end{array}$$

$\dim W = 1$ のとき $\Leftrightarrow$ *abelian fibration.*

Remark. この結果、もし X が 2 つ以上 abelian fibration をもてば、abelian 3-fold の quotient または K3× elliptic の quotient に birational とわかる。

これを応用して、

Theorem([24]). X を *fix* したとき、$\{(c_2(X) = 0)\text{-}\textit{fibration}\}/\textit{isom}$ は *finite*。
特に X の *abelian fibration* は *up to isomorphism* で有限個しかない。

Remark ([19]). ∞ 個 abelian fibration をもつものはある。

3) Rational curves on Calabi-Yau 3-fold

ここでは X は $K_X = 0$, $\pi_1(X) = \{1\}$ を満たすとする (単連結を使う)。
2 つの conjectures がある。

I. X: Calabi-Yau 3-fold $\Rightarrow \exists C \subset X$ rational curve.

Remark. $h^1(\mathcal{O}_X)=0$ にするとウソ。Abelian 3-fold の étale quotient で $h^1(X)=0$, $K=0$ になるものがある (いわゆる井草の例[64])。

帰結 *([44]).* Conjecture が正しい ⇒ ∃ holomorphic nonconstant map $f:\mathbb{C}\to V$ (V : projective 3-fold) if $K_V\neq$ ample (Kobayashi Conjecture).

使うこと : 3 次元 MMP 及び abundance Theorem と次の事実 : K3 なら rational curve を含む ([48]), Bogomolov decomposition。

II. Clemens' conjecture(例えば[40][46][50]). X を $\mathbb{P}^n$ の complete intersection となる Calabi-Yau 3-fold, すなわち

$$(5)\subset\mathbb{P}^4,\ (2)\cap(4)\subset\mathbb{P}^5,\ (3)\cap(3)\subset\mathbb{P}^5,\ (2)\cap(2)\cap(3)\subset\mathbb{P}^6,\ (2)\cap(2)\cap(2)\cap(2)\subset\mathbb{P}^7$$

とする。この各々の type について、X を generic にとれば、次が成立 :

(1) (Existence) $\forall d\in\mathbb{Z}_{>0}$ $X\supset\exists C_d\cong\mathbb{P}^1$, $\deg C_d=d$, $N_{C_d/X}=\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}$.
(2) (Finiteness: 強い形) X 内の $\forall\deg=d$ の有理曲線は非特異でかつ (1) の normal bundle の条件を満たし、有限個である。しかもこれらは互いに disjoint.
(3) (Finiteness: 弱い形) X 内の $\deg=d$ の非特異有理曲線は有限個である。

ここでは (1)(3) について述べる。(2) についてはわかっていない。

Existence について

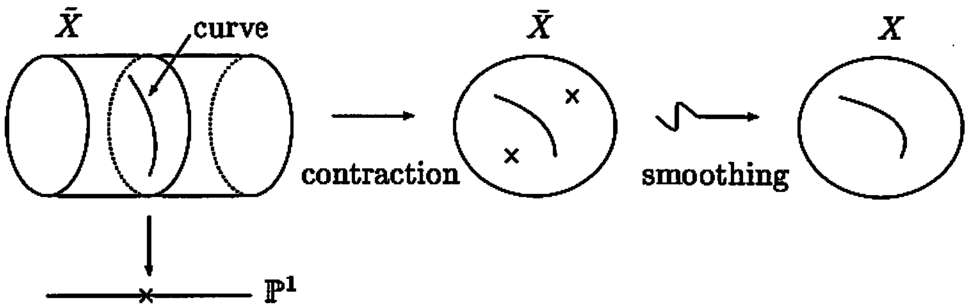
Theorem([36][37][40][43]). *(1) は OK.*

(1) $(5)\subset\mathbb{P}^4$ の場合 ([36], [40]) : 4 次 K3 で与えられた次数の非特異有理曲線を含むものが存在することを使う。
(2) $(2)\cap(4)\subset\mathbb{P}^5$ の場合 ([43]) : K3 の period map と global Torelli の定理を用いる。
(3) 一般の場合。より強くは、$\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^1$ の中の complete intersection で表される Calabi-Yau 3-fold について OK([37])。

Key idea. K3-fibration を考える。

$\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ の中に $\bar{X}$ を作る。$0\in\mathbb{P}^1$ 上の fiber (smooth K3) 内に、$\deg=(d,0)$ の $(-1,-1)$-curve で、infinitesimally rigid なものをうまく見つける。

この contraction をすると singular な $\bar{X}$ で、$\mathbb{P}^n$ の complete intersection であり、$\deg=k$ の $(-1,-1)$-curve をもつ stable manifold に移る。$\bar{X}$ の smoothing X の中に求める曲線が見つかる。



そのために、K3 の period map, Torelli 型定理を用いて、 非特異有理曲線 C ($\deg C=d$) を含む K3 曲面 $S\subset\mathbb{P}^3$ を抽象的に構成し、これが $0\in\mathbb{P}^1$ 上の fiber になるように $\bar{X}$ の式を作る。

この段階では C の $\tilde{X}$ 内での normal bundle が $(-1,-1)$ かどうかわからない。この条件を満たすようにするために、

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \supset & \tilde{X}_A & \supset & S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \supset & \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t]/(t^3)=A & \ni & 0 \end{array}$$

の period をみる。Period domain は：

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \{[\omega] \mid (\omega,\omega)=0, (\omega,\bar{\omega})>0\} \\ &\supset \mathcal{D}_0 := \{[H].[\omega]=0\} : 19 \text{ 次元 smooth} \\ &\supset \mathcal{D}_1 := \{[H].[\omega]=0, [C].[\omega]=0\} : 18 \text{ 次元, rational curve が生き残る方向} \end{aligned}$$

そこで、period map の像が $\mathcal{D}_1$ からはみでるように式を調節する。$\tilde{X}$ から $\bar{X}$ を作り、$\bar{X}$ を smoothing することで存在を証明するこの方法は、contraction と smoothing で Calabi-Yau をつなげる、という Reid の夢 ([63]) の、小さい version にもなっている。

具体的に $\tilde{X} \to \bar{X} \rightsquigarrow X$ の process を $(5) \subset \mathbb{P}^4$ の場合に説明する。まず small resolution

$$\bar{X} = (5) \subset \mathbb{P}^4 \longleftarrow \tilde{X} = (4,1) \cap (1,1) \subset \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^1.$$

をとる。物理学者に習って、$\tilde{X}$ を $\left(\begin{array}{c\|cc} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ のようにも書くことにする。$\mathbb{P}^4$ の座標を $\bar{x}_4 := [x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$, $\mathbb{P}^1$ の座標を $[y:z]$ とし、$\bar{x}_3 = [x_0 : \cdots : x_3]$ とおく。$\tilde{X}$ は次で定義される：

$$\begin{pmatrix} q_0(\bar{x}_3) + x_4 c_1(\bar{x}_4) & q_1(\bar{x}_4) \\ x_4 & l_1(\bar{x}_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ここで、q_0 : 4 次、c_1 : 3 次, $S = \{q_0(x_3) = 0\} \subset \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$. determinant を取ると、

$$\bar{X} = \{l_1(\bar{x}_4)(q_0(\bar{x}_3) + x_4 c_1(\bar{x}_4)) - x_4 q_1(x_4) = 0\}$$

が 5 次超曲面になる。この smoothing で条件をみたす X が得られる。同様に、

$$(3) \cap (3) \subset \mathbb{P}^5 \longleftarrow \left(\begin{array}{c\|ccc} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(2) \cap (4) \subset \mathbb{P}^5 \longleftarrow \left(\begin{array}{c\|ccc} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

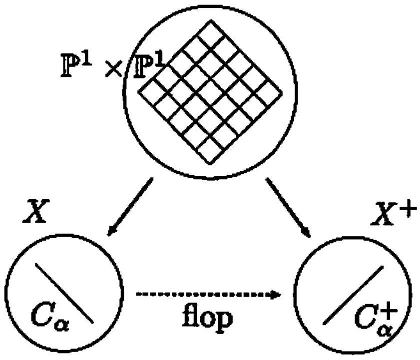
$$(2) \cap (2) \cap (3) \subset \mathbb{P}^6 \longleftarrow \left(\begin{array}{c\|cccc} 6 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(2) \cap (2) \cap (2) \cap (2) \subset \mathbb{P}^7 \longleftarrow \left(\begin{array}{c\|ccccc} 7 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

determinant は下段 ($\mathbb{P}^1$) の次数に 1 が入っている 2 列で取る。

存在結果の応用 (AFTER FRIEDMAN, [43][54])

$X = (2)\cap(4) \subset \mathbb{P}^5$: generic $\Rightarrow X \supset \exists C_\alpha = \mathbb{P}^1$, $N = (-1,-1) \quad \forall\alpha \geq 1$. これで flop したものを X^+ とする。



X^+ は nonprojective Moishezon, $H^2(X^+,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}H^+$. $(H^+)^3 = 8 - d^3$ なので、$d=2$ の時 $(H^+)^3 = 0$ になる。

従って $(X^+)_{top} \not\approx$ (Kähler 3-fold)$_{top}$、つまり $(X^+)_{top}$ はどんな Kähler 3-fold の下部位相構造にもなりえない。

FINITENESS について

Theorem([39][40]). *(3) は次で成立：*

	(5)	(2) ∩ (4)	(3) ∩ (3)	(2) ∩ (2) ∩ (3)	(2) ∩ (2) ∩ (2) ∩ (2)
d	≤ 7	≤ 4	≤ 5	≤ 4	≤ 4

Katz([40]) が (5) に対して, Huybrecht([39]) が一般の場合に示した。

d は (最小次数)+2 である。その理由は、現存する証明は次の曲線の定理に帰着することで成されているから：

Theorem(Castelnuovo, [38]). $C \subset \mathbb{P}^n$ 既約かつ *smooth* な曲線で $\deg C = d$ とする。このとき、

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(a)) \quad \text{if } a+2 \geq d.$$

Finiteness の証明に戻る。(5) $\subset \mathbb{P}^4$ の場合に説明する.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{X}_5 = \{(p,[F]) | F(p) = 0\} \subset \mathbb{P}^4 \times \mathcal{P}_5 \\ & & \downarrow p_2 \\ \cup H_i \subset Hilb^{dm+1}_{\mathcal{X}_5/\mathcal{P}_5} & \longrightarrow & \mathcal{P}_5 = \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(5))) \setminus \mathcal{B} \end{array}$$

H_i: 非特異有理曲線を含む既約成分。

有限 $\Leftrightarrow h_i \colon H_i \to \mathcal{P}_5$ は generically finite for $\forall i$

$\Leftarrow$ (dominant する H_i について $(C \subset X) \subset H_i$ general $\Rightarrow N_{C/X} = (-1,-1)$)

有限 $\Rightarrow$ general な X に対して 個数 $= \sum \deg h_i =$ 一定。

Remark. 従って、enumeraticve problem は意味がある。

FINITENESS (HUYBRECHT[39] の方法)

$\mathbb{P}^1 \cong C \subset X$, $N_{C/X} = (-1,-1) \Leftrightarrow H^1(T_X|_C) = 0$ である。

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & I_C \otimes T_X \arrow[d] & & \\
 & & T_X \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & & \\
0 \arrow[r] & T_C \arrow[r] & T_X|_C \arrow[r] \arrow[d] & N_{C/X} \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

より、

$$H^1(T_X|_C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{res: } H^1(T_X) \to H^1(T_X|C) \\ \text{(1)zero-map} \\ \text{(2)surjective} \end{cases}$$

(1) については、$\mathcal{X} \to \mathcal{P}$: complete projective family で $(C \subset X) \in H_i$ general ならばいつでも OK(complete とは完備族の意味) :

$$T_{\mathcal{P}(X)} \twoheadrightarrow H^1(T_X) \text{ for } (C \subset X) \in H_i : \text{general}$$

ただし、(2) については、$(C \subset X)$ general は用いないかわりに Theorem を用いる。ここで degree の条件が (今のところ) 必要になる。

$$H^1(T_X) \twoheadrightarrow H^1(T_X|_C) \Longleftrightarrow H^2(I_C \otimes T_X) \hookrightarrow H^2(T_X)$$

$\Leftrightarrow$ 次の可換図式の β が injective。

$$\begin{tikzcd}
H^1(I_C(5)) \arrow[r] & H^2(I_C \otimes T_X) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & H^2(I_C \otimes T_{\mathbb{P}^n}|_X) \arrow[d, "\wr"'] \\
 & H^2(T_X) \arrow[r, "\sim"] & H^2(T_{\mathbb{P}^n}|_X)
\end{tikzcd} .$$

β が injective になるための 1 つの十分条件は $H^1(I_C(5)) = 0$ である。(ここで妥協する。)

When $H^1(I_C(5)) = 0$?

$H^1(I_C(5)) = 0$

$\Leftrightarrow res: H^0(\mathcal{O}_X(5) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(5))$

by $H^0(\mathcal{O}_X(5)) \to H^0(\mathcal{O}_C(5)) \to H^1(I_C(5)) \to H^1(\mathcal{O}_X(5)) = 0$

$\Leftrightarrow res: H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(5) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(5))$

by $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(5)) \to H^0(\mathcal{O}_C(5)) \to H^1(I_C(5)) \to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^\cdot}(5)) = 0$

故に Theorem より $7 = 5 + 2 \geq d$ なら finite が従う。

REFERENCES

1) Polarized Calabi-Yau 3-folds

1. Ein, Lawrence and Lazarsfeld, Robert, *Global generation of pluricanonical and adjoint linear series on smooth projective threefolds.* J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 875–903.

2. Fujita, Takao, Classification Theories of Polarized Varieties. London Math. Soc. LNS **155** (1990).

3. Fujita, Takao, *Remarks on Ein-Lazarsfeld criterion of spannedness of adjoint bundles of polarized threefold.* preprint.

4. Gallego, F. J. and Purnaprajna, B. P., *Very ampleness and higher syzygies for algebraic surfaces and Calabi-Yau threefolds.* alg-geom/9703036.

5. Green, Mark L., *The canonical ring of a variety of general type.* Duke Math. **49** (1982), no. 4, 1087–1113.

6. Green, Mark L., *Koszul cohomology and geometry.* in: Lectures on Riemann Surfaces, World Scientific Press (1989) 177–200.

7. Kawamata, Yujiro, *On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds.* Math. Ann. **308** (1997) 491–505.

8. Lazarsfeld, Robert, *A sampling of vector bundle techniques in the study of linear series.* in : Lectures on Riemann Surfaces, World Scientific Press (1989) 500–559.

9. Mumford, David, *Varieties defined by quadratic equation.* in: Questions on algebraic varieties, C. I. M. E., III Ciclo, Varenna 1969, Edizioni Cremonese, Rome (1970) 29–100.

10. Oguiso, Keiji, *On polarized Calabi-Yau 3-folds.* J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo Sect. IA, Math. **38** (1991) 395–429.

11. Oguiso, Keiji and Peternell, Thomas, *On polarized canonical Calabi-Yau three-folds.* Math. Ann. **301** (1995), no. 2, 237–248.

12. Reid, Miles, *Infinitesimal view of extending a hyperplane section — deformation theory and computer algebra.* in: Lect. Notes in Math. **1417**, Springer-Verlag, (1990) 214–286.

13. Saint-Donat, B., *Projective models of $K-3$ surfaces.* Amer. J. Math. **96** (1974), no. 4, 602–639.

2) Fibered Calabi-Yau 3-folds

14. Borcea, Ciprian, *On desingularized Horrocks-Mumford quintics.* J. reine angew. Math. **421** (1991) 23–41.

15. Kawamata, Yujiro, *On the cone of divisors of Calabi-Yau fiber spaces.* Internat. J. Math. **8** (1997), 665–687.

16. Kobayashi, Shoshichi : Differential Geometry of Complex Vector Bundle. Iwanami Shoten, Princeton University Press (1987).

17. Kollár, Janos, appendix of the paper : Borcea, Ciprian, *Homogeneous vector bundles and families of Calabi-Yau threefolds II.* in: Proc. Symp. Pure Math. **52** (Part II) (1991) 83–91.

18. Morrison, David R., *Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry.* Astérisque **218** (1993) 243–271.

19. Oguiso, Keiji, *On algebraic fiber space structures on a Calabi-Yau 3-fold.* With an appendix by Noboru Nakayama. Internat. J. Math. **4** (1993), no. 3, 439–465.

20. Oguiso, Keiji, *On the complete classification of Calabi-Yau threefolds of Type* III_0. in : Proceedings of International Conference in Trento 1994, de Guyter (1996) 329–340.

21. Oguiso, Keiji, *On certain rigid fibered Calabi-Yau threefolds.* Math. Z. **221** (1996), no. 3, 437–448.

22. Oguiso, Keiji, *Calabi-Yau threefolds of quasi-product type.* Doc. Math. **1** (1996), no. 18, 417–447 (electronic).

23. Oguiso, Keiji, *A note on moderate abelian fibrations.* Contemporary Math. **207** (1997) 101–118.

24. Oguiso, Keiji, *An equivariant Torelli Theorem for K3 surfaces with finite group actions and its application to fibered Calabi-Yau threefolds.* Institut Mittag-Leffler preprint (1997).

25. Oguiso, Keiji and Peternell, Thomas, *Calabi-Yau threefolds with positive second Chern class.* to appear in Comm. in Analysis and Geometry.

26. Shepherd-Barron, N. I. and Wilson, P. M. H., *Singular threefolds with numerically trivial first and second Chern classes.* J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 2, 265–281.

27. Sterk, Hans, *Finiteness results for algebraic K3 surfaces.* Math. Z. **189** (1985) 507–513.

28. Wilson, P. M. H., *Calabi-Yau manifolds with large Picard number.* Invent. Math. **98** (1989) 139–155.

29. Wilson, P. M. H., *The existence of elliptic fibre space structures on Calabi-Yau threefolds.* Math. Ann. **300** (1994), no. 4, 693–703.

30. Wilson, P. M. H., *The existence of elliptic fibre space structures on Calabi-Yau threefolds II.* preprint (1996).

(log MMP の generality)

31. Kawamata, Yujiro, 極小モデル理論の最近の発展について. 数学 **45** (1993), no. 4, 330–345.

(Elliptically fibered 3-folds の generality)

32. Kawamata, Yujiro, *Kodaira dimension of certain algebraic fiber spaces.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA **30** (1983) 1–24.

33. Nakayama, Noboru, *On Weierstrass model.* in: Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Masayoshi Nagata, Kinokuniya, Tokyo (1988) 405–431.

(c_2 の果たす役割についての generality)

34. Miyaoka, Yoichi, *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety.* in: Adv. Stud. Pure Math. **10**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam (1987) 449–476.

35. Wilson, P. M. H., *The role of c_2 in Calabi-Yau classification – a preliminary survey.* in : Mirror Symmetry II, AMS/IP Studies in Advanced Math. (1997) 381–392.

3) Rational curves on Calabi-Yau 3-folds

36. Clemens, Herbert, *Homological equivalence, modulo algebraic equivalence, is not finitely generated.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1983, No. **58**, 19–38 (1984).

37. Ekedahl, Torsten; Johnsen, Trygve and Sommervoll, Dag Einar, *Isolated rational curves on K3-fibered Calabi-Yau threefolds.* alg-geom/9710010.

38. Gruson, L.; Lazarsfeld, R. and Peskine, C., *On a theorem of Castelnuovo and the equation defining space curves.* Invent. Math. **72** (1983), no. 3, 491–506.

39. Huybrechts, D., *A note on the finiteness of smooth rational curves on Calabi-Yau threefolds.* preprint (1993).

40. Katz, Sheldon, *On finiteness of rational curves on quintic threefolds.* Compositio Math. **60** (1986), no. 2, 151–162.

41. Mori, Shigefumi, *On degrees and genera of curvces on smooth quartic surfaces in* $\mathbf{P}^3$. Nagoya J. Math. **96** (1984) 127–132.

42. Nijsse, Peter G. J., *Clemens' conjecture for octic and nonic curves.* Indag. Math. N.S. **6** (1995), no. 2, 213–221.

43. Oguiso, Keiji, *Two remarks on Calabi-Yau Moishezon threefolds.* J. Reine-Angew. Math. **452** (1994), 153–161.

44. Peternell, Thomas, *Calabi-Yau manifolds and a conjecture of Kobayashi.* Math. Z. **207** (1991) 305–318.

4) Generalities on rational curves

45. Heath-Brown, D. R. and Wilson, P. M. H., *Calabi-Yau threefolds with* $\rho > 13$. Math. Ann. **294** (1992) 49–57.

46. Katz, Sheldon H., *Rational curves on Calabi-Yau threefolds.* in: Essays on mirror manifolds, 168–180, Internat. Press, Hong Kong, 1992, alg-geom/9202001, alg-geom/9312009.

47. Kawamata, Yujiro, *On the length of an extremal rational curve.* Invent. Math. **105** (1991) 609–611.

48. Mori, Shigefumi and Mukai, Shigeru, *The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11.* in: LNM **1016** (1982) 334–353, Springer-Verlag.

49. Oguiso, Keiji, *On algebraic fiber space structures on a Calabi-Yau 3-fold.* Intern. J. Math. **4** (1993) 439–465.

50. Piene, Ragni, *On the enumeration of algebraic curves – from circles to instantons.* in: First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 327–353, Progr. Math. **120**, Birkhäuser, Baser (1994).

51. Wilson, P. M. H., *Calabi-Yau manifolds with large Picard number.* Invent. Math. **98** (1989) 139–155.

5) Others

52. Dais, Dimitrios I., *Enumerative combinatorics of invariants of certain complex threefolds with trivial canonical bundle.* Bonner Mathematische Schriften, **279**, Universitat Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, 1995, ii+117pp.

53. Ellingsrud, Geir and Strømme, Stein Arild, *The number of twisted cubic curves on the general quintic threefolds.* Math. Scand. **76** (1995), no. 1, 5–34.

54. Friedman, Robert, *On threefolds with trivial canonical bundle.* Proc. Symp. Pure Math. **53** (1991) 103–134.

55. Katz, Sheldon H., *Lines on complete intersection threefolds with $K = 0$.* Math. Z. **191** (1986), no. 2, 293–296.

56. Katz, Sheldon H., *Rational curves on Calabi-Yau manifolds: verifying predictions of mirror symmetry.* in: Projective geometry with applications, 231–239, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **166**, Dekker, New York, 1994, alg-geom/9301006.

57. Katz, Sheldon H., *Gromov-Witten Invariants via Algebraic Geometry.* hep-th/9510218.

58. Kawamata, Yujiro, *On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K_X \equiv 0$.* Math. Ann. **275** (1986) 539–546.

59. Machida, Natsumi and Oguiso, Keiji, *On K3 surfaces admitting finite non-symplectic group actions.* preprint (1997), to appear in J. Math. Sci. Univ. of Tokyo.

60. Morrison, David R., *A remark on Kawamata's paper 'On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K_X \equiv 0$'.* Math. Ann. **275** (1986) 547–553.

61. Oguiso, Keiji, *A remark on the global indices of $\mathbb{Q}$-Calabi-Yau 3-folds.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **114** (1993), no. 3, 427–429.

62. Paranjape, Kapil H., *Curves on threefolds with trivial canonical bundle.* Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **101** (1991), no. 3, 199–213.

63. Reid, Miles, *The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible.* Math. Ann. **278** (1987) 329–334.

64. Ueno, Kenji: Classification Theory of Algebraic Varieties and Compact Complex Spaces. Lect. Notes in Math. **439**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1975).

CALABI-YAU 多様体の MODULI SPACE

川又 雄二郎

東京大学数理科学研究科

ここでは, Calabi-Yau 多様体とは, かなり一般的なものを対象とすることにする. smooth projective variety, $K \sim 0$ となることのみ仮定する (したがって Abelian variety を含む).

内容は以下の通り.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{complex structure の moduli space}\left\{\begin{array}{l}\text{local—unobstructed}\\ \text{global—period map}\end{array}\right. \\ \qquad \updownarrow \text{ mirror} \\ \text{complexified polarization の moduli (cone conjecture)}\end{array}\right.$$

polarization は Kähler class ではなく ample class のこととする.

また, maximal deegeneration における period space での monodromy と polatrization との mirror 対応や, quantum correction は, Griffiths, Schmid らの仕事の中に数学的にすでに現れていたという話をする.

1. Local deformation

Kodaira-Spencer theory[4].

X: compact complex manifold, M: X の underlying C^∞-manifold とし, M の complex structure を X の回りで動かすことを考える.

X の複素構造に対応する反正則微分を $\bar\partial_0$ として, その変形 $\bar\partial = \bar\partial_0 + \varphi(\bar\partial_0)$ ($\varphi = \varphi(t) : \bar T \to T$, $T = T_X$: 接束) は almost complex structure の変形を与える.

この almost complex structure が integrable

$$\Leftrightarrow \bar\partial\varphi + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = 0 \ [5].$$

この Kodaira-Spencer の微分方程式を解くことによって変形の半普遍族を得る.

注. $\varphi \in \Gamma(M, \bar T^* \otimes T)$ は vector valued $(0,1)$-form なので、$\bar\partial\varphi$ は vector valued $(0,2)$-form である. 一方、T のリー環の積と $\bar T^*$ の外積は共に反対称なので, $[\varphi, \varphi]$ は対称な積として vector valued $(0,2)$-form として定まった.

この方程式を逐次近似で解く:

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i t^i, \varphi_0 = 0$$

とおく. まず

$$\bar\partial\varphi_1 = 0$$

が得られ, 1 次の deformation の space= $H^1(X,T)$ となる. φ_1 が $\bar\partial$-coboundary なら Diff M からくる (無限次元だが, M の diffeo で割ると有限になるからである). $\frac{1}{2}[\varphi_1,\varphi_1]$ が定める $H^2(X,T)$ の元が 0 ならば

$$\bar\partial\varphi_2+\frac{1}{2}[\varphi_1,\varphi_1]=0$$

が解ける. 同様にして, φ_3 が存在するための obstruction として, φ_1, φ_2 から定まる $H^2(X,T)$ の元がある.

級数 φ の収束性は優級数の方法を用いて証明された.

(ex). X: complex torus の場合.

$$T_X\cong\mathcal{O}_X^{\oplus n},\ \dim H^1(X,T_X)=n^2,\ \dim H^2(X,T_X)=n\cdot\binom{n}{2}$$

であるから, obstruction の群 H^2 は nonzero であるが, 逐次近似すると, obstruction は全て 0 になることがわかる.

注. 小平先生の lecture note [4] によると, ほとんどの場合, $H^1(X,T)$ の次元が変形の次元と一致した. Mumford の例のように, obstruction を持つ例を作るのは難しい.

Schlessinger の formulation[10].

$$\begin{aligned}
&A: \text{ Artin local } \mathbb{C}\text{-algebra, } A/m_A\cong\mathbb{C},\\
&\mathcal{A}: \ A\text{ 全体のカテゴリー},\\
&\mathcal{D}:\mathcal{A}\to(Set),\ \text{covariant functor : `\textit{deformation functor}'}\\
\mathcal{D}(A) &:= \{(X_A,\phi) : \operatorname{Spec}A\text{ 上の }X\text{ の deformation }X_A\text{ と同型射}\\
&\quad \phi: X_A\underset{\operatorname{Spec}A}{\times}\operatorname{Spec}\mathbb{C}\cong X\text{ の組 }\}/isom.
\end{aligned}$$

ここで, 組の同型 $(X_A,\phi)\cong(X'_A,\phi')$ とは次の図式が存在することである :

$$X_A\underset{\psi}{\xrightarrow{\sim}}X'_A\quad\text{s.t.}\quad
\begin{array}{ccc}
X_A\times_{\operatorname{Spec}A}\operatorname{Spec}\mathbb{C} & \xrightarrow{\psi\times 1} & X'_A\times_{\operatorname{Spec}A}\operatorname{Spec}\mathbb{C}.\\
 & \phi\searrow\ \circlearrowleft\ \swarrow\phi' & \\
 & X &
\end{array}$$

$A=A_n:=\mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$ の場合を考えるということは, べき級数展開で n 次の項まで考えることに相当する.

$B=B_n:=\mathbb{C}[t,\epsilon]/(t^{n+1},\epsilon^2)$ とし,

$X_A\in\mathcal{D}(A)$, $\pi:X_A\to\operatorname{Spec}A$ とする.

T^1-space.

$T^1(X_A/A):=\{(Y,\psi)|Y:B$ 上の deformation, ψ: $Y\times_{\operatorname{Spec}B}\operatorname{Spec}A\cong X_A\}/\sim$

さっきの deformation functor の定義を少し延ばしたようなものである.

$n=0$ のとき, $T^1(X_A/A)=H^1(X,T_X)$,

n : 一般のとき, $T^1(X_A/A)=R^1\pi_*T_{X_A/A}$.

注. T^1 は deformation functor $\mathcal{D}$ からは定まらない. "deformation stack" からは定まる.

Theorem [1]. $\forall n \forall X_n \in \mathcal{D}(A_n)$, $X_{n-1} := X_n \times_{\mathrm{Spec}\, A_n} \mathrm{Spec}\, A_{n-1}$ とおくとき,
$T^1(X_n/A_n) \to T^1(X_{n-1}/A_{n-1})$ が *surjective ('T^1-lifting property')* $\Rightarrow$ *deformation* の *obstruction* は全部消える.

(ex). Calabi-Yau 多様体の場合, $R^1\pi_* T_{X_A/A} \cong R^1\pi_*\Omega^{n-1}_{X_A/A}$ である.
Hodge 理論により, base change theorem が成立することが知られている. 即ち, Hodge spectral sequence の relative version:

$$E_1^{p,q} = R^q\pi_*\Omega^p_{X_A/A} \Rightarrow R^{p+q}\pi_*(\pi^{-1}A) \cong H^{p+q}(X, \mathbb{C}) \otimes A$$

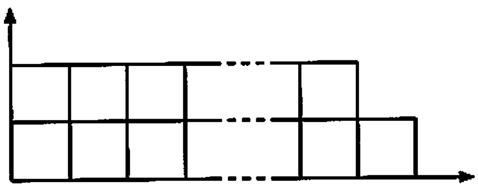
が degenerate するので $R^q\pi_*\Omega^p_{X_A/A}$ は全て locally free. ただし, $\pi^{-1}A$ は abelian group の sheaf としての pull back. 従って T^1-lifting が成立し obstruction は全部消える.

定理の証明.
$C_n = \mathbb{C}[t,\epsilon]/(t^{n+1}, t^n\epsilon, \epsilon^2)$ を導入する. キーは次の可換図式があること ('対角線論法').

$$\begin{array}{ccccccc} t & & \mathcal{D}(A_{n+1}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(A_n) & \longrightarrow & T^2 \otimes (t^{n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ t+\epsilon & & \mathcal{D}(B_n) & \longrightarrow & \mathcal{D}(C_n) & \longrightarrow & T^2 \otimes (t^n\epsilon) \end{array}$$

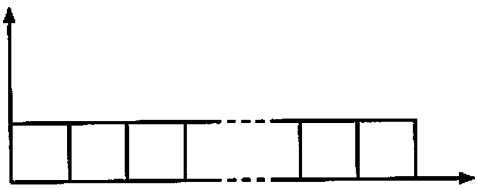
可換であることは C_n の定義とぴったり合う. 横方向は obstruction sequence で集合論的な完全系列である.
C_n というのがどんな空間かというと,

C_n :



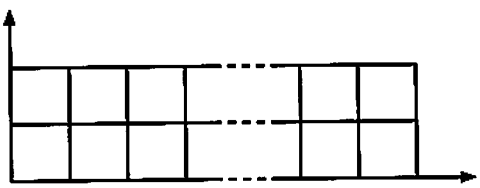
ただし、縦が ϵ^n の方向, 横が t^n の方向を表す. 各ますは, べき級数の係数 $\in \mathbb{C}$ が入る. $T^1(X_n/A_n)$ の元は,

A_n :



から

B_n :



へ延ばす仕方の全体である.

T^1-lifting property は $\mathcal{D}(B_n) \twoheadrightarrow \mathcal{D}(C_n)$ ということに他ならない．即ち，可換図式における下の行の左の写像が全射であること．下の行の完全性から右の写像は 0-map になる．ここで、標数 0 だから右の縦の写像は同型 ($t^{n+1} \in A_{n+1}$ の像が，$(n+1)t^n\epsilon \in B_n$ になるが，$n+1$ が 0 でないことを使った)．よって上の行の右の写像は 0，従って上の行の左の写像は全射で，べき級数が延びることが示された．

収束について．方程式 $\bar\partial\varphi + \frac{1}{2}[\varphi, \varphi] = 0$ の解の空間 $\{\varphi\}$ は ∞-次元 Banach analytic space である．これを Diff M で割ると Kuranishi space が得られるが，陰関数定理を使い Diff M の作用に対する slice(代表元) を作ることができるのである．(ただし，この slice は natural ではない)．

こうして local moduli space = Kuranishi space が存在することがわかった．その構造は無限小解析によって解析することができるのであった．

2. Global deformation

Global な deformation space の作り方として

(イ) Hilbert scheme $/G$
(ロ) period domain $/\Gamma$

の 2 種がある．

(イ)．Viehweg's Theorem [18]: かなり一般の variety で quasi-projective coarse moduli space が存在する．

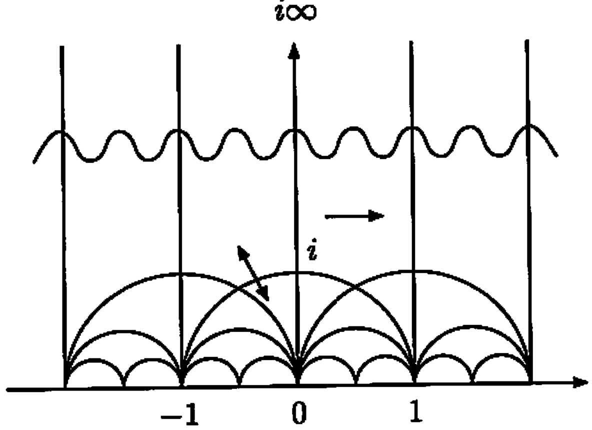
(ex)．Calabi-Yau の場合も OK．

しかし，Hilb というよく分からないものを群作用で割っていて，分かりにくい．

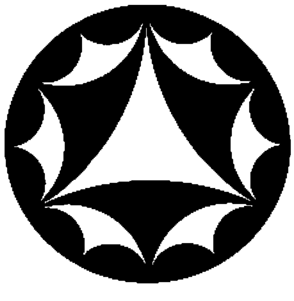
(ロ)．period domain で書けていると分かりやすい (例：K3 曲面のトレリの定理)．
この形で Calabi-Yau の moduli space を解析することは大問題である．

(ex)．elliptic curve の coarse moduli space は $\mathfrak{h}/SL_2(\mathbb{Z})$ ($\mathfrak{h}$: 上半平面) である．
$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ の生成元として次の 2 つがとれる：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} : z \mapsto z+1 \text{ (1 だけずらす)},$$
$$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} : z \mapsto \frac{-1}{z} \text{ (単位円の内部を外にうつす)}.$$



cf. Helsinki ICM のシンボルマーク



実軸上の任意の有理点は $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で無限遠点 $i\infty$ と同値である．また，実軸の近くを除いた領域 (図の波線の上) では，Γ の作用は平行移動のみとなり，abelian な作用になる．無限遠点として cusp を付け加えることで moduli $\mathfrak{h}/SL_2(\mathbb{Z})$ の compact 化として $\mathbb{P}^1$ が得られる．

これは高次元 $(=n)$ の (pricipally polarized) abelian variety でも同様である．

$$
\begin{aligned}
D &= \text{Siegel upper half space}\\
&= \{A+Bi \mid A,B\in S(n,\mathbb{R}), B \text{ は positive definite}\}
\end{aligned}
$$

ここで $S(n,\mathbb{R})$ は n 次実対称行列の空間．

$\Gamma = Sp(2n,\mathbb{Z})$ は semisimple であるが，やはり boundary component の周辺では abelian な群の作用になるので，$n=1$ の時と同じようにして D/Γ の toric compactification ができる．

boundary component の周辺で local に見る．*cf.* [13].

$$
\begin{aligned}
\bar{S} &:= \Delta^r = \{(z_1,\dots,z_r)\in\mathbb{C}|\ |z_j|<1\} : \text{polydisk},\\
S &:= (\Delta^*)^r = \{(z_1,\dots,z_r)\in\mathbb{C}^r | 0<|z_j|<1\}
\end{aligned}
$$

として，S 上の複素多様体の族 $f:\mathfrak{X}\to S$ と，そのコンパクト化した退化族 $\bar{f}:\bar{\mathfrak{X}}\to\bar{S}$ を考える．$z\in S$ に対して $H^n(X_z,\mathbb{Z})$ $(X_z=f^{-1}(z))$ は Hodge structure を持ち，S 上の variation of Hodge structures になっている．

$$
\begin{array}{ccl}
\bar{\mathfrak{X}} & \hookleftarrow & \mathfrak{X}\\
\downarrow & & \downarrow f : \text{smooth}\\
\bar{S} & \hookleftarrow & S
\end{array}
$$

$\pi_1(\bar{S}\setminus S)=\mathbb{Z}^r$ は abelian である．

仮定．z_j $(j=1,\dots,r)$ 軸の回りを回る local monodromy $T_j\in \mathrm{Aut}(H^n(X_{z_0},\mathbb{Z}))$ は unipotent(対角成分が 1 の上三角行列で表せる) とする．

注．T_j は一般には quasi unipotent であるが，何乗かすると unipotent になる．

$N_j:=\log T_j$ とする．N_j は nilpotent(対角成分が 0 の上三角行列で表せる) になる．

(1) nilpotent orbit theorem.

S 上では，multi-valued flat section による basis $e_1,\dots,e_h\in H^n(X_z,\mathbb{Z})$ $(e_k=e_k(z))$ が取れる．$e_1,\dots,e_h$ の多価性が monodromy 行列 T_j で表されるのである．

$$
\exp\left(-\sum_j \frac{\log z_j}{2\pi i}N_j\right) e_k
$$

は S 上の single valued holomorphic section による $H^n(X_z,\mathbb{Z})$ の basis になる．single valued であることを確かめるには $z=(1,1,\dots,1)$ で考えればよい：

$$
\exp(-N_j)T_je_k=e_k.
$$

e_k にかかっているものは, z の関数を entry とする行列の, 行列としての指数関数だが, N_j が nilpotent だから多項式になる. これらを base として拡張することにより, $\bar{S}$ 上への自然な延長:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{H} & = (R^n f_* \mathbb{Z}_{\mathfrak{X}}) \otimes \mathcal{O}_S & \subset \bar{\mathcal{H}} \\ \downarrow & & \quad \downarrow \\ S & & \subset \bar{S} \end{array}$$

ができる.

さて、Hodge filtration

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}^0 \supset \mathcal{F}^1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}^n \supset \{0\}$$

に対して, *limiting filtration* を

$$\mathcal{F}^{\cdot}_{lim} := \lim_{z \to 0} \left(\exp \left(-\sum_j \frac{\log z_j}{2\pi i} N_j \right) \mathcal{F}^{\cdot}(t) \right)$$

で定義する. あとで定義する weight filtration W と合わせると $(\bar{\mathcal{H}}_0, \mathcal{F}^{\cdot}_{lim}, W)$ は mixed Hodge structure (MHS) になる. $\bar{\mathcal{H}}$ の filtration

$$\mathcal{F}^{\cdot}_{nilp} := \exp \left(\sum_j \frac{\log z_j}{2\pi i} N_j \right) \mathcal{F}^{\cdot}_{lim}$$

を *nilpotent orbit* という. $\mathcal{F}^{\cdot}_{nilp}$ は座標系 z_j の取り方に依存するが, $\mathcal{F}^{\cdot}$ と $\mathcal{F}^{\cdot}_{nilp}$ は boundary で asymptotic になる. どんな座標系を取っても違いの部分が残る. これが quantum correction である ([14]). 次に, D を period domain (e.g. Siegel domain) として, period map を考える. $z = e^{2\pi i t}$ である.

$$\begin{array}{ccc} z \in S & \longrightarrow & D/\Gamma \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ t \in \tilde{S} = \mathfrak{h}^r & \rightarrow & D \end{array}$$

さて, t を無限遠に持っていったときに $\bar{D}$ の点に行くが、これが naive limit である。一般には $\mathcal{F}^{\cdot}_{lim}$ は $\bar{D}$ の外のこれとは異なった点に対応するが, nilpotent orbit をとると $\mathcal{F}^{\cdot}$ の良い近似の点に移る (*cf.* [15] *p.*72 に書いてある絵).

(2) SL_2-orbit theorem. $N = \sum_{j=1}^r a_j N_j$, $a_j > 0$ (何でも良い) に対し, weight filtration (increasing filtration で添え字が下に付く)

$$\mathcal{H} = W_{2n} \supset W_{2n-1} \supset \cdots \supset W_0 \supset \{0\}$$

が次の条件から unique に定まる:

$$NW_i \subset W_{i-2},$$
$$N^i : Gr^W_{i+n}\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} Gr^W_{-i+n}\mathcal{H}.$$

これと $\mathcal{F}_{lim}$ を合わせると MHS が作れる[17]. naive limit からは MHS は作れない.

ここで, なぜ SL_2 というかを説明する. $r=1$ のとき,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^* & \longrightarrow & D/\Gamma \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{h} & \longrightarrow & D \\ \uparrow & & \uparrow \\ SL_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & G_{\mathbb{R}} \end{array}$$

のように, period map の lift $\mathfrak{h} \to D$ が 群の写像に持ち上がるとき, このような period map を SL_2-orbit という. nilpotent orbit は SL_2-orbit と asymptotic になるのである.

写像 $\Delta \to \Delta^r, z \mapsto (z^{a_1}, \dots z^{a_r})$ に対応するモノドロミーは, 上の $N = \sum a_j N_j$ の形をしている.

一般に, SL_2 の作用がある vector space は簡単に分類されて, 既約表現 $\mathrm{Sym}^k\mathbb{C}^2$ の直和になる. よって filtration が定義できる. 例えば Hard Lefschetz theorem の場合, ample divisor (Kähler class) L に対して, 調和積分論によれば $H^*(X,\mathbb{C})$ の上の $c_1(L)$ をかけるという作用が $SL_2(\mathbb{Z})$ に拡張できる (L は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ に対応する). よって Lefschetz 分解ができる.

結論. ∞ での monodromy = Lefschetz operator.

Calabi-Yau 多様体の場合にはこの式の両辺は mirror で対応している. これを次節で説明しよう.

maximal degeneration(物理では *large complex structure limit*).

a_j を positive に取っておく限り, W は同じ (最も細かい)filtration になる. もし, a_j の中に 0 が幾つか入ると, filtration は粗くなる.

maximal degeneration とは, 次を満たすこと :

(1) $h = r$,
(2) $W_0 = W_1$ が 1 次元 (basis : g_0), W_2 が $(r+1)$ 次元 (basis : $g_0, \dots, g_r$),
(3) $N_j g_i = m_{ij} g_0$, $[m_{ij}]$ が invertible. 即ち, monodromy $N_1 \dots N_r$ の作用により W_2 が張られてしまう.

次の節でこの mirror 対応物を見る.

3. Complexified polarization

$N^1 = NS(X)_{\mathbb{R}} \supset \mathcal{A}(X)$: X の ample cone, $D := N^1(X) + i\mathcal{A}(X)$ とする.

maximal degeneration (large radius limit).

$N^1_{\mathbb{Z}}$ の basis で $e_1, \dots, e_r \in \mathcal{A}$ となるもの (framing) をとる. $\Sigma := \mathbb{R}_+ e_1 + \cdots + \mathbb{R}_+ e_r$: $e_1, \dots, e_r$ で張られた単体錐, とする。

∞ の近くでの D への群 Γ の作用は, $N^1_{\mathbb{Z}} = NS$ による translation に対応する. Γ の作用は global には semisimple だが, elliptic curve の moduli space の場合と同様に, local には後者のように unipotent になっている, と考える.

$S := \{(q_1,\dots,q_r)\in\mathbb{C}^n | 0<|q_i|<1\}$: 穴あき polydisk として次の同型がある.

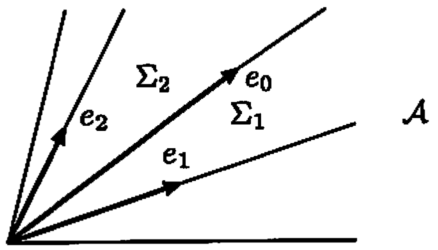
$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\sim} & (N^1(X)+i\Sigma)/N^1_{\mathbb{Z}} \quad \subset D/N^1_{\mathbb{Z}} \\ (q_1,\dots,q_r) & \longmapsto & \left\{\sum \frac{\log q_j}{2\pi i} e_j\right\} \end{array}$$

compact 化 $S\subset\bar{S}$ をとると, boundary $\bar{S}\setminus S$ は normal crossing divisor になり, それらの交点 $(0,0,\dots,0)$ が maximally degenerate point である.

これらの $\bar{S}$ たちを張り合わせて $\mathrm{Aut}(X)$ を含む大きな群で割ったものが toric compact 化されたモジュライ空間である.

boundary 上の点で $\bar{S}$ を blow up することは, basis $e_1,\dots,e_r$ の取り方の任意性に対応する.

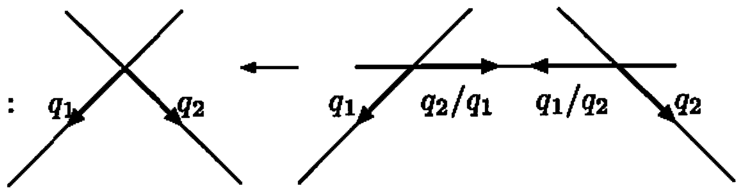
(ex). $r=2$ とする. 平面で $\mathcal{A}$ の中に e_1, e_2 をとる. $e_0=e_1+e_2$ というベクトルをとり, cone Σ が 2 つの cone Σ_1 (e_1 と e_0 の間) と Σ_2 (e_2 と e_0 の間) に分割されたとする.



$$\begin{aligned} & \frac{\log q_1}{2\pi i}e_1+\frac{\log q_2}{2\pi i}e_2\in N_1+i\Sigma \\ |q_2|<|q_1| \text{ ならば} \quad & =\frac{\log q_1}{2\pi i}e_0+\frac{\log(q_2/q_1)}{2\pi i}e_2\in N_1+\Sigma_2 \\ |q_1|<|q_2| \text{ ならば} \quad & =\frac{\log q_2}{2\pi i}e_0+\frac{\log(q_1/q_2)}{2\pi i}e_1\in N_1+\Sigma_1 \end{aligned}$$

local coordinate は, 元は (q_1,q_2) だったものが, blow up すると $(q_1,q_2/q_1)$ および $(q_1/q_2,q_2)$ となるから, blow up と cone の分割が対応する.

blow-up :



直線の交点が maximally degenerate point である.

framing の取り方, すなわちよい cone の分割 $\mathcal{A}=\bigcup_\lambda\Sigma_\lambda$ によって, よいモジュライの compact 化が得られる.

(ex). Siegel domain の時は Voronoi 分割を使う. cf. [16]

次に Morrison の cone conjecture を述べる[22][23].

Cone Conjecture. $\mathcal{A}_+ := Conv(\bar{\mathcal{A}}\cap H^2(X,\mathbb{Q}))$ (凸包) とおくと, $\exists\Pi\subset\mathcal{A}_+$: rational polyhedral cone s.t. $\mathrm{Aut}(X).\Pi=\mathcal{A}_+$.

Morrison は Kähler 錐を考えたので, さらに条件 $h^{2,0}\neq 0$ が必要になった.

(ex). $X = E^n$ (E : complex multiplication を持たない elliptic curve) のとき[21]. $\rho = \frac{1}{2}n(n+1)$ であり, 同型

$$\operatorname{im}\left(\operatorname{Aut}(X) \to GL(N^1, \mathbb{Z}) = GL(NS(X))\right) \cong GL(n, \mathbb{Z})$$

が存在する. さらに, 同型 $N^1(X) \xrightarrow{\sim} S(n, \mathbb{R})$ で, $\mathcal{A}$ を positive definite な行列全体にうつし, 上の同型で $\operatorname{Aut}(X)$ の作用と $GL(n, \mathbb{Z})$ の作用が compatible になるものが存在する：

$$\begin{array}{ccc}
\exists : N^1(X) & \xrightarrow{\sim} & S(n, \mathbb{R}) \\
\cup & & \cup \\
\mathcal{A} & \xrightarrow{\sim} & \{\text{positive definite}\} \\
\circlearrowleft & & \circlearrowleft \\
\operatorname{Aut}(X) & & GL(n, \mathbb{Z})
\end{array}$$

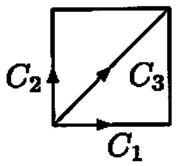
$Sp(2n, \mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ としたとき,

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ O & I_n \end{pmatrix} : NS(X) \text{ による translation}$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} : \operatorname{Aut}(X) \text{ の作用}$$

$$\begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix} : \ ?$$

$n = 2$ の場合, $E \times E$ 上には 3 つの曲線 C_1, C_2, C_3 が図のように取れる. 対応するクラスを e_1, e_2, e_3 とする. これらに対応する行列は：



$$e_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ e_3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

極小モデル理論によれば, 一般の多様体の $\mathcal{A}$ の構造について次のことがわかっている.

cone theorem によれば,

「$\mathcal{A}$ は $K + D \in N^1(X)$ から見ると locally rational polyhedral に見える.」

注. $K + D$ から見えないところについては何も言っていない. $K + D$ が nef ならば何も見えない. Calabi-Yau 多様体では $K = 0$ である.

ここで, $N^1(X)$ の中で次のいくつかの cone を定義する.

$\bar{\mathcal{B}}$: effective divisors で生成された closed convex cone,

$\mathcal{B} := \operatorname{Int} \bar{\mathcal{B}}$: big divisors で生成された open convex cone,

$\bar{\mathcal{M}}$: movable divisors (対応する linear system が fixed component を持たない) で生成された closed cone,

$\mathcal{M} := \operatorname{Int} \bar{\mathcal{M}}$,

$\mathcal{M}^e$: $\bar{\mathcal{M}}$ に入る effective divisors で生成された cone,

$\bar{\mathcal{A}}$: ample cone $\mathcal{A}$ の closure で, nef divisor で生成される,

$\mathcal{A}^e$: $\bar{\mathcal{A}}$ に入る effective divisors で生成された cone.

注.

$$\begin{array}{ccccccc} N^1(X) & \supset & \mathcal{B} & \supset & \mathcal{M} & \supset & \mathcal{A} \\ & & \text{big} & & \text{movable} & & \text{ample} \end{array}$$

Theorem. *X: Calabi-Yau* $\Rightarrow$

$$\bar{\mathcal{A}} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}^e \cap \mathcal{B} = \left\{ z \in \bar{\mathcal{A}}, z^n > 0 \right\}.$$

しかもこれは $\mathcal{B}$ の中で *locally rational polyhedral.*

最初の statement は, D が nef のときには「big $\Leftrightarrow$ $D^n > 0$」ということである. 但し, ここで D は $\mathbb{R}$-因子としてよいところが重要である.

$\mathcal{B}$ の内点 D をとると, ϵ を十分小さく取ると $(X, \epsilon D)$ は MMP の仮定を満たすので, $K + \epsilon D$ から見ると locally rational polyhedral, ということから 2 番目の statement が出る.

Marked minimal model. X_0: fixed minimal model とする。X をもう一つの minimal model とし, α: $X \dashrightarrow X_0$: birational map とするとき, 組 (X, α) を *marked minimal model* という.

$\alpha_*: N^1(X) \to N^1(X_0)$ は同型になる. $\mathcal{A}(X)$ の像を $\mathcal{A}(X, \alpha)$ と書く :

$$\begin{array}{rcl} \alpha_*: N^1(X) & \xrightarrow{\sim} & N^1(X_0) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{A}(X) & \rightarrow & \mathcal{A}(X, \alpha) \subset \mathcal{M}(X_0) \end{array}$$

$N^1(X_0)$ の中に, いろいろな cone $\mathcal{A}(X, \alpha)$ が入り, $\mathcal{M}(X_0)$ の分割が行われる.

Lemma. (X, α), (X', α') を *marked minimal models* とする.

(1) $\mathcal{A}(X, \alpha) \cap \mathcal{A}(X', \alpha') \neq \emptyset$ ならば, $\mathcal{A}(X, \alpha) = \mathcal{A}(X', \alpha')$ であり, 同型

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \circlearrowleft & X' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X_0 & \end{tikzcd}$$

が存在する.

(2) $\mathcal{A}(X, \alpha)$ と $\mathcal{A}(X', \alpha')$ が異なっているが面で接する $\Leftrightarrow$ X と X' の間に *flop*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \circlearrowleft & X' \arrow[dl, "\alpha'"] \\ & X_0 & \end{tikzcd}$$

が存在する.

同型でない birational automorphism もあるので, $\mathrm{Aut}(X_0)$ は $N^1(X)$ の中で $\mathcal{A}(X_0)$ を保つが, $\mathrm{Bir}(X_0)$ は $\mathcal{A}(X_0)$ を保たない.

Corollary. $\mathrm{Bir}(X_0)/\mathrm{Aut}(X_0)$ の元は次のような *chamber (cone)* と *1* 対 *1* に対応する : $\mathcal{A}(X, \alpha)$, $X \cong X_0$.

MMP は relative version への拡張ができる : base space B 上の極小モデル $X \to B$, $\mathcal{A}(X/B)$ などを考える. 任意の minimal model は, abundance conjecture を仮定すれば, その Iitaka fiber space が relative Calabi-Yau fiber space になる. 従って, cone conjecture の relative version から次の conjecture が従う.

Conjecture. 任意の与えられた variety の minimal models は up to isomorphism で有限個である.

Birational version of Morrison Conjecture.
$\mathcal{M}^e \supset \exists \Pi'$ rational polyhedral s.t. $\mathrm{Bir}(X).\Pi' = \mathcal{M}^e$.

注. $\mathrm{Aut}(X).\Pi = \mathcal{A}^e$ が biregular version である.

結果.

Theorem. $\dim X \leq 2$ ならば *Conjectures* は正しい.

Pjateckii-Shapiro-Shafarevich の global Torelli theorem [24] が証明のキーポイントである.

Theorem [21, Theorems 2.3, 2.6]. $\dim X = 3$, X*: minimal model,* $X \xrightarrow{f} S$ *: Iitaka fiber space* とする. $\kappa(X) = \dim S \geq 1$ ならば, *Conjectures* は正しい.

特に, $\kappa(X) \geq 1$ ならば X の minimal models は有限個である.
証明にはやはり 2 次元の結果を用いる. genuine な 3 次元 Calabi-Yau に対しては, Torelli の定理がなく, N^1 の Aut から本当の $\mathrm{Aut}(X)$ を構成できないので, 困難である.

4. Wilson の結果について

$h^{2,0} = 0$ の時は, $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ (Kähler cone) である. Wilson は Kähler cone は変形でほとんど動かないことを証明した.
ただし, elliptic ruled または quasi elliptic ruled surface を含む Calabi-Yau 3-fold に対しては, $\mathcal{K}$ は期待されるものに較べて小さくなる. complex moduli space 上で考えると, これらの特殊な Calabi-Yau 3-folds に対応する点はたかだか無限個の hypersurfaces の合併に含まれる.

References

1. local deformation

1. Kawamata, Yujiro, *Unobstructed deformations – a remark on a paper of Z. Ran.* J. Algebraic Geom. **1** (1992) 183–190.

2. Kawamata, Yujiro, *Unobstructed deformations. II.* J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 2, 277–279.

3. Kawamata, Yujiro, *Erratum on "Unobstructed deformations"*. J. Algebraic Geom. **6** (1997) 803–804.

4. 小平 邦彦, 複素多様体と複素構造の変形 I, II. 東大数学教室セミナリー・ノート **19** (1968), **31** (1974).

5. Newlander, August Jr. and Nirenberg, Louis, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds.* Ann. of Math. **65** (1957) 391–404.

6. Ran, Ziv, *Lifting of cohomology and unobstructedness of certain holomorphic maps.* Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **26** (1992) 113–117.

7. Ran, Ziv, *Deformations of manifolds with torsion or negative canonical bundle.* J. Algebraic Geom. 1 (1992) 279–291.

8. Ran, Ziv, *Hodge theory and the Hilbert scheme.* J. Differential Geom. **37** (1993), no. 1, 191–198.

9. Ran, Ziv, *Thickening Calabi-Yau moduli spaces.* AMS/IP Stud. Adv. Math., **1** (1997), alg-geom/9312003.

10. Schlessinger, Michael, *Functors on Artin rings.* Trans. AMS **130** (1968) 208–222.

11. Tian, Gang, *Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric.* in : Mathematical aspects of string theory (San Diego, CA 1986), 629–646, World Sci. Publishing, Singapore, 1987.

12. Todorov, Andrey N., *The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds.* Comm. Math. Phys. **126** (1989), no. 2, 325–346.

2. Global deformation

13. Ash, A., Mumford, D., Rapoport, M. and Thai, Y., *Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties*, Math Sci Press, 1975.

14. Deligne, Pierre, Local behavior of Hodge structures at infinity. in : Mirror Symmetry II (Greene, B. and Yau, S.-T. eds), Studies in Advanced Mathematics **1**, 683–699, AMS/IP, 1997.

15. Griffiths, Phillip ed.: Topics in Transcendental Algebraic Geometry, Princeton, Ann. Math. Studies, 1984.

16. Namikawa, Yukihiko, Toroidal Compactification of Siegel Spaces, Springer LNM **812**, 1980.

17. Schmid, Wilfried, *Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping*, Invent. Math. **22** (1973) 211–319.

18. Viehweg, Eckart, *Quasi-projective Moduli for Polarized Manifolds*, Springer, 1991.

3. Complexified polarization

19. Grassi, Antonella and Morrison, David R., *Automorphisms and the Kähler cone of certain Calabi-Yau manifolds.* Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 831–838, alg-geom/9212004.

20. Gross, Mark, *A finiteness theorem for elliptic Calabi-Yau threefolds.* Duke Math. J. **74** (1994), no. 2, 271–299.

21. Kawamata, Yujiro, *On the cone of divisors of Calabi-Yau fiber spaces.* Internat. J. Math. **8** (1997) no. 5, 665–687, alg-geom/9701006.

22. Morrison, David R., *Compactifications of moduli spaces inspired by mirror symmetry,* Astérisque **218** (1993), 243–271.

23. Morrison, David R., *Beyond the Kähler cone,* Proc. Hirzebruch 65 Conference, Bar-Ilan Univ., 1066, 361–376.

24. Pjateckiĭ-Šapiro, I. I. and Šafarevič, I. R., *A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3,* Math. USSR Izvestija **5** (1971) No. 3, English translation : Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **35** (1971) No. 3, 530–572.

4. Wilson の結果について

25. Heath-Brown, D. R. and Wilson, P. M. H., *Calabi-Yau threefolds with* $\rho > 13$. Math. Ann. **294** (1992), no. 1, 49–57.

26. Nikulin, Viacheslav V., *Diagram method for 3-folds and its application to Kähler cone and Picard number of Calabi-Yau 3-folds, I.* with Appendix by Shokurov, Vyacheslav V., *"Anticanonical boundedness for curves"*, alg-geom/9401010.

27. Wilson, P. M. H., *Calabi-Yau manifolds with large Picard number.* Invent. Math. **98** (1989) 139–155.

28. Wilson, P. M. H., *The Kähler cone on Calabi-Yau threefolds.* Invent. Math. **107** (1992), no. 3, 561–583.

29. Wilson, P. M. H., *Erratum: "The Kähler cone on Calabi-Yau threefolds".* Invent. Math. **114** (1993), no. 1, 231–233.

30. Wilson, P. M. H., *Elliptic ruled surfaces on Calabi-Yau threefolds.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **112** (1992), no. 1, 45–52.

31. Wilson, P. M. H., *Minimal models of Calabi-Yau threefolds.* Collection: Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992), 403–410 Contemp. Math., **162**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

32. Wilson, P. M. H., *Kähler classes on Calabi-Yau threefolds—an informal survey.* Collection: Essays on mirror manifolds, 265–278, Internat. Press, Hong Kong, 1992.

33. Wilson, P. M. H., *Symplectic deformations of Calabi-Yau threefolds.* alg-geom/9707007.

34. Wilson, P. M. H., *The role of* c_2 *in Calabi-Yau classification–a preliminary survey.* AMS/IP Stud. Adv. Math., **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

CALABI-YAU 多様体の退化と SMOOTHING、及びその応用

並河 良典

上智大学理工学部数学教室

PART I

この講演では、Y: Calabi-Yau 3-fold とは、normal projective 3-fold で、$K \sim 0$, $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$, rational Gorenstein singularity のみを持つもの、と定義する。

なぜ特異点を持ったものを扱うか？

smooth Calabi-Yau 3-fold Y には、C^∞-type, topological type の異なるものが、K3 曲面の場合と異なりたくさんある。これらを birational morphism と変形の組み合わせでつなげてみたい。すなわち, birational contraction $\pi : Y \to \bar{Y}$, $\bar{Y}$: 上のような singular Calabi-Yau とする。$\bar{Y}$ が smoothing(変形) できれば、smooth Calabi-Yau Y_t を得る。

このようにして、Calabi-Yau 3-fold の moduli たちがクモの巣のようにつながっている状況ができる。

問題. いつ Y は変形で smooth Calabi-Yau にできるか？

§1 Sing(Y) が孤立しているとき

Def(Y, P) で特異点における芽 (Y, P) の Kuranishi space を表す。

定理 1[11]. *Y: Calabi-Yau 3-fold with rational Gorenstein singularities,* Sing(Y) は孤立、とする。

(1) $\forall P \in Sing(Y)$, Def(Y, P) *: smooth* $\Rightarrow$ Def(Y) も *smooth*。

(2) より一般に,

$$\mathbb{T}^1_Y := \{Y \text{ の } 1 \text{次の無限小変形}\} = \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y),$$

$$T^1_{(Y,P)} := \{(Y,P) \text{ の } 1 \text{次の無限小変形}\} = \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y)_P,$$

$$\alpha \colon \mathbb{T}^1_Y \to \bigoplus_{P \in \mathrm{Sing}Y} T^1_{(Y,P)}, \quad k := \dim\ker(\alpha), \quad l := \dim \mathrm{Coker}(\alpha)$$

とおく。このとき、Def(Y) は、*set-theoretically* に次のように表せる。

$$\prod_{P \in \mathrm{Sing}(Y)} \mathrm{Def}(Y, P) \times (\mathbb{C}^k, 0) \hookleftarrow \{\exists l \text{ 個の方程式の零点}\} \overset{\text{set theoretic}}{=} \mathrm{Def}(Y)$$

1 次の無限小変形でかなりのことがわかることになる。

Proof. (1) を示す。$A_n = \mathbb{C}[t]/(t^{n+1})$ とする。

$$\begin{tikzcd}
T^1(Y_n/A_n) \arrow[r] \arrow[d] & T^1(Y_{n-1}/A_{n-1}) \arrow[r, "ob"] \arrow[d] & T^2 \arrow[d, "\delta"'] \\
T^1_{loc}(Y_n/A_n) \arrow[r, "\text{全射}"] & T^1_{loc}(Y_{n-1}/A_{n-1}) \arrow[r] & T^2_{loc}
\end{tikzcd}$$

$\delta|_{Im(ob)}$ は単射になる。$* \in T^1(Y_{n-1}/A_{n-1})$ を T^2_{loc} で 0 にうつる元とすると、diagram chasing より、$ob(*) = 0$ がわかる。

このように、local な性質から変形の global な性質がある程度わかる。

定義.

(1) Y を Calabi-Yau 3-fold とする。
$\sigma(Y) := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\,(Weil(Y)/Cart(Y))$.
$\sigma(Y) = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} Y$: $\mathbb{Q}$-factorial.

(2) $V = (V, 0)$: isolated rational singularity.
$\sigma(V) := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\,(Weil(V)/Cart(V))$.
$\pi : \tilde{V} \to V$: resolution, $\pi^{-1}(0) = E$: simple normal crossing divisor.
$\mu(V) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\left[H^1(\tilde{V}, \mathcal{O}^*_{\tilde{V}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \xrightarrow{d\log} H^1(\tilde{V}, \Omega^1_{\tilde{V}})\right]$.

注意.

- rational Gorenstein singularity のみだから, (Weil divisor のなす群)/(Cartier divisor のなす群) は有限生成 Abel 群になる。よって、$\sigma(Y) < \infty, \sigma(V) < \infty$.
- $\mu(V)$ は resolution の取り方によらない。

これらの invariant を用いて k, l を評価することにより、変形が見えてくる。

V を 3-dimensional isolated rational Gorenstein singularity とする。

性質.

(a) (基本不等式) $\mu + \sigma \leq \dim_{\mathbb{C}} T^1_V \leq 2\mu + \sigma$.

(b) V: toric or 商特異点 $\Rightarrow \mu(V) = 0$ (一般次元で OK).

(c) V: hypersurface singualrity なら、次は同値。
(i) $\mu(V) = 0$, (ii) V: smooth or ODP.

ここで、ODP (Ordinary Double Point) とは、analytically local に $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ で書ける点。

注意. 商特異点の場合, $\mu = \sigma = 0$. (a) より、$\dim T^1_V = 0$。これは、3 次元の場合の Schlessinger の商特異点の rigidity theorem に他ならない。

命題 2. *Y: Calabi-Yau 3-fold with isolated rational Gorenstein singularities* とするとき、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha) \geq \sum_{P \in \mathrm{Sing}(Y)} \{\mu(Y, P) + \sigma(Y, P)\} - \sigma(Y).$$

系 3. *Y: $\mathbb{Q}$-factorial Calabi-Yau 3-fold with isolated toric Gorenstein singularities.*
$\Rightarrow \alpha$ および $\mathrm{Def}(Y) \to \prod \mathrm{Def}(Y, P)$ は全射。

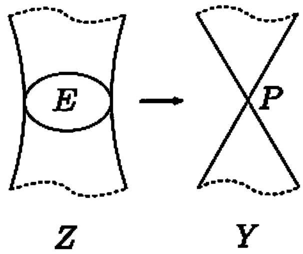
証明. 性質 (a) より、$\dim_{\mathbb{C}} T_V^1 = \sigma(Y, P)$ 従って $\dim \oplus T^1_{(Y,P)} = \sum \sigma(Y, P)$. 一方、命題 2 より

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha) \geq \sum \sigma(Y, P).$$

従って α は全射。α が全射なので、$l = 0$. 従って定理 1,(2) を用いると

$$\mathrm{Def}(Y) \overset{\text{set-theoretic}}{=} \prod \mathrm{Def}(Y, p) \times (\mathbb{C}^k, 0) \twoheadrightarrow \prod \mathrm{Def}(Y, p).$$

例 4. Z: smooth Calabi-Yau 3-fold $\supset E$: del Pezzo surface とする. $\omega_E = N_{E/Z}$ は negative より E をつぶせる: $Z \to Y$.



Y は射影的で $\rho(Z/Y) = 1$ であるとし、さらに $(\omega_E)^2 \geq 6$ と仮定する。
このとき、(Y, P) は toric になる。E_k で $\mathbb{P}^2$ の k 点 blowing up を表すことにする。

$(\omega_E)^2$	E	$\mathrm{Def}(Y,P)$	(Y,p) の smoothability	$\mathrm{Def}(Y)$	Y の smoothablility
9	$\mathbb{P}^2$	rigid	×	smooth	×
8	E_1	non-reduced point	×	nonreduced	×
	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	smooth, 1 次元	○	smooth	○
7	E_2	1 次元, 1 点 nonreduced point	○	nonreduced	○
6	E_3	交わる 2 成分, (1 次元,2 次元)	○ (2 通り)	reducible	○ (2 通り)

定理 5. *Y: $\mathbb{Q}$-factorial Calabi-Yau 3-fold with isolated rational Gorenstein singularities* とし, 次を仮定 *(e.g. hypersurface* 特異点つき *Calabi-Yau)*。

(1) $\forall P \in Y$, $\mathrm{Def}(Y, P)$*: smooth,*
(2) $\forall P \in Y$, (Y, P) は *(local* に*)smoothable.*

$\Rightarrow Y$ は *smooth Calabi-Yau* に変形できる。

Proof. 自然な射

$$\alpha : \mathbb{T}^1_Y \to \oplus T^1_{(Y,P)}$$

を考える。このとき次が成り立つ。

- $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha) \geq \sum_{P \in \mathrm{Sing}(Y)} \{\mu(Y, P) + \sigma(Y, P)\}$ (命題 2),
- $\mathrm{Def}(Y)$: smooth ((1) と定理 1).

μ, σ の 2 重帰納法により証明する。Y の small deformation を繰り返す。すると、$\forall P$, $\mu(Y,P)=\sigma(Y,P)=0$, また (Y,P) は (1)(2) を満たすようにできる。基本不等式より $\dim T^1_{(Y,P)}=0$。したがって (Y,P) は非特異。

注意. $\mathbb{Q}$-factoriality は small deformation で保たれるのでうまくいく。

例 6. 例 4 と同じ設定で、$(\omega_E)^2 \le 5$ と仮定。

$(\omega_E)^2$	E	(Y,P) および $\mathrm{Def}(Y,P)$	(Y,P) の smoothability	$\mathrm{Def}(Y)$	Y の smoothability
5	E_4	Gorenstein in codim 3, smooth	○	smooth	○
4	E_5	complete intersection, smooth	○	smooth	○
3	E_6	hypersurface, smooth	○	smooth	○
2	E_7	hypersurface, smooth	○	smooth	○
1	E_8	hypersurface, smooth	○	smooth	○

系 7. *Y : $\mathbb{Q}$-factorial Calabi-Yau 3-fold with terminal singularities ($\Rightarrow$ isolated hypersurface singularity) $\Rightarrow$ Y は smooth Calabi-Yau に変形できる。*

定理 8(一般化された **Bogomorov** 分解). *Z: smooth projective 3-fold, $\kappa(Z)=0$ とする。*
$\Rightarrow \exists W \to Z$: étale covering, W は次のどれかと birationally equivalent:
(a) Abelian 3-fold, (b) ellipitic curve $\times$ K3, (c) $\pi_1=\{1\}, \kappa=0$.

証明. $\pi_1(Z)\supset G$: 指数有限の部分群に対応する被覆をとったものが W。

Claim. G として、指数有限の *Abel* 部分群が取れる。

これが示されると、無限群だと (a)(b) のどちらかになることが示される。有限群なら $\pi_1(Z)$ も有限だから、対応する普遍被覆をとればよい。

Claim の証明.

$$
\begin{array}{ccl}
Z \dashrightarrow & \xrightarrow[\text{birational map}]{\text{MMP による}} & Z' : \mathbb{Q}\text{-factorial minimal model, } rK_{Z'} \sim 0 \\
 & & \uparrow \text{index 1 cover} \\
 & & Y' \\
 & & \uparrow \mathbb{Q}\text{-factorization} \\
Y_t & \xleftarrow{\text{smoothing}} & Y : \mathbb{Q}\text{-factorial terminal Calabi-Yau 3-fold}
\end{array}
$$

Y_t は smooth な Calabi-Yau 3-fold だから、Bogomolov 分解が成立する。したがって、$\pi_1(Y_t)$ の中に指数有限の Abel 部分群が取れる。上の MMP と smoothing を見ると OK. □

§2 Sing(Y) : 非孤立の場合

$\Sigma = Sing(Y)$ とおき, $\hat{Y}$ を Σ の沿っての (Y の) formal completion (又は Σ の十分小さな近傍) とする.

定理 9. $\hat{Y}$ の任意の無限小変形が *unobstructed* $\Rightarrow$ Def(Y) も *unobstructed.*

注. $\hat{Y}$ 自体の Kuranishi space は無限次元的でうまくいかない。
今度使う α として、自然な射

$$\alpha\colon \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y) \to H^0(Y, T^1_Y),\ \text{但し}\ T^1_Y = \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y)$$

を考える。T^1_Y の support は Σ 上にある。Σ の次の部分集合を考える。

$$\Sigma_0 := \{P \in \Sigma \mid P\ \text{は dissident}\}.$$

ここで、Σ は一般の点では $\mathbb{C}$ と rational double point の直積。そうでない点 (有限個) を dissident という。

例. $x^2+y^2+z^3+z^2t=0$ は、t 軸に沿って singular。$t \neq 0$ では $A_1 \times \mathbb{C}$ だが、$t=0$ で切ると A_2。従って、原点が dissident。

定義. $P \in \Sigma_0$ に対し、$\tilde{Y}_P \overset{\nu_P}{\to} (Y, P)$: good resolution とする。

$$\mu(Y,P) := \dim R^1(\nu_P)_*\Omega^1_{\tilde{Y}_P}(\log E)(-E)$$

右の sheaf は点 P のみに support を持つ。

$$\sigma(Y,P) := \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, Weil(Y,P)/Cart(Y,P)$$

注. 孤立特異点の場合にこの定義を採用しても同じ定義になる。
Hodge-theoretic にどのくらい悪いかを示す尺度である。

$$\begin{array}{ccc}
\alpha : \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & H^0(Y, T^1_Y) \\
\cup & & \cup \\
\alpha' : \alpha^{-1}(H^0_{\Sigma_0}(Y, T^1_Y)) & \longrightarrow & H^0_{\Sigma_0}(Y, T^1_Y)
\end{array}$$

α の評価は難しいので、α' を評価したいが、§1 と同様の評価式が成り立つ :

命題 10.

(1) $U = Y \setminus \Sigma_0$ とする。自然な単射 :

$$H^1(U, \Theta_U) \to \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_Y)$$

が存在して、その像は $\alpha^{-1}(H^0_{\Sigma_0}(Y, T^1_Y))$ に一致する。

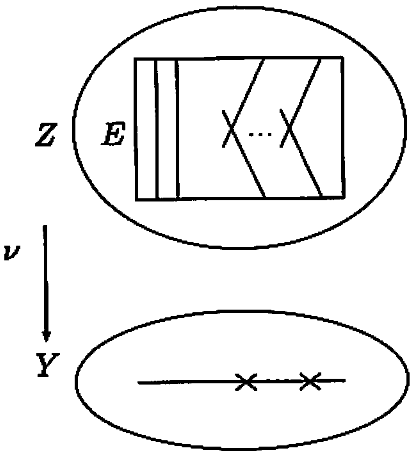
(2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha') \geq \sum_{P \in \Sigma_0} \{\mu(Y,P) + \sigma(Y,P)\} - \sigma(Y)$.

(3) $\forall P \in \Sigma_0$, $\mu(Y,P) = 0$ ならば、

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha') = \sum_{P \in \Sigma_0} \sigma(Y,P) - \sigma(Y).$$

例11. Z: smooth Calabi-Yau 3-fold、$Z \supset E$: conic bundle structure を持つ smooth surface とする。

ruling に沿って E をつぶしたとする : $\nu : Z \to Y$



Y は $\mathbb{P}^1$ に沿って特異点を持つような Calabi-Yau 3-fold であり, reducible fiber に対応して Y で dissident points の集合 Σ_0 が出る (n 点集合とする)。dissident point における local equation は、$x^2 + y^2 + x^3 + z^2 t = 0$ となる。

$\rho(Z/Y) = k$ とおく。自然な写像 $\nu_* : \mathrm{Def}(Z) \to \mathrm{Def}(Y)$ は全射とは限らないが E が smooth なので closed immersion になる。

Observation 12.

(1) $n \geq 3 \Rightarrow \mathrm{Def}(Y)$ は smooth.
$\dim \mathrm{Def}(Y) = \dim \mathrm{Def}(Z) + 2n - 2 - k$. ('Morrison Conjecture')

(2) $n \geq 4 \Rightarrow Y$ は smooth Calabi-Yau に変形できる。

(3) $k = 1, n \geq 2 \Rightarrow Y$ は smooth Calabi-Yau に変形できる。

証明. ここでは (1) を示す。

$$E_2^{p,q} = H^p(\hat{Y}, \mathcal{E}xt^q(\Omega^1_{\hat{Y}}, \mathcal{O}_{\hat{Y}})) \Rightarrow \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{\hat{Y}}, \mathcal{O}_{\hat{Y}})$$

悪い点でも全て hypersurface singularity なので、$\mathcal{E}xt^2(\Omega^1_{\hat{Y}}, \mathcal{O}_{\hat{Y}}) = 0$.

$H^1(\hat{Y}, \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{\hat{Y}}, \mathcal{O}_{\hat{Y}}))$ を計算すればよい。

$$0 \to \mathcal{F}(:= \ker) \to T^1_Y \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4 - E^3) \to 0$$

より

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ \| & & & & & & \\ H^1(Y, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H^1(Y, T^1_Y) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4 - E^3)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$(E)^3_Z = (\omega_E)^2 = 8 - n$ である。$4 - (8 - n) = n - 4$ より $n \geq 3$ なら上の一番右は消える。従って $H^1(Y, T^1_Y) = 0$。よって、$\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{\hat{Y}}, \mathcal{O}_{\hat{Y}}) = 0$. Σ の近傍の変形が unobstructed だから、全体の変形も unobstructed。

計算によって、$P \in \Sigma_0$ に対して $\mu(Y,P)=0$. Proposition 10 (3) を使う。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(Y,\Theta_Y) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y,\mathcal{O}_Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\|"'] & H^0(Y,T^1_Y) \arrow[d, "\|"'] \\
& H^1(Z,\Theta_Z) & T_0(\mathrm{Def}(Y)) & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-E^3))
\end{tikzcd}$$

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(T^1_Y) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-E^3))$$

の最初の項は $H^0_{\Sigma_0}(T^1_Y)$

(1) $\beta : \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_Y,\mathcal{O}_Y) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-E^3))$ は全射。
(2) $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha) = \dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-E^3)) + \dim(\alpha')$
(3) $\forall P \in \Sigma_0$, $\mu(Y,P)=0$ したがって

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}(\alpha') = \sum_{P\in\Sigma_0} \sigma(Y,P) - \sigma(Y) = n-k+1.$$

(4) $\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4-E^3)) = n-3$。

$(1),\dots,(4)$ から $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{im}\,\alpha = 2n-k-2$.

Part II. 4 次元の flop の構成

ここでは、変形理論の観点から新しい flop の例を作る。

定義. $f : W \to V$ は birational morphism of normal varieties with terminal singularities で, 次の条件を満たすとする。

K_W : f-numerically trivial ($\Leftrightarrow \forall C \subset$ (f の fiber) に対して $(K_W.C)=0$),
f : isomorphic in codimension 1,
$\exists D$: W 上の Cartier divisor, $-D$: f-ample.

f の *D-flop* とは、

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, dashed, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & \circlearrowleft & W' \arrow[dl, "f'"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

であって,

K'_W : f'-numerically trivial,
f' : isomorphic in codimension 1,
D の W' における transform D' が f'-ample,

となるものをいう。

以下、4 次元で考える。

基本方針. X : 3 次元 isolated rational Gorenstein singularity とする.

Step 1. $\pi : Y \to X$: crepant partial resolution (i.e. $K_Y = \pi^* K_X$) で, $\rho(Y/X)=1$, $\pi_* : \mathrm{Def}(Y) \to \mathrm{Def}(X)$: closed immersion となるものを見つける。Y の特異点は孤立していなくとも良い。また、$\mathbb{Q}$-factorial でないかもしれないが、それに代わる条件がある（ここでは述べない)。

Step 2. Y に対して、$\pi' : Y' \to X$ crepant resolution, $\rho(Y'/X) = 1$, π'_*: closed immersion で, $\mathrm{im}(\pi_*) = \mathrm{im}(\pi'_*) \subset \mathrm{Def}(X)$ となるようなものを見つける。
$\mathrm{im}(\pi_*) \supset \Delta'$: generic curve に引き戻して、4 次元 flop

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Y} & \dashrightarrow & \mathfrak{Y}' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \mathfrak{X} & \\ & \downarrow & \\ & \Delta' & \end{array}$$

ができる、と期待する。

注意.

(1) $K_Y \sim 0$, $R^1\pi_*\mathcal{O}_Y = 0$ より、Y は Calabi-Yau 3-fold に近い変形理論を持つ。
(2) Y に特異点を持たせることが本質的。

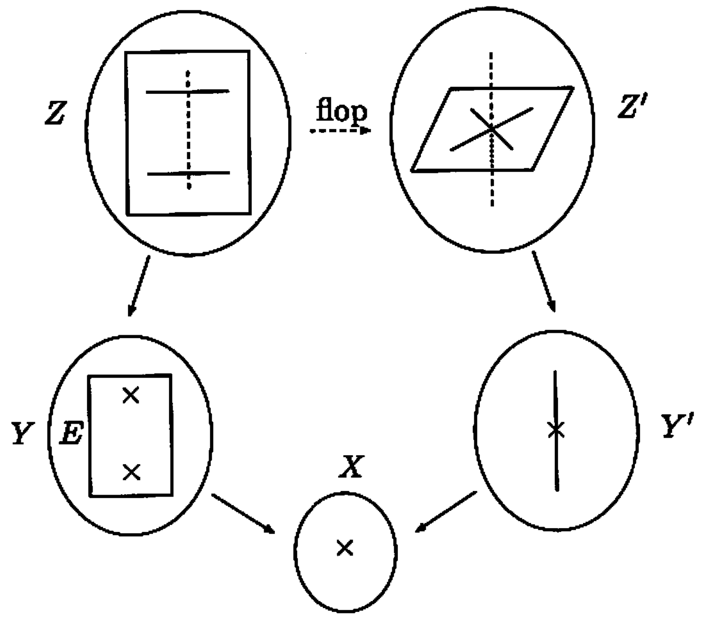
Theorem. *Part I* の Y に対する結果はほぼ *Part II* の Y についても成り立つ。

これを使って例を作ってみよう。

例 **13.** F を smooth Del Pezzo surface, d-points blowing up of $\mathbb{P}^2$ とし, $(X,0)$ を germ of cone singularity over F とする. resolution $f\colon Z \to X$ で、$f^{-1}(0) = F$ となるものがとれる。$d < 2$ では flop ができないので $d \geq 2$ とする。local に F の中の d 本の (-1)-curves $C_1, \ldots, C_d$ をつぶす写像を $\nu\colon Z \to Y$ とする。

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\nu} & Y \\ & f\searrow \circlearrowleft \swarrow\pi & \\ & X & \end{array}.$$

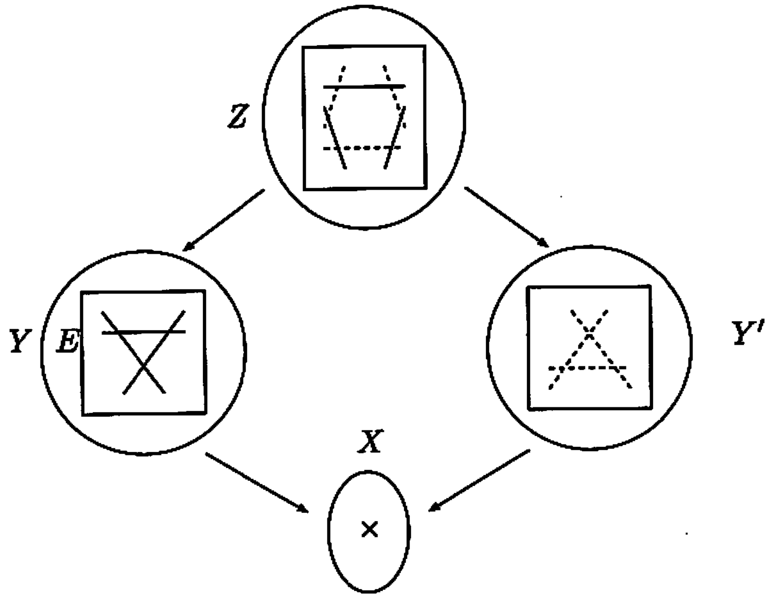
$\nu(F) = E$ とすると、$E \cong \mathbb{P}^2$。$N_{C_i/Z} \cong \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ であるから、Y は d 個の ODP P_i $(i = 1, \ldots, d)$ を持つ。まず, $d = 2$ の場合を考える。



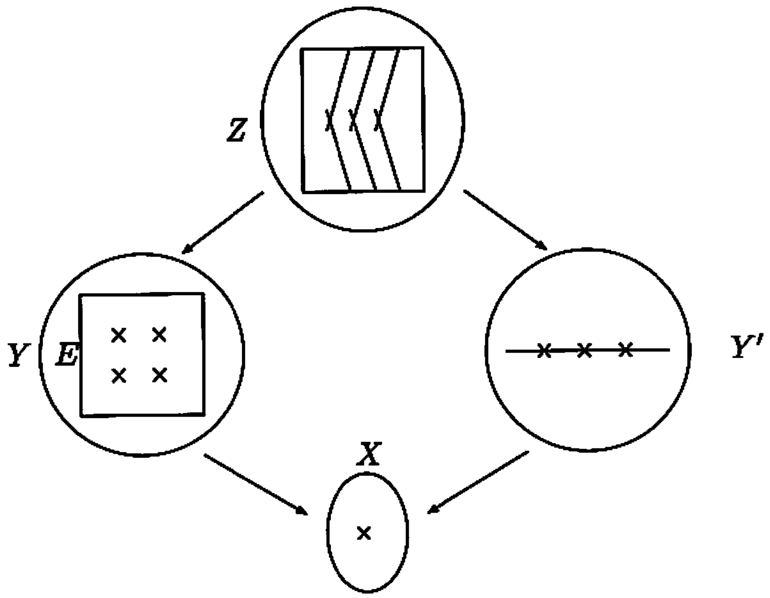
Z は (-1)-curve に沿って flop できて、E の transform をつぶすと Y' ができる。Y' は toric singularity を一点持つ。

Δ' の上の一次元変形で E が伸びるとまずいが、今は特異点が E の上にあるので、E は Cartier divisor にならず、横に延びない。

$d = 3$: 向井の elementary transformation ($\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ は smooth).

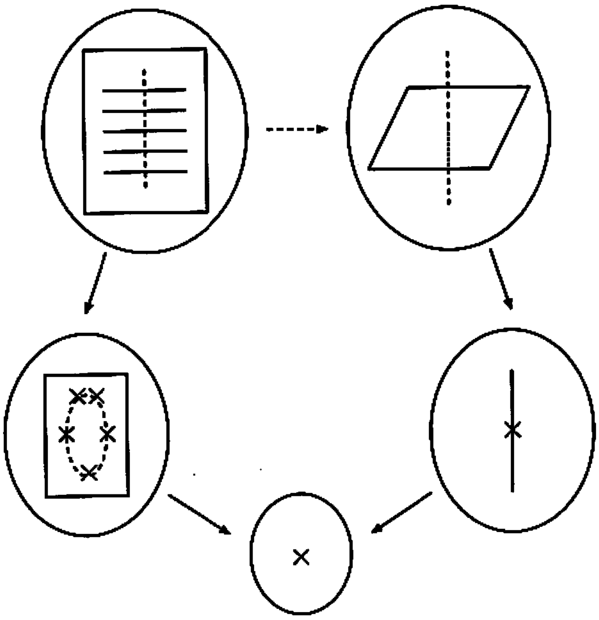


$d = 4$: conic bundle structure. E の上で $P_1, \ldots, P_4$ を通る conic の pencil は reducible element を 3 本持ち、従って Y' には dissident point が 3 点ある。$k = 1$, $n = 3$ は smoothable だから、この場合も smooth.



$d = 5$: $P_1, \ldots, P_5$ を通る unique な conic の strict transform に沿って、Z は flop できる。E の transform をつぶしてできる Y' は toric ではないが smoothable

である。一方で、Y も ODP のみなので smoothable。



同様に $d=6,7,8$ の時もできる。

$\Pi:\mathfrak{Y}\to\mathfrak{X},\ \Pi':\mathfrak{Y}'\to\mathfrak{X}$　とする。

命題 14.

(1) $d=2,3$ なら、$t\neq 0$ に対して、$\mathfrak{X}_t$ は *smooth.* $\Pi_t,\ \Pi'_t$ は共に同型。
(2) $d\geq 4$ なら、$t\neq 0$ に対して、$\mathfrak{X}_t$ は *ODP* のみを持ち、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathfrak{Y}_t \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \mathfrak{Y}'_t \arrow[dl] \\ & \mathfrak{X} & \end{tikzcd}$$

は $(-1,-1)$-*curve* の *flop.*
$n:=\mathfrak{X}_t$ 上の *ODP* の数、とすると、

d	4	5	6	7	8
n	1	3	6	11	22

(3) $L\in Pic(\mathfrak{Y})$ Π-*ample* とする。$L|_E\sim\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(1)}$ とする。
$t\neq 0\in\Delta'$ に対して、

$$n_i:=\#\ \{C\subset Exc(\Pi_t)\mid (L.C)=i,\ C:(-1,-1)\text{-}curve\}$$

とする。$n=n_1+n_2+n_3+\dots.$

d	4	5	6	7	8
n_1	1	3	6	10	15
n_2	0	0	0	1	6
n_3	0	0	0	0	1

$\mathbb{P}^2$ のどの curve が横に延びていくかがわかる。

注意. $\rho(\mathfrak{Y}/\mathfrak{X})=\rho(\mathfrak{Y}'/\mathfrak{X})=1$ にも関らず、$Exc(\Pi)$ はたくさん既約成分を持つ。

REFERENCES

1. Reid, Miles, *The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible.* Math. Ann. **278** (1987) 329–334.

2. Friedman, Robert David, *Simultaneous resolution of threefold double points.* Math. Ann. **274** (1986), no. 4, 671–689.

3. Namikawa, Yoshinori, *Elliptic* 3*-folds and non-Kähler* 3*-folds.* J. Math. Kyoto Univ. **32** (1992), no. 4, 899–955.

4. Tian, Gang, *Smoothing* 3*-folds with trivial canonical bundle and ordinary double points.* Collection: Essays on mirror manifolds, 458–479 Internat. Press, Hong Kong, 1992.

5. Ran, Ziv, *Deformations of Calabi-Yau Kleinfolds.* Collection: Essays on mirror manifolds, 451–457 Internat. Press, Hong Kong, 1992.

6. Ran, Ziv, *Unobstructedness of Calabi-Yau OrbiKleinfolds.* alg-geom/9308006.

7. Namikawa, Yoshinori, *On deformations of Calabi-Yau* 3*-folds with terminal singularities.* Topology **33** (1994), no. 3, 429–446.

8. Kawamata, Yujiro, and Namikawa, Yoshinori, *Logarithmic deformations of normal crossing varieties and smoothing of degenerate Calabi-Yau varieties.* Invent. Math. **118** (1994), no. 3, 395–409.

9. Lu, Peng and Tian, Gang, *The complex structure on a connected sum of $S^3 \times S^3$ with trivial canonical bundle.* Math. Ann. **298** (1994), no. 4, 761–764.

10. Namikawa, Yoshinori and Steenbrink, J. H. M., *Global smoothing of Calabi-Yau threefolds.* Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 403–419.

11. Gross, Mark, *Deforming Calabi-Yau threefolds.* Math. Ann. **308** (1997) 187–220, alg-geom/9506022.

12. Gross, Mark, *The deformation space of Calabi-Yau n-folds with canonical singularities can be obstructed.* AMS/IP Stud. Adv. Math., **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, alg-geom/9402014.

13. 並河 良典, *Calabi-Yau多様体と変形理論.* 数学 **48** (1996), no. 4, 337–357.

14. Gross, Mark, *Primitive Calabi-Yau threefolds.* J. Diff. Geom. **45** (1997) 288–318.

15. Ran, Ziv, *How to tell you're hearing a Calabi-Yau: Universal variations of Hodge structure and local Schottky relations for Calabi-Yau.* alg-geom/9505030.

16. Gross, Mark, *Connecting the Web: A Prognosis.* preprint.

17. Wilson, P. M. H., *Flops, Type III contractions and Gromov-Witten invariants on Calabi-Yau threefolds.* alg-geom/9707008.

18. Namikawa, Yoshinori, *Deformation theory of Calabi-Yau threefolds and certain invariants of singularities.* J. Alg. Geom. **6** (1997), No. 4, 753–776.

19. Namikawa, Yoshinori, *Global smoothing of Calabi-Yau threefolds II.* preprint.

20. Namikawa, Yoshinori, *Stratified local moduli of Calabi-Yau threefolds.* preprint.

21. Namikawa, Yoshinori, *A construction of flops by deformation theory.* preprint (1997).

DEFORMATIONS OF $\mathbb{Q}$-FANO 3-FOLDS

TATSUHIRO MINAGAWA

Department of Mathematical Sciences, University of Tokyo

Let X be a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein projective variety over $\mathbb{C}$ of dimension 3 which has only terminal singularities. We call X a $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold when $-K_X$ is ample. The *index* i_p of singular point p is defined by

$$i_p := \min\{m \in \mathbb{N} | mK_X \text{ is a Cartier divisor near } p\}.$$

A singular point of index 1 is called Gorenstein singularity. The *singularity index* $i(X)$ of X is defined by

$$i(X) := \min\{m \in \mathbb{N} | mK_X \text{ is a Cartier divisor}\}.$$

Let X be a $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds which has only terminal singularities. Then there is a positive integer r and a Cartier divisor H such that $-i(X)K_X \sim rH$. Taking the largest number of such r, we call $\frac{r}{i(X)}$ the *Fano index* of X.

Definition 0.1. Let X be a normal $\mathbb{Q}$-Gorenstein projective variety of dimension 3 over $\mathbb{C}$ which has only terminal singularities. Let $(\Delta, 0)$ be a germ of the 1-parameter unit disk. Let $\mathfrak{g} : \mathfrak{X} \to (\Delta, 0)$ be a small deformation of X over $(\Delta, 0)$. We call $\mathfrak{g}$ a $\mathbb{Q}$-smoothing of X when the fiber $\mathfrak{X}_s = \mathfrak{g}^{-1}(s)$ has only cyclic quotient singurarities for each $s \in (\Delta, 0)$.

Example. Let $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. G acts on $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ by $(X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4) \to (X_0 : X_1 : -X_2 : -X_3 : -X_4)$. Let Y be a $\{F = X_0^2X_2X_3 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^2 = 0\} \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2)$. Then G acts on Y. Let $X = Y/G$, then X is a $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold of Fano index 1 with only terminal singularities. X has a non Gorenstein terminal singularity which is not a cyclic quotient singularity at $(1:0:0:0:0)$ and its $\mathbb{Q}$-smoothing is given by:

$$\mathfrak{X} : \{F + sX_0^4 = 0\} \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2)/G \times (\Delta, 0).$$

Problem. Let X be a $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds which has only terminal singularities.
When X has a $\mathbb{Q}$-smoothing ?

For the case $i(X) = 1$, i.e., X is a Gorenstein Fano 3-fold, X has a smoothing by Namikawa and Mukai ([Na 3], [Mukai]). For the case that the Fano index > 1, these 3-folds are classified by Sano ([Sa 2]), and they have $\mathbb{Q}$-smoothings by the classification. For the case that the Fano index is 1, we have a next theorem.

Main Theorem. *Let X be a $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold of Fano index 1 with only terminal singularities. Then X has a $\mathbb{Q}$-smoothing.*

Sano classified $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of Fano index 1 with only cyclic quotient singularities. So any $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold of Fano index 1 is a degeneration of the 3-fold classified by Sano ([Sa 1]).

The idea of the proof is as follows.

Defenition 1.3. Let G be a finite group, Y an analytic space with G-action, and $(S,0)$ be a pointed analytic space. Let $\mathfrak{f} : \mathfrak{Y} \to (S,0)$ be a deformation of Y over $(S,0)$. We call $\mathfrak{f}$ G-equivariant if $\mathfrak{Y}$ has a G-action over $(S,0)$ compatible with the G-action on Y.

Let $i(X) = r$. There exists a Cartier divisor H such that $rH \sim -rK_X$. Let $\pi : Y = \mathrm{Spec}(\oplus_{i=0}^{r-1}\mathcal{O}_X(-m(H+K_X))) \to X$ be a canonical cover, then Y is a Gorenstein Fano 3-fold with only terminal singularities which has $G = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$-action. We consider G-equivariant deformations of Y and we have the next theorem.

Theorem. *Let X be a $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold of Fano index 1 which has only ordinary terminal singularities. Then X has a $\mathbb{Q}$-smoothing.*

We remark that *ordinary* is the same meaning as in [Morrison, §2]. Takagi told me the next theorem, and we have the main theorem 1.

Theorem. *(Sano, Takagi)(cf* [Sa 1]*)*

Let X be a $\mathbb{Q}$-Fano 3-fold of Fano index 1 which has only terminal singularities. Then $i(X) = 2$. In particular, X has only ordinary terminal singularities.

Erratum. I omit the main theorem 2 because I made a mistake in my talk. Let X be a $\mathbb{Q}$-factorial $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of $i(X) = 2$ with only terminal singularities. Assume that $|-2K_X|$ has a smooth member. Let $B \in |-2K_X|$ be a smooth member, $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, and $\pi : Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(K_X)) \to X$ the double covering blunched along B. Then Y is a Calabi-Yau 3-fold with only terminal singularities which has G-action. I said that above Y is a "$\mathbb{Q}$-factorial" Calabi-Yau 3-fold, but it is a misunderstanding.

Acknowledgment. I am grateful to Professor Kobayashi for arranging me an opportunity to present my work. I am grateful to Professor Kawamata, Professor Namikawa and H. Takagi for very helpful suggestions.

References

[A] Artin, M., *Lectures on deformations of singularities*, Lectures Math. Phys., vol. 54, Tate Inst., Bombay, 1976.

[Fr] Friedman, R., *Simultaneous resolutions of threefold double points*, Math. Ann. **274** (1986).

[Gr] Gross, M., *Deforming Calabi-Yau threefolds*, preprint (1994).

[H] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer, 1977.

[Ka 1] Kawamata, Y., *The cone of curves of algebraic varieties*, Ann. of Math. **119** (1984).

[Ka 2] Kawamata, Y., *Minimal models and the Kodaira dimention of algebraic fiber spaces*, J. Reine Angew. Math. **363** (1986).

[Ka 3] Kawamata, Y., *Unobstructed deformations, a remark on a paper of Z. Ran*, J. Alg. Geom. **1** (1992).

[Ka 4] Kawamata, Y., *On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K \equiv 0$*, Math. Ann. **275** (1986).

[Ka 5] Kawamata, Y., *Erratum on "Unobstructed deformations"*, J. Alg. Geom. **6** (1997).

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K.,and Matsuki, K., *Introduction to the minimal model problem*, Adv.Stu.Pure Math. **10** (1987), Kinokuniya-North Holland.

[K-M] Kollár, J. and Mori, S., *Classifications of three-dimentional flips*, J. Amer. Math. Soc. **5**(3) (1992).

[Ko-Sh] Kollár, J. and Shepherd-Barron, *Threefolds and deformations of surface singularities*, Invent. Math **91** (1988).

[Mori] Mori, S., *On 3-dimentional terminal singularities*, Nagoya Math. J. **98** (1985).

[Morrison] Morrison, D. R., *A remarks on Kawamata's paper"On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K \equiv 0$"*, Math. Ann. **275** (1986).

[Mukai] Mukai, S., *Gorenstein Fano threefolds*, Proceedings of Algebraic Geometry Symposium (1993), Saitama.

[Na 1] Namikawa, Y., *On deformations of Calabi-Yau 3-folds with terminal singularities*, Topology **33**(3) (1994).

[Na 2] Namikawa, Y., *Deformation theory of Calabi-Yau threefolds and certain invariants of singularities*, J. Alg. Geom. (to appear).

[Na 3] Namikawa, Y., *Smoothing Fano 3-folds*, preprint.

[Na-St] Namikawa, Y. and Steenbrink, J. H. M., *Global smoothing of Calabi-Yau threefolds*, Invent. Math. **122** (1995).

[Ra 1] Ran, Z., *Deformations of maps*, E.Barrico,C.Cilberoto Eds.LMN 1389, Algebraic Curves and Projective Geometry (1989), Springer-Verlag.

[Ra 2] Ran, Z., *Deformation of manifolds with torsion or negative canonical bundle*, J. Alg. Geom. 1 (1992).

[Re 1] Reid, M., *Canonical 3-folds*, (A.Beauville,ed.), Géométric Algébraique Angers (1980), Sijthoff+Noordhoof.

[Re 2] Reid, M., *Young person's guide to canonical singularities*, Proceedings of Symposia in Pure. Math. **46** (1987).

[Sa 1] Sano, T., *On Classifications of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano 3-Folds of Fano index 1*, J. Math. Soc. Japan **47**(2) (1995).

[Sa 2] Sano, T., *Classification of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano d-folds of Fano index greater than $d-2$*, Nagoya Math.J. **142** (1996).

[Sch 1] Schlessinger, M., *Functors on Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968).

[Sch 2] Schlessinger, M., *Rigidity of quotient singularities*, Invent. Math. **14** (1971).

Compact Hyperkähler Manifold
— Results of Heubrechts and O'Grady —

Akira FUJIKI (Osaka Univ.)

In this report we give a rough sketch exposition of some of the main results of the recent important works by Heubrechts [10] and O'Grady [19]. The former treats in fact many important problems concerning irreducible symplectic manifolds; hence its exposition would serve also as an introduction of recent development in the study of these manifolds. On the other hand, the latter gives a construction of an example of an irreducible symplectic manifold, which is new, considered even up to deformations. In any case the interested reader is advised to refer to the original papers [10], [19].

1 Preliminaries

1.1. We begin with a definition.

Definition. Let X be a $2n$ dimensional connected compact complex manifold. Then X is called ***irreducible symplectic*** if and only if

1) X is a simply connected Kähler manifold, and

2) $h^{2,0} := \dim H^0(X, \Omega_X^2) = 1$ and any nonzero element ψ of $H^0(X, \Omega_X^2)$ is nondegenerate, i.e., the alternating form defined by ψ on the holomorphic tangent space at each point of X is nondegenerate.

In particular, the exterior product $\psi \wedge \cdots \wedge \psi$ (n times) is nowhere vanishing holomorphic $2n$-form on X, and thus, the canonical bundle K_X is trivial. Further when $n = 1$, X is irreducible symplectic if and only if X is a K3 surface.

Remark. In general when X is Kähler and admits a nondegenerate holomorphic 2-form ψ, we call X (*holomorphically*) *symplectic.* By the Bogomolov splitting theorem (cf. [2]), a general (complex) symplectic manifold is, up to finite unramified coverings, is isomorphic to a product of a finite number of irreducible symplectic manifolds and a complex torus. Consequently, the study of general symplectic manifolds is reduced essentially to that of irreducible symplectic ones.

1.2. *Examples:* It is extremely difficult to consturct an example of a compact irreducible symplectic manifold. All the examples known so far are, except for the 10 dimensional example constructed recently by O'Grady, are equivalent under deformation to one of the the following two examples i) and ii) (cf. [2]; also [6]).

i) Let S be a K3 surface. For every integer $n \geq 1$ we set

$$S^{[n]} := Hilb^n S := \{\text{0-dimensional subspace } \; Z \subseteq S; \;\; l(O_Z) = n\}.$$

where O_Z is the structure sheaf of O_Z and $l(O_Z)$ is the length of O_Z. Then $S^{[n]}$ is naturally a $2n$ dimensional compact irreducible symplectic complex manifold.

ii) Let T be a 2-dimensional complex torus. Then the space $T^{[n+1]} = Hilb^{(n+1)}T$ defined as above is naturally a $(2n+2)$-dimensional complex symplectic manifold, but is not irreducible. The Albanese map $a : T^{[n+1]} \to T$ of $T^{[n+1]}$ becomes a fiber bundle and its typical fiber $K_n(T)$ provides another series of examples of $2n$-dimensional irreducible symplectic manifolds.

The second betti numbers of $S^{[n]}$ and $K_n(T)$ are given respectively by 23 $(= b_2(S) + 1)$, and (for $n \geq 2$) 7 $(= b_2(T) + 1)$.

On the other hand, given a projective K3 surface S with a fixed ample line bundle $O(1)$, the moduli space $M = M(c_1, c_2, r)$ of $O(1)$-stable sheaves on S with fixed chern classes $c_1 \in H^{1,1}(S)_Z, c_2 \in H^2(S, Z) \cong Z$ and rank r has a natural structure of a quasi-projective manifold. Moreover, M becomes compact for example in the following cases;

a) c_1 is primitive as an element of $H^2(S, Z)$ or

b) $c_1 = 0$ and c_2 is odd.

In these cases by [16] M has a natural structure of an irreducible symplectic manifold (cf. [8], [18]). However, it is known that a suitable deformation of any of these examples is birationally equivalent to one of the manifolds in i) by Mukai [17] (cf. also [21]). Therefore they are even equivalent under deformation to the manifolds in i) by Heubrechts (cf. Theorem main).

Similarly, starting from an abelian surface T we obtain many symplectic complex manifolds. The resulting irreducible symplectic manifolds through the Bogomolov decomposition would also be equivalent under deformation to one of the symplectic manifolds $K_n(T)$ in ii) although there seems no explicit statement in this direction in the literature.

Apart from these examples there exist many projective models of irreducible symplectic manifolds which are obtained as deformations of manifolds in i) and ii). For instance the set X of lines contained in a fixed smooth cubic hypersurface F of $\boldsymbol{P}^5$ becomes an irreducible symplectic manifold and for a special choice of F it turns out to be isomorphic to $S^{[2]}$ for some K3 surface S, and hence, a general X is equivalent to $S^{[2]}$ under deformations (cf. [5]).

1.3. *Quadratic forms on $H^2(X,\boldsymbol{Z})$*: In the case of a K3 surface X, the cup product gives us a natural quadratic form on $H^2(X,\boldsymbol{Z})$. Although the similar procedure does not work in the higher dimensional case, still one can introduce a similar quadratic form. This is due to Beauville [2]. Fix a compact irreducible symplectic manifold X and a holomorphic symplectic form ψ with $\int(\psi\bar{\psi})^n = 1$, where the bar denotes in general the complex conjugate. We shall identify ψ also with its cohomology class in $H^2(X,\boldsymbol{C})$. First, we define a quadratic polynomial f on $H^2(X,\boldsymbol{C})$ by:

$$f(\alpha) = \frac{n}{2}\int(\psi\bar{\psi})^{n-1}\alpha^2 + (1-n)\Big(\int\psi^{n-1}\bar{\psi}^n\alpha\Big)\Big(\int\psi^n\bar{\psi}^{n-1}\alpha\Big),$$

where $\alpha \in H^2(X,\boldsymbol{C})$ and the integration is over X; note also that the definition is independent of the choice of ψ above. In particular if we decompose α into the Hodge components as

$$\alpha = \lambda\psi + \beta + \bar{\lambda}\bar{\psi},\quad \lambda \in \boldsymbol{C},\quad \beta \in H^{1,1}_{\boldsymbol{C}}$$

then it takes the form

$$f(\alpha) = \lambda\bar{\lambda} + \frac{n}{2}\int(\psi\bar{\psi})^{n-1}\beta^2.$$

Theorem 1.1 [2] *There exists a nonsingular quadratic form $q = q_X$ on $H^2(X,\boldsymbol{Z})$ which is a rational multiple of the quadratic form defined above and with the following properties:*

1) *The signature of $q_{\boldsymbol{R}}$ is $(3, b-3)$, where b is the second Betti number of X.*

2) *If $\alpha \in H^2(X,\boldsymbol{R})$ is a Kähler class, then $q_{\boldsymbol{R}}(\alpha) > 0$, and if $\beta \in H^{2,0}$, $q_{\boldsymbol{C}}(\beta) = 0$ and $q_{\boldsymbol{C}}(\beta+\bar{\beta}) > 0$. In particular,*

3) *For any $\alpha \in H^{1,1}_{\boldsymbol{R}}$ if we define $F(\alpha)$ to be the real part of the three dimensional complex vector space $H^{2,0}\oplus \boldsymbol{C}\alpha \oplus H^{0,2}$, $q_{\boldsymbol{R}}$ is positive detinite on $F(\alpha)$ as long as α is a Kähler class.*

4) (Hodge index theorem) *If $\alpha \in H^2(X,\boldsymbol{R})$ is orthogonal to every Kähler class with respect to the symmetric bilinear form s associated to $q_{\boldsymbol{R}}$, then we have $q_{\boldsymbol{R}}(\alpha) \le 0$.*

Here, $q_{\boldsymbol{R}}$ and $q_{\boldsymbol{C}}$ denote respectively the natural extensions of q to $H^2(X,\boldsymbol{R})$ and $H^2(X,\boldsymbol{C})$; but in what follows these are all denoted simply by q.

For $\alpha,\beta \in H^2(X,\boldsymbol{C})$ we often write $q(\alpha) = \alpha^2$ and $s(\alpha,\beta) = \alpha\beta$. In these notations, the conclusion of 2) is expressed as

For every Kähler class α we have $\alpha^2 > 0$, and for any class β of type $(2,0)$ we have $\beta^2 = 0$ and $\beta\bar{\beta} > 0$.

In [7] we have shown that the quadratic form q satisfies the following remarkable relations: Let $c_i = c_i(X), i \geq 0$, be the i-th chern class of X. Note that for any (irreducible) symplectic manifold any chern class of odd degree vanishes.

Theorem 1.2 *For any $i \geq 0$ there exists rational numbers a_i with the following properties: For every element $\alpha \in H^2(X,C)$ we have*

$$c_{2i}\alpha^{2n-2i} = b_i(\alpha^2)^{(n-i)} \equiv b_i(q(\alpha))^{(n-i)},$$

where we regard $c_{2i}\alpha^{2n-2i} \in H^{4n}(X,C)$ as a complex number via the canonical isomorphism $H^{4n}(X,C) \cong C$. In particular, in the case $i = 0$ we have

$$\alpha^{2n} = b_0(\alpha^2)^n \equiv b_0(q(\alpha))^n.$$

Applying the result to the Riemann-Roch formula for a line bundle L on X we obtain the following useful formula:

$$\chi(L) = \sum \frac{a_i}{(2i)!}((c_1(L))^2)^i = \sum \frac{a_i}{(2i)!}(q((c_1(L))))^i, \tag{1}$$

where a_i are rational numbers depending only on X.

1.4. *Kähler cones and positive cones:* Set $H = H_R^{(1,1)}$. Let

$$K := \{\alpha \in H; \alpha \text{ a Kähler class}\}$$

be the Kähler cone of X. By 1) the set $\{x \in H; x^2 > 0\}$ has exactly two connected components and we denote by C the one which contains K:

$$K \subseteq C \subseteq H.$$

Let $\hat{K}$ and $\hat{C}$ be the dual cones of K and C with respect to s; namely

$$\hat{K} = \{x \in H; xy > 0, \forall y \in K\}, \quad \hat{C} = \{x \in H; xy > 0, \forall y \in C\}.$$

In this case form the Hodge index theorem we deuce easily the following inclusion:

$$(K \subseteq)C \subseteq \hat{K}, \quad K \subseteq \hat{C}. \tag{2}$$

1.5. *Hyperkähler manifolds and holomorphic symplectic manifolds:*

Definition. A *hyperkähler manifold* is a $4n$ dimensional Riemannian manifold (M, g) with three integrable and isometric almost complex structures I, J and K which satisfy the usual quaternionic relations $IJ = -JI = K$ and etc. such that g becomes a Kähler metric on each complex manifold $(M, I), (M, J)$ and (M, K). The condition is also equivalent to saying that the holonomy group of (M, g) is contained in the compact symplectic group $Sp(n)$.

We set

$$C = \{q = ai + bj + ck; a, b, c \in \boldsymbol{R}, a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \cong S^2 = \boldsymbol{P}^1$$

Then for any element $q \in C, Iq = aI + bJ + cK$ induces on M a complex structure for which g becomes a Kähler form. In particular, if we set $X_q = (M, I_q)$, we get a family $\{X_q\}_{q \in C}$ of Kähler manifolds which in fact turns out to give a holomorphic family $f : Z \to C$, where $f^{-1}(q) = X_q$. (The total space is called the *twistor space* of the hyperkähler manifold (M, g)). Moreover, X_q is naturally endowed with a holomorphic symplectic form φ_q, making X_q a holomorphic symplectic manifold. In fact, by the Penrose correspondence, giving a hyperkähler manifold is equivalent to giving a family of Kähler symplectic manifolds parametrized by $\boldsymbol{P}$ as above. Here X_q is irreducible if and only if the holonomy group coincides with the full symplectic group $Sp(n)$.

Conversely, suppose that we are given an irreducible symplectic manifold X. Then, once we fix a Kähler class $\alpha \in H^{1,1}(X) \cong H^1(\Omega^1)$, we obtain canonically a hyperkähler manifold (M, g) such that X appears as one of the members of the associated family $\{X_q\}$ as above. In fact, in this case the Riemannian metric g is nothing but the underlying Riemannian metric of *the* Calabi-Yau metric whose Kähler class equals α. In this case we shall denote the corresponding twistor space Z by $\mathcal{X}(\alpha)$ and the associated family by $f_\alpha : \mathcal{X}(\alpha) \to S(\alpha)$. We also refer this family as the ***Calabi family associated to*** (X, α). We may assume that $X = X_i$. Then one may identify the germ $(S(\alpha), i)$ as a subgerm of the base space (S, o) of the Kuranishi family of X. Then the tangent space $T_iS(a) \subseteq T_oS$ is cohomologically identified with the one dimensional span $C\alpha$ of α in $H^1(\Omega^1)$ with respect to the natural identifications $T_oS = H1(\Theta_X) = H^1(\Omega^1)$ (cf. 1.6).

Note that our quadratic form q is positive detinite on the real three dimensional space $F(\alpha) := (H^{2,0} \oplus C\alpha \oplus H^{0,2})_{\boldsymbol{R}}$. We call any such three dimensional subspace of $H^2(X, \boldsymbol{R})$ a *positive 3-space.*

1.6. *Local deformations:*

The basic theorem is the following unobstructedness theorem for local deformation of (irreducible) symplectic manifolds which holds more generally for any Calabi-Yau manifolds (cf. e.g. Tian [20]).

Theorem 1.3 *Let X be an irreducible symplectic manifold and $f : \mathcal{X} \to S, \mathcal{X}_o = X, o \in S$, the Kuranishi family of X. Then S is nonsingular. Moreover, the family is universal at each point of S.*

Note that the holomorphic tangent space $T_oX \cong H^1(X, \Theta_X)$ is up to constant naturally identified with $H^1(\Omega^1)$ via the interior product with the symplectic form ψ.

We may assume that S is simply connected so that for any $s \in S$ we have canonical identifications $H^2(\mathcal{X}_s, Z) = H^2(\mathcal{X}_o, Z) = H^2(X, Z)$.

Theorem 1.4 [2], [6] 1) *For every $\beta \in H^2(X, Z)$ we set*

$$S_\beta := \{s \in S; \exists L \in Pic\mathcal{X}_s \text{ with } \beta = c_1(L)\} \subseteq S.$$

Then S_β is a smooth hypersurface of S if it is not empty; $S_\alpha = S_\beta$ if and only if α and β are proportional. In particular, for 'general' $s \in S$ $\mathcal{X}_s$ admits no nontrivial line bundles and contains no curves; in particular it is of algebraic dimension zero.

2) *For any positive dimensional subspace T of S there exists a dense subset T' of T such that the corresponding fiber $\mathcal{X}_t, t \in T'$, is projective.*

Here, 'general' means 'in the complement of at most countably many proper analytic subvarieties'.

1.7. *Period domain and period map:*

Fix a Euclidian lattice (L, q) with signature $(3, k)$ for some $k > 0$, where q is an nonsingular quadratic form on the free abelian group L with signature $(3, k)$. Then we define a subdomain D of a quadric in the complex projective space $P(L_C)$ associated to $L_C = L \otimes C$ by

$$D = \{x \in P(L_C); x^2 = 0, x\bar{x} > 0\}$$

where the notation convention as in 1.3 is used so that e.g. $y^2 = q_C(y)$.

A *marking* for an irreducible symplectic manifold X (with respect to (L, q)) is an isomorphism $\varphi : H^2(X, Z) \to L$ which is (q_X, q)-isometry and we may speak of a marked manifold (X, φ). For any marked irreducible symplectic manifold (X, φ) we associate the point $p(X, \varphi) := [\varphi(H^{2,0}(X))] \in P(L_C)$ of D, called the *period* of (X, φ). If $f : \mathcal{X} \to S$ is a Kuranishi family of X as above, and if we fix a marking φ for X we have the induced marking φ_t for any fiber $\mathcal{X}_s = f^{-1}(s), s \in S$. Thus we obtain map

$$p : S \to p(\mathcal{X}_s, \varphi_s) \in D \subseteq P(L_C),$$

which turns out to be holomorphic. Moreover,

Theorem 1.5 (Local Torelli Theorem) [2] *For any irreducible symplectic manifold the period map $p : S \to D$ is always locally biholomorphic.*

We denote by $\mathcal{M} = \mathcal{M}(L)$ the set of isomorphism classes of marked irreducible symplectic manifolds, As follows easily from the unobstructedness theorem of the Kuranishi family and the Local Torelli Theorem, $\mathcal{M}$ has a natural structure of a complex manifold, which is not necessarily separated. (For instance it is certainly not separated in the K3 case as well as the case of $S^{[n]}$ in 1.2 ii).) Then the period map $p : \mathcal{M} \to D$ is globally defined on M and is holomorphic. Moreover, p is locally biholomorphic by the Local Torelli Theorem.

2 Results of Heubrechts [10]

We start with the (unpolarized) Global Torelli Problem which asks if the following two statements are true or not:

1) The map p is surjective.

2) If two marked irreducible symplectic manifolds (X, φ) and (X', φ') have the same period, then X and X' are isomorphic to each other.

First, the affirmative answer to 1) is proved in [10].

Theorem 2.1 [10, Th.8.1] *For any connected component $\mathcal{M}^0$ of $\mathcal{M}$ the period map $p : \mathcal{M}^0 \to D$ is surjective.*

Underlying Idea: Let X be an irreducible symplectic manifold and α a Kähler class. Let $f_\alpha : \mathcal{X}(\alpha) \to S(\alpha)$ be the associated Calabi family. Since this family is topologically a product, a marking, say φ, of X defines canonically the markings of other members X_q of this family. With marking determined in this way, $S(\alpha) \cong \boldsymbol{P}^1$ is actually considered as a submanifold of $\mathcal{M}$ and the associated period mapping $p_\alpha : S(\alpha) \to D$ is an embedding onto the submanifold $\boldsymbol{P}_\alpha := \boldsymbol{P}(\varphi(F(\alpha))) \bigcap D \cong \boldsymbol{P}^1$. Thus, at any point of the moduli space $\mathcal{M}$ we get a global deformation of X in the direction of the Kähler cone $K \subseteq H^1(\Omega^1) \cong H^1(\Theta_X)$. One then tries to show that the union of these $\boldsymbol{P}_\alpha$ indeed covers the whole domain D.

Sketch of proof of Theorem 2.1. For any $x \in D$ we set

$$P(x) = (Cx \oplus C\bar{x}) \bigcap L_R.$$

Then two points x and y of D are called *equivalent* if there exists a sequence $\{x_i\}$ of points $x_i, 0 \leq i \leq m$, of D such that $x_0 = x$ and $x_m = y$ and that the subspace

$\langle P(x_i), P(x_{i+1})\rangle$ generated by $P(x_i)$ and $P(x_{i+1})$ in L_R is a positive 3-space in the sense defined at the end of 1.5. Now the proof consists of two steps.

1st step: One show that any two points x and y of D are mutually equivalent in the sense defined above. (This clearly concerns only with the geometry of period domain and is in fact proved similarly to the K3 case [1].) Then it suffices to show that:

2nd step: Under the assumption that $\langle P(x), P(y)\rangle$ is a positive 3-space if $x \in \operatorname{Im} p$, then $y \in \operatorname{Im} p$ also, where Im denotes the image.

First one proves:

Claim. Let (X, φ) be the marked irreducible symplectic manifold corresponding to x. Then by replacing X by a small deformation if necessary one may assume that $\rho(X) = 0$. (Note that 'general' small deformations of X satisfies $\rho(X) = 0$, where ρ denotes the Picard number. The point is that one can choose X in such a way that $\langle P(x), P(y)\rangle$ still is of dimension three. The positivity is then automatic.)

The effect of this is that the Kähler cone then coincides with the positive cone; namely we have $K = C$ (cf. Theorem 2.8 below). Then if we write the orthogonal complement of $P(x)$ in $\langle P(x), P(y)\rangle$ as $\boldsymbol{R}\beta$ for a $\beta \in L_R$, then $\alpha := \varphi^{-1}(\beta)$ belongs to C and hence is a Kähler class; moreover $\langle P(x), P(y)\rangle = F(\alpha)$. Hence, $y \in \boldsymbol{P}_\alpha$ as desired. ☐

2.2. As for the second question 2) of Global Torelli Problem, a counterexample due to Debarre [4] is known. The best that can be expected is the following weaker statement [17], [10, 10.1]:

> If two marked irreducible symplectic manifolds (X, φ) and (X', φ') have the same image under p, then X and X' are mutually bimeromorphic.

Note conversely that if X and X' are irreducible symplectic manifolds which are bimeromorphic to each other, then any marking of X induces naturally one on X' such that the periods of the resulting marked manifolds are the same. So, if in this situation X and X' are not isomorphic, they would give a counterexample to 2) of (the original form of) Global Torelli Theorem. Debarre's counterexample is indeed of this kind, where X is of the form $S^{[n]}$ for some non-projective K3 surface S containing a line, say l, and X' is the result of performing a Mukai's elementary transformation to X with center $l^{[n]} \cong \boldsymbol{P}^n \subseteq X$.

It is still interesting to obtain a counterexample in which X is projective.

In Debarre's example X' is shown to be Kähler. In general, it does not seem to be known whether the elementary transform of an irreducible symplectic manifold is Kähler or not.

2.3. On the other hand, mutually bimeromorphic irreducible symplectic manifolds are equivalent under deformation, at least in the projective case. In fact, more precisely, we have the following result which is the main theorem in [10].

Theorem 2.2 [10, Th.4.6] *Let X and X' be irreducible symplectic manifolds which are bimeromorphic to each other. Suppose that both are projective. Then there exist deformations $f : \mathcal{X} \to S$ and $f' : \mathcal{X}' \to S$ over a 1-dimensional disc $S = \{|z| < 1\}$ of $X \cong \mathcal{X}_0$ and $X' \cong \mathcal{X}'_0$ respectively and a bimeromorphic map $u : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ over S which is isomorphic over $S - \{0\}$.* [1]

Corollary 2.3 *X and X' are diffeomorphic.*

In particular, mutually bimeromorphic (and not isomorphic) projective irreducible symplectic manifolds defines mutually non-separated points of the moduli space $\mathcal{M}$ if we choose suitable markings.

Let X be an irreducible symplectic manifold of dimension $2n$. Suppose that X contains a complex projective space E of dimension n. Let X' be the result of performing Mukai's elementary transformation to X with center E. In this special case the above result is also true even if the manifolds are not assumed to be projective (although assumed to be Kähler). (See [9].)

Proof of Theorem 2.2. Let X and X' be as in the theorem. Fix a bimeromorphic map $u : X \to X'$. Since the canonical bundles are trivial, there exist analytic subsets E and E' respectively of X and X' of codimension ≥ 2 such that u gives an isomorphism of $X - E$ and $X' - E'$. Fix an ample line bundle L' on X' and set $L = u^* L'$. Since E and E' are both of codimension ≥ 2, L is well-defined as a line bundle, which, however, is never ample and u induces a natural isomorphism $H^0(X', L'^m) \cong H^0(X, L^m)$ for any integer m. Moreover, the classes $l \in H^2(X, Z)$ and $l' \in H^2(X, Z)$ satisfy $q'(l) =: l'^2 = l^2 := q(l)$ since u^* preserves the intersection forms on H^2 of the both spaces.

We now take a deformation $f : \mathcal{X} \to S$ of $X = \mathcal{X}_0$ parametrized by a 1-dimensional disc $S = \{|z| < 1\}$ such that there exists a holomorphic line bundle L on X which restricts to L on X and that the Picard number ρ of $\mathcal{X}_s$ satisfies $\rho(\mathcal{X}_s) = 1$ for 'general' point s of S. (The existence of such a family is standard by using Theorem 1.4.) Then for such a 'general' s we have $l_s^2 = l^2 = l'^2 > 0$; so, by the criterion of projectivity mentioned below (cf. Theorem 2.6) $\mathcal{X}_s$ is projective, and then either of L_s and L_s^{-1} must be ample; but it is easy to rule out the case L_s^{-1}. It follows that after the possible restriction of S we may assume that L_s are all ample on $\mathcal{X}_s$ for any $s \neq 0$.

[1] It seems that the proof requires the condition $h^{1,1} > 1$.

Claim. $h^0(\mathcal{X}_s, L_s^m)$ is independent of $s \in S$ if m is sufficiently large.

Proof. If m is sufficiently large, we have the following sequence of (in)equalities:

$$h^0(L^m) \geq h^0(L_s^m) = \chi(L_s^m) = \chi(L^m) = \sum \frac{a_i}{(2i)!}((ml)^2)^i =: \chi(m) \tag{3}$$

$$h^0(L'^m) = \chi(L'^m) = \sum \frac{a'_i}{(2i)!}((ml)'^2)^i =: \chi'(m) \tag{4}$$

where $s \neq 0$ and we recall that $(ml)^2 = q(ml) = m^2q(l)$ and similarly $(ml')^2 = m^2q(l')$ by our notation convention. Here the first inequality of (3) is the upper semicontinuity of cohomology, the second equality comes from the ampleness of L_s, the third equality is the deformation invariance of the arithmetic genus χ, and the fourth equality is by Riemann-Roch theorem (1) quoted in 1.3. Similarly, in (4) the first equality is due to the ampleness of L', while the second is Riemann-Roch (1) applied to (X', L'). In view of the equality $h^0(L^m) = h^0(L'^m)$ we thus obtain the inequality for $\chi'(m) \geq \chi(m)$ for all sufficiently large m.

Now, the polynomials χ and χ' (as well as a_i and a'_i) are determined only by X and X' respectively; therefore interchanging the role of X and X' if necessary in the above argument we may assume that $\chi'(m) \leq \chi(m)$ for all sufficiently large m. This implies that the inequality in (3) is actually an equality and the claim is proved. □

2.4. The converse of the above theorem is also true, which is rather a straightforward generalization of the Main Lemma of Burns-Rappoport [3] for the K3 case.

Theorem 2.4 [10, Th.4.3] *If two points (X, φ) and (X', φ') are not separated to each other in $\mathcal{M}$, then X and X' are bimeromorphic.*

Sketch of Proof. In this case in the Kuranishi families $f : \mathcal{X} \to S'$ and $f' : \mathcal{X}' \to S'$ of $X \cong \mathcal{X}_o, o \in S$ and $X' \cong \mathcal{X}'_{o'}, o' \in S$, respectively, there exists a sequence $\{s_k\}$ of points s_k (resp. s'_k) of S (resp. S') converging to o (resp. o') such that the corresponding fibers $\mathcal{X}_k$ over s_k and $\mathcal{X}'_k$ over s'_k are isomorphic to each other. Fix an isomorphism $u_k : \mathcal{X}_k \to \mathcal{X}'_k$ for each k and let $G_k \subseteq \mathcal{X}_k \times \mathcal{X}'_k$ be the graph of u_k. Consider $\mathcal{X}_k \times \mathcal{X}'_k$ as a fiber of the induced map $f \times f' : X \times X' \to S \times S'$ over (s_k, s'_k).

Now we may fix a smooth family of Kähler metrics $\{g_s\}_{s \in S}$ and $\{g'_{s'}\}_{s' \in S'}$ on fibers of f and f' respectively and obtain a smooth family of Kähler metrics $\{g_s \times g_{s'}\}$ on the fibers of $f \times f'$. Then it turns out that the volume V_k of the graph of G_k with respect to the metric $g_{s_k} \times g_{s'_k}$ is bounded when k tends to infinity. From this one concludes that G_k converges to an analytic subset of $X \times X'$ which is a union of a graph of bimeromorphic map and some other components which are not mapped surjectively by either of the projections to X and X'. $\square$

2.5. Let X be a K3 surface and $K \subseteq C$ the associated Kähler cone and the positive cone. The Wely group W of X is the subgroup of isometries of $H^2(X, Z)$ generated by the reflections with respect to the hyperplanes determined by the classes of (-2)-curves on X (referred as (-2)-classes). Then W acts naturally on C with K one of its fundamental domains. In particular, any element α of C which is *general* in the sense that it is not orthogonal to any (-2)-classes can be mapped to a Kähler class by an element w of the Weyl group. One important point is that this w is realized geometrically as follows. If φ is a marking of X, then $\varphi' := w\varphi$ is another marking of X and the marked surfaces (X, φ) and (X, φ') give two points of the moduli space $\mathcal{M}$ which are not separated to each other, or more precisely, one can find two deformations $f : \mathcal{X} \to S$ and $f' : \mathcal{X}' \to S$ over a 1-dimensional disc $S = \{|z| < 1\}$ of $X \cong \mathcal{X}_0$ and $X \cong \mathcal{X}'_0$ and a bimeromorphic map $u : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ over S such that u is isomorphic over $S - \{0\}$ and that the following holds true: Let $\Gamma \subseteq X \times X'$ be the graph of u; then its fiber $\Gamma_0 \subseteq X \times X'$ over 0, as a correspondence between X and X', defines a homomorphism $w : H^2(X, Z) \to H^2(X, Z)$ so that $\varphi' = \varphi \cdot w$ and that $w = \varphi^{-1} \cdot \varphi'$ sends α to a Kähler class on X'. A weak analogue of this result in the higher dimensional case proved by Heubrechts is as follows.

Theorem 2.5 [10, Cor.5.2,The.5.9] *Let (X, φ) be a marked irreducible symplectic manifold and α a "general" element of the positive cone C of X. Then there exist a marked irreducible symplectic manifold (X', φ') and a correspondence Γ_0 obtained similarly as above, such that with respect to the resulting homomorphism $w : H^2(X, Z) \to H^2(X', Z)$ we have $\varphi' = \varphi \cdot w$ and $w(\alpha)$ maps α to a Kähler class on X'.*

Here the "generality" should be taken in a certain weak sense e.g. α is not orthogonal to any element of $H^{1,1}(X)_Z$, although more precise statment is expected (cf. final remark of [10, §5]).

Sketch of the construction of f and f': Let $F : \mathcal{X} \to T, \mathcal{X}_o = X, o \in T$, be the Kuranishi family of X. Define a conic $P_\alpha := P(\varphi(F(\alpha))) \bigcap D$ in D, where $F(\alpha) = H^{2,0} \oplus C\alpha \oplus H^{0,2}$. Set $T(\alpha) = p^{-1}(P_\alpha) \bigcap T$, where $p : T \to D$ is the period map. Then if we take $t \in T(\alpha)$ suitably, the following can be realized: the image α_t of α in $H^2(\mathcal{X}_t, R)$ via the natural identification $H^2(X, R) = H^2(\mathcal{X}_t, R)$ is a Kähler class on $\mathcal{X}_t$ and the positive three space $F(\alpha_t) := H^{2,0}(\mathcal{X}_t) \oplus C\alpha_t \oplus H^{0,2}(\mathcal{X}_t) \subseteq H^2(\mathcal{X}_t, R)$ coincides with $F(\alpha) \subseteq H^2(X, R)$ with respect to the above identification. We may then consider the Calabi family $f_{\alpha_t} : X(\alpha_t) \to T(\alpha_t)$ associated to the Kähler manifold $(\mathcal{X}_t, \alpha_t)$, and by the above coincidence $T(\alpha)$ can be considered as an open subset of $T(\alpha_t)$. We then define $S = T(\alpha)$ and take $f : \mathcal{X} \to S$ (resp. $f' : \mathcal{X}' \to S$) to be the restriction of the Kuranishi family (resp. f_{α_t}) to S. □

By construction it is easy to construct a bimeromorphic map $u : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$; then the fiber over 0 of the graph of u consists of a graph of a bimeromorphic map $X \to X' = \mathcal{X}'_0$ and some other irreducible components which are not mapped surjectively onto either of the factors of $X \times X$.

Note. In the K3 case we may always take $f = f'$ and u is a composite of a finite number of elementary transformations along certain (-2)-curves corresponding to generators of the Wely group.

2.6. Many arguments in [10] depends on the study of the projectivity criterion, and the structure theorem of the ample and Kähler cones on irreducible symplectic manifolds. We roughly summarizes the results of [10] concerning these topics.

Theorem 2.6 (Criterion of projectivity) [10, Th.3.11] *An irreducible symplectic manifold X is projective if and only if there exists a holomorphic line bundle L on X such that $l^2 > 0$, where $l = c_1(L)$.*

Sketch of proof. The necessity follows immediately from the fact $l^2 > 0$ for any ample class l as already noted. Conversely, suppose that $l^2 > 0$ for some L. An element of $H^{1,1}(X)_R$ is called *pseudo-effective* if it is represented by a closed positive $(1,1)$-current. Denote by H_{psef} the closed cone spanned by pseudo-effective classes. Then by some standard argument of topological vector spaces one shows that the dual Kähler cone $\hat{K}$ is necessarily contained in H_{psef}: $(C \subseteq)\hat{K} \subseteq H_{psef}$ (cf. [10, prop.3.8]). Since C is open, it follows that there exists a positive number ε such that $l - \varepsilon\,\omega$ is again an element of H_{psef}. On the other hand, the existence of a line bundle with its chern class having this property is equivalent to X being Moishezon by a theorem of Ji-Shiffman [12]. Then as a Kähler Moishezon manifold X is projective by a theorem of Moishezon [14].

2.7. On the structure of ample cone the following result is obtained.

Theorem 2.7 (Structure of Ample Cone) [10, Cor.6.5] *Let X be an irreducible symplectic manifold and L a holomorphic line bundle on X. Then L is ample if and only if L belongs to $\hat{K} \bigcap (\hat{K}(Q))^{\hat{}}$, where $\hat{K}(Q)$ is the set of elements of $H^{1,1}(Q)$ which have positive values on K with respect to q and $\hat{K}(Q)^{\hat{}}$ is the set of $H^{1,1}$ which takes positive values on $\hat{K}(Q)$.*

Indication of the line of proof. If L is ample, then $L \in K(Q) \subseteq \hat{K}(Q)$ and the assertion is obvious. The main point is of course the sufficiency. So suppose that $L \in \hat{K} \bigcap (\hat{K}(Q))^{\check{}}$. Since $L \in \hat{K}(Q)$, we have $L^2 > 0$, and hence $L^{2n} = a_0(L^2)^n > 0$ (cf. Theorem 1.2). In particular, by the projectivity criterion (Theorem 2.6) X is projective. So if we show that $L \cdot C > 0$ for any irreducible curve on X, then by the base point free theorem we can conclude that L is ample. We refer to [10] for the proof of $L \cdot C > 0$. □

2.8. A similar result on the structure of Kähler cone is also proved by using Theorem 2.5; as a special case one obtains the following result, which was used in the proof of the surjectivity of the period map (cf. Theorem 2.1).

Theorem 2.8 (Structure of Kähler cone) *Suppose that there exists no non-trivial holomorphic line bundle on X (which is true for 'general' X). Then for X the Kähler cone K of X coincides with the positive cone C; $K = C$. The same conclusion holds also when* $\operatorname{Pic} X \cong ZL$ *for some* $L \in \operatorname{Pic} X$ *with* $q(L) \geq 0$.

3 Results of O'Grady [19]

In this section we shall summarize some of the main results of O'Grady [19]. In [19] the author consutructs explicitly an example of a compact holomorphic symplectic manifold $\tilde{M}$ of dimension 10 with second Betti number 24. It is announced that $\tilde{M}$ will in fact be shown to be irreducible symplectic in a forthcoming paper. Then this $\tilde{M}$ would give a new example of an irreducible symplectic manifold. Actually, $\tilde{M}$ is obtained as a nonsingular model of a certain moduli space of semistable sheaves on a K3 surface.

3.1. In what follows we shall give a very roughl sketch of his construction. Let S be a projective K3 surface and $O(1)$ a fixed ample line bundle on S. Fix an even integer c and denote by $M = M_c$ the moduli space of torsion-free coherent analytic sheaves on S of rank 2 and with $c_1 = 0$ and $c_2 = c$ which are (μ-)semi-stable with respect to $O(1)$. If c is odd, then M is birational to a deformation of $S^{[n]}$. So assume that c is even and $c \geq 0$. (The latter is a necessary condition for M to be nonempty.) If $c = 0$, then M consists of a single point, and when $c = 2$, M is isomorphic to S. So assume that $c \geq 4$ in what follows. Then M is a normal irreducible projective variety of dimension $4c - 6$. The singular locus Σ of M consists precisely of those points corresponding to (equivalence classes of) non-stable semistable sheaves. Thus, as a point set Σ may be identified with the set

$$\Sigma = \{\mathcal{I}_Z \oplus \mathcal{I}_W; Z, W \text{ 0-dim. subsp. of } S \text{ with } l(O_Z) = l(O_W) = c/2\},$$

where $\mathcal{I}_X$ denotes the ideal sheaf of X and $l(O_X)$ denotes the length of O_X for $X = Z, W$. One understands that Σ is thus isomorphic to the symmetric product $\mathrm{sym}^2(S^{[\frac{c}{2}]})$ of $S^{[\frac{c}{2}]}$. Denote the subspace Ω of Σ by

$$\Omega = \{\mathcal{I}_Z \oplus \mathcal{I}_Z; Z \text{ 0-dim. subsp. of } S \text{ with } l(O_Z) = c/2\},$$

which is isomorphic to $S^{[\frac{c}{2}]}$ embedded in $\Sigma \cong \mathrm{sym}^2(S^{[\frac{c}{2}]})$ as the image of the diagonal of $S^{[\frac{c}{2}]} \times S^{[\frac{c}{2}]}$. For instance when $c = 4$ we have

$$\Omega \cong S^{[2]} \subseteq \mathrm{sym}^2(S^{[2]}) \cong \Sigma.$$

Then the following holds:

Theorem 3.1 *There exists a natural resolution of singularities $r : \hat{M} \to M$ of M with the following properties:*

1) *When $c = 4$ (resp. $c \geq 6$), $r^{-1}(\Sigma)$ is a union of two (resp. three) irreducible components, say $\hat{\Omega}$ and $\hat{\Sigma}$ (resp. $\hat{\Omega}, \hat{\Sigma}$ and $\hat{\Delta}$) of codimension one in $\hat{M}$, where $r(\hat{\Sigma}) = \Sigma$ and $r(\hat{\Omega}) = \Omega$.*

2) *There exists a nonzero holomorphic 2-form $\hat{\varphi}$ on $\hat{M}$ which is nondegenerate outside $r^{-1}(\Sigma)$. When $c = 4$, $\hat{\varphi}$ is even nondegenerate outside $\hat{\Omega}$, i.e., $\hat{\varphi}$ is generically nondegenerate along $\hat{\Sigma}$.*

For instance in case $c = 4$, the resolution is achieved in two steps; first step is the blowing up $r_1 : M' \to M$ of M with center Ω, and then the second step is the blowing up $r_2 : M'' \to M'$ of M' with smooth center the proper transform of Σ. Then M'' is already nonsingular and we may take $\hat{M} = M''$ and $r = r_2 r_1$. (When $c \geq 6, M''$ still admits certain quotient singularities.) In any case, when $c = 4$, in order to get a holomorphic symplectic manifold, we have to contract $\hat{\Omega}$, which is in fact possible as the following theorem shows.

Theorem 3.2 *1) If $c = 4$, $\hat{\Omega}$ has a natural structure of a $\mathbf{P}^2$-bundle over some 7-dimensional projective manifold Y such that the restriction of the normal bundle of $\hat{\Omega}$ in $\hat{M}$ to the fiber of $\hat{\Omega} \to Y$ is the line bundle of degree -1. 2) The resulting holomorphic contraction $\nu : \hat{M} \to \tilde{M}$ along the projection $\hat{\Omega} \to Y$ coincides with the contraction of an extremal ray in $\hat{M}$; in particular $\tilde{M}$ is again projective and nonsingular, still giving a resolution $\tilde{r} : \tilde{M} \to M$ of M.*

Now the holomorphic 2-form $\tilde{\varphi}$ on $\tilde{M}$ induced by $\hat{\varphi}$ is clearly nondegenerate. We have:

Corollary 3.3 *$\tilde{M}$ is a projective (holomorphic) symplectic manifold.*

Remark. When $c \geq 6$, one can contract $\hat{\Delta}$ and $\hat{\Omega}$ successively to obtain a projective manifold, denoted again by $\tilde{M}$, but this time the induced holomorphic 2-form $\tilde{\varphi}$ is degenerate along the image $\tilde{\Sigma}$ of Σ in $\tilde{M}$. One can further contract Σ, but what we end up with is a normal projective variety $M_\flat$ which is minimal, but not smooth. In view of this, the existence of a symplectic nonsingular model of M is suspected when $c \geq 6$.

2.2. The reason why this manifold should give us a new example of symplectic manifold is topological.

Theorem 3.4 *In the notation above, we have $b_2(\tilde{M}) \geq 24$.*

Hence, if $\tilde{M}$ is irreducible, i.e., if $h^{2,0}(\tilde{M}) = 1$ and $\tilde{M}$ is simply connected, $\tilde{M}$ provides certainly a new example of irreducible symplectic manifold. In fact it is claimed that the verification of this irreducibility should be treated in a seperate paper. Also it is claimed that $b_2(\tilde{M}) = 24$. Note that changing the chosen polarization $O(1)$ one would obtain more than one such example, which would be bitarionally, and hence up to deformation, equivalent to each other.

The setting of the proof of Theorem 3.4 is as follows. Let M^0 be the Zariski open subset of M whose points correspond precisely to stable locally free sheaves. By the Kobayashi-Hitchin correspondence M^0 may be thought of as the moduli space of anti-self-dual connections on the underlying smooth vector bundle. As such, we have the so-called Uhlenback's compactification M_U of M^0, where the general points x of the boundary corresponds to connections which have a singularity at a unique point, say $p(x)$, of S.

It is known that M_U has a natural structure of a normal projective variety and that there exists a natural morphism $\delta : M \to M_U$ of algebraic varieties inducing the identify on M^0 (cf. [15], [13]). For a general point x of the boundary of M_U the inverse image $\delta^{-1}(x)$ parametrizes the semistable sheaves which is locally free outside $p(x)$. From this it follows that $\delta^{-1}(x) \cong \boldsymbol{P}^1$.

Now composing the Donaldson's μ-map $\mu : H^2(S) \to H^2(M_U)$ with the pull-back map $\delta^* : H^2(M_U) \to H^2(M)$ we obtain a map

$$\alpha := \delta^* \mu : H^2(S) \to H^2(M).$$

It is claimed that the injectivity of α is deduced from the formula (cf. [15])

$$\text{const} \int_S a \wedge a = \int_M \wedge^{10} \alpha(a), \quad a \in H^2(M).$$

Thus the image of α provides a 22 dimensional subspace of $H^2(M)$, and together with any ample class on M this generates a 23 dimensional subspace, say E, of $H^2(M)$ as one sees by restricting the classes to a fiber $\delta^{-1}(x) \cong \boldsymbol{P}$ as above. Then the image $\tilde{r}^*(E)$ by the injection $\tilde{r}^* : H^2(M) \to H^2(\tilde{M})$ and the class $[\nu(\hat{\Sigma})] \in H^2(\tilde{M})$ generate a 24-dimensional subspace, thus proving Theorem 3.4.

2.3. We also mention some words on the method of resolution of singularities in Theorem 3.1. As is well-known, the moduli space M is obtained in the form $M = Q^{ss}//G$, where Q is a *Quot* scheme which is in this case a certain G-invariant reduced and irreducible projective scheme embedded in a complex projective space $\boldsymbol{P}^{(N-1)}$ for some positive integer N, Q^{ss} is the set of its semistable points with respect to the induced action of the reductive group $G := PGL(N)$ and $//$ denotes the GIT quotient as usual. Since this quotient is not a geometric quotient, especially along the singular locus of M, it is not easy to understand the nature of the singularities of M, and hence, also not easy to construct its resolution. On the other hand, there exists a general method for the resolutions of GIT quotients due to Kirwan [11]. Roughly it says the following:

Let Y be a projective scheme with an ample line bundle $O(1)$. Suppose that a reductive algebraic group G acts regularly on Y with a fixed lifting of the action on $O(1)$. Let $\pi : \tilde{Y} \to Y$ be the blowing up of Y with center a G-invariant closed subscheme V. Let E be the exceptional divisor of the blowing up. Then $\tilde{Y}$ is a G-scheme with G-action lifting naturally to the action on $\tilde{O}(k) := O(k) \otimes (-E)$ which is ample for all sufficiently large k. Fix such a k and then we can speak of the (semi)stability of a point of Y (resp. $\tilde{Y}$) with respect to the given G-action. Let Y^s and $\tilde{Y}^s$ (Y^{ss} and $\tilde{Y}^{ss}$) be the set of stable (resp. semistable) points of Y and $\tilde{Y}$ respectively. Then Kirwan's general theorem implies that

Theorem 3.5 (Kirwan) *$\pi(\tilde{Y}^{ss}) \subseteq Y^{ss}$ and $\pi^{-1}(Y^s) \subseteq \tilde{Y}^s$ so that we have an induced (birational) morphism $\pi : \tilde{Y}^{ss}//G \to Y^{ss}//G$. Moreover, if we choose k suitably, π is isomorphic to the blowing up of $Y^{ss}//G$ with center $V//G$.*

Coming back to our case, note that Q parametrizes (all the) torsion-free semistable sheaves $\mathcal{F}$ on S with $c_1(\mathcal{F}) = 0, c_2(\mathcal{F}) = c$ and of rank 2. Let $\Omega_Q^0 = \{\mathcal{F} \in Q; \mathcal{F} \cong \mathcal{I}_Z \oplus \mathcal{I}_Z\}$ and $\Sigma_Q^0 = \{\mathcal{F} \in Q; \mathcal{F} \cong \mathcal{I}_Z \oplus \mathcal{I}_W\}$ and denote by Ω_Q and Σ_Q the closures in Q of Ω_Q^0 and Σ_Q^0 respectively. As the center of the first blowing up $\pi_Q : R \to Q$ we take Ω_Q, and then we take the proper transform Σ_R of Σ_Q as the center of the second blowing up $\pi_R : S \to R$ (taking a suitable k appearing in Kirwan's theorem each time). Then O'Grady proves the following:

Proposition 3.6 *$S^s = S^{ss}$ and this common set is nonsingular. In particular, $S^{ss}//G \cong S^s/G$, and it has thus at worst quotient singularities. Moreover when $c = 4$, it is nonsingular.*

In case $c = 4$ $\hat{M} = S^s/G$ and the resulting map $\hat{M} = S^s/G \to M = Q^{ss}//G$ gives a resolution of M, which is in fact isomorphic to the resolution $r : \hat{M} \to M$ described before.

When $c = 6$ we need one more blowing up to obtain a resolution.

References

[1] Geométrie des surfaces K3: modules et périodes, Séminaires Palaiseau. ed A. Beauville, J.-P. Bourguignon, M. Demazure. *Astérisque* 126 (1985).

[2] Beauville, A. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle, *J. Diff. Geom.* 18 (1983), 755–782.

[3] Burns, D., Rapoport, M. On the Torelli Problem for Kählerian K3 Surfaces, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 8 (1975), 235–274.

[4] Debarre, O. Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles, *C. R. Acad. Sc. Paris* 299 (1984), 681–684.

[5] Beauville, A. and Donagi, R. La variété des droits d'une hypersurface cubique de dimension 4, *C. R. Acad. Sci. Paris* 301 (1985), 703–706.

[6] Fujiki, A. On primitively symplectic compact Kähler V-manifolds of dimension four, In: Classification of algebraic and analytic manifolds. *Progr. Math.* *39* (1983), 71–250.

[7] Fujiki, A. On the de Rham Cohomology Group of a Compact Kähler Symplectic Manifold, *Adv. Stud. Pure Math.* 10 (1987), 105–165.

[8] Göttsche, L., Huybrechts, D. Hodge numbers of moduli spaces of stable bundles on K3 surfaces, *Int. J. Math.* 7 (1996), 359–372.

[9] Huybrechts, D. Birational symplectic manifolds and their deformations, *J. Diff. Geom.* 45 (1997).

[10] Heubrechts, D. Compact hyperkähler manifolds: Basic results, alg-geom/9705025

[11] F. Kirwan. Partial desingularizations of quotients of nonsingular varieties and their Betti numbers, *Ann. of Math.* 122 (1985), 41–85.

[12] Ji, S., Shiffman, B. Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents, *J. Geom. Anal.* 3 (1993), 37–61.

[13] J. Li. Algebraic geometric interpretation of Donaldson's polynomial invariants of algebraic surfaces, J. Diff. Geom. 37 (1993), 417–466.

[14] Moishezon, B. G. On n-dimensional compact varieties with n-algebraic independent meromorphic functions, *Am. Math. Soc. Transl.* 63 (1967), 51-177.

[15] J. Morgan. Comparison of the Donaldson polynomial invariants with their algebro-geometric analogues, *Topology* 32 (1993), 449–488.

[16] Mukai, S. Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface, *Invent. Math.* 77 (1984), 101–116.

[17] Mukai, S. Moduli of vector bundles on K3 surfaces, and symplectic manifolds, *Sugaku Expositions* 1(2) (1988), 138–174.

[18] O'Grady, K. The weight-two Hodge structure of moduli spaces of sheaves on a K3 surface. *J. Alg. Geom.* 6 (1997), 599–644.

[19] O'Grady, K. Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3, (Preliminary version), *alg-geom/9708009.*

[20] Tian, G. Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric, In: Yau, S. T. *Mathematical Aspects of String theory.* World Scientific (1987), 629–646.

[21] Yoshioka, K. An application of exceptional bundles to the moduli of stable sheaves on a $K3$ surface, *alg-geom 9705027.*

Below we add some more references related to compact holomorphic symplectic manifolds which have come to my attention while preparing this manuscript. (As such the list is far from being complete.)

References

[1] Beauville, A. Some remarks on Kähler manifolds with $c_1 = 0$, *in Classification of algebraic and analytic manifolds*, Progr. Math. 39 (1983), 1-26.

[2] Campana, F. Twistor spaces and non-hyperbolicity of certain symplectic Kähler manifolds, In: Ed. K. Diedrich, *Complex Analysis*, Proc. of Int. Wrokshop, Wuppertal 1990, 64–69 Aspects of Math. Vieweg.

[3] Bogomolov, F. A. On the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class, *Math. USSR-Sb.* 22 (1974), 580–583.

[4] Bogomolov, F. A. Hamiltonian Kähler manifolds, *Sov. Math. Dokl.* 19 (1978), 1462–1465.

[5] Bogomolov, F. A. On the cohomology ring of a simple hyperkähler manifold (on the results of Verbitsky), *GAFA* 6(4) (1996), 612–618.

[6] Campana, F. Densité des variétés Hamiltoniennes primitives projectives, *C. R. Acad. Sc. Paris* 297 (1983), 413–416.

[7] Guan, Z.-D. Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which are not Kähler III, *Int. J. Math.* 6 (1995),709–718.

[8] Markushevich, D. Integrable symplectic structures on compact complex manifolds, Math. USSR Sbornik 59 (1988), 459–469.

[9] Markushevich, D. Completely integrable projective symplectic 4-dimensional varieties, *Izv. Ross. Akad. Nauk* 59 (1995),157–184.

[10] Markushevich, D. Lagrangean families of Jacobians of genus 2 curves, *preprint*, 1996.

[11] Matsusita, D., On fiber space structures of a projective irreducible symplectic manifold, *to appear in Topology.*

[12] Salamon, S.M., On the cohomology of Kähler and Hyper-Kähler manifolds, *Topology*, (1994).

[13] Todorov, A. N. The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(n \geq 3)$ (Calabi-Yau) manifolds, *Comm. Math. Phys.* 126 (1989), 325–346.

[14] Varouchas, J. Kähler Spaces and Proper Open Morphisms, *Math. Ann.* 283 (1989), 13–52.

[15] Verbitsky, M. Trianalytic subvarieties of hyperkähler manifolds, *Geom. Funct. Anal.* 5 (1995), 92–104.

[16] Verbitsky, M. hyperholomorphic bundles over a hyperkähler manifold, *J. Alg. Geom.* 5 (1996), 633–669.

[17] Verbitsky, M. Cohomology of compact hyperkähler manifold and its applications, *Geom. Funct. Anal.* 6(4) (1996), 602–611.

[18] Verbitsky, M. Deformations of trianalytic subvarieties of hyperkähler manifolds, *alg-geom. 9610010.*

[19] Verbitsky, M. Desingularization of singular hyperkähler varieties, I, *Math. Res. Letters* 4, 259–271, (1997).

[20] Verbitsky, M. Desingularization of singular hyperkähler varieties, II, *alg-geom/9612013.*

[21] Verbitsky, M. Trianalytic subvarieties of Hilbert schemes of points on a K3 surface, *alg-geom/9705004.*

[22] Verbitsky, M. Hyperholomorphic sheaves and new examples of hyperkähler manifolds, *alg-geom/9712012.*

[23] Voisin, C. Sur la stabilité des souvariétés lagrangiennes des variétés symplectiques holomorphes, In: *Complex Projective Geometry*, eds Ellingsrud, G. et al., London Math. Soc. Lecture Notes 179, 294–302.

Akira Fujiki
Department of Mathematics
Osaka University
Toyonaka, Osaka 560, Japan

既約 Symplecitc 多様体のファイバー構造について

松下 大介

E-mail Address tyler@kurims.kyoto-u.ac.jp

表題の既約 Symplectic 多様体とは単連結 Compact Kähler 多様体で次の二つの条件を満たすものである。

(1) 非退化な正則２形式が存在する。

(2) $h^2(X, \Omega_X^2) = 1$

このような多様体は次の Bogomolov の分解定理によって, $c_1(X) = 0$ のクラスの多様体の一つの構成要素と考えることが出来る。

Theorem 1 **(Bogomolov Decompositon)** X を $c_1(X) = 0$ であるような *Compact Kähler* 多様体とする。適当な不分岐被覆 $\pi : \tilde{X} \to X$ をとれば X は次のような直積に分解する。

$$\tilde{X} \cong T \times \prod X_i \times \prod A_i$$

但し, T はトーラス, X_i は既約 *Symplectic* 多様体, A_i は *Calabi-Yau* 多様体。

非退化な正則２形式の存在から既約 Symplectic 多様体の次元は偶数次元となるが, ２次元の場合, このクラスに属するのは $K3$ 曲面であって, ４次元以上の既約 Symplectic 多様体は $K3$ 曲面の高次元版と考えることが出来る。 $K3$ 曲面はしばしば楕円曲線のファイバー構造をもつが, これがどう高次元化されるかを調べたところ次の定理を得た。

Theorem 2 X を $2n$ 次元射影的既約 *Symplectic* 多様体とする。X がファイバー構造 $f : X \to B$ を持つとき, B 及び f の一般ファイバーは次の性質を満たす。

(1) B は n 次元であり, 高々 Q 分解的 *log terminal* 特異点のみもつ。

(2) f の一般ファイバー F は $K_F \sim 0$ であり, 適当な不分岐被覆をとれば *Abel* 多様体となる。

(3) $-K_B$ は豊富であり, B のピカール数は 1 である。

(4) f のファイバーは B の余次元 3 の点を除いたところで同じ次元をもつ。

対数的 CALABI-YAU 多様体、とくにその上での曲線の数え上げ

高橋宣能

以下、対数的 Calabi-Yau 多様体という場合、$\mathbb{C}$ 上の射影的な多様体 X と係数が 0 から 1 までの範囲にあるような X 上の因子 B(「境界」) の対 (X, B) であって、ある 0 でない整数 m について $m(K_X + B) \sim 0$ となるものをだいたい意味するものとする。準射影代数多様体があるとき、射影多様体への埋め込みであって補集合が正規交差因子であるようなものを考えることができ、この補集合を境界として考えることにより対数的多様体が得られる (もちろん一意的にきまるわけではない) ので、これが対数的 Calabi-Yau 多様体になるときもとの多様体を「開 Calabi-Yau 多様体」と考える。

ここでは、Calabi-Yau 多様体に関するさまざまな問題の類似について、曲線の数え上げを中心として (というよりそれ以外のことについては文献紹介のみ) 述べる。

1. 数え上げ以外の話題

ここでは数え上げ以外のことについて (本当に「ざっと」で、ほとんど読めていないものもあるが) 紹介する。

まず、対数的 Calabi-Yau 多様体にはどのようなものがあるか、ということについて、あとで述べる数え上げでは有理多様体から非特異反標準因子を除いたようなものを考えるが、反対に、境界 $B = 0$ で log terminal な特異点 (曲面ならば商特異点) を持つようなものを考えることもできる。とくに、標準特異点を持つ K3 曲面で特別な特異点や自己同型をもつようなもの、あるいはそれと関連して log terminal な特異点を持つ「log Enriques 曲面」の分類は、K3 格子や有理曲面上の曲線の配置などと関連してくることになる。また、有理 log Enriques 曲面は 3 次元 Calabi-Yau 多様体上にファイバー空間の構造が入るときその基底空間になることがある点からも興味深い ([O1], [O2])。これについては [OZ1], [OZ2], [R], [Z1]-[Z6] などで調べられているが、たとえば、標準被覆が A_{19} 型の特異点を持つときにその log Enriques 曲面を A_{19} 型とよぶ、などとするとき、A_{19}, D_{19}, D_{18} 型の 有理 log Enriques 曲面は同型を除いて一意的に存在し、A_{18} 型は 2 種類ある、というような結果が知られている ([OZ1], [OZ2])。

[K] では Fano 多様体から反標準因子を除いたところでの Ricci 平坦計量が調べられ、とくに偏極 K3 曲面が退化するときの Ricci 平坦計量のふるまいについて述べられている。

開曲面のミラーについて調べたものとしては、[KKL] という物理寄りのものがあるようである (まだ全然読めていない)。

というわけで、いろいろ教えていただければ幸いです。

---

2. $\mathbb{P}^2\setminus$(三次曲線) 上の数え上げ

Calabi-Yau 多様体、とくに 3 次元のものについて、その上の各次数、種数の曲線を数え上げて生成関数を作ると、この関数は「ミラー多様体 (族)」上の周期積分などに関連した関数に等しくなるものと予想されており、たとえば 3 次元 5 次超曲面上の有理曲線の数え上げについての予測などは (有限性などについて目をつぶれば) 確かめられている。

そこでこれの開 (対数的) 多様体版について調べてみたい。この節では $\mathbb{P}^2\setminus$(三次曲線) (あるいは一般に有理曲面から反標準因子を除いたもの) 上の各次数の曲線で正規化が $\mathbb{A}^1$ になるものの数え上げについて述べる。まずは「純数学的」に数え上げを行なってみて得られた数列から「ミラー」を推定しよう、などと考えていたわけだが、ここで使っている方法は数えている曲線の次数の低いところでしか通用せず、数列全体のとるべき形の推測もまだである。

$B\subset\mathbb{P}^2$ を非特異 3 次曲線とする。このとき、被約かつ既約な d 次曲線 $C\subset\mathbb{P}^2$ で $(C\setminus B)^\nu\simeq\mathbb{A}^1$ ($^\nu$ は正規化) となっているものを数えたい。以下、このような曲線を安易に "直線" と呼ぶことにすると、"直線" C について $C\cap B$ は一点 P からなり、かつこの P は、H を直線の B への制限としたとき $3dP\sim dH$ となるような点である。そのような点は $(3d)^2$ 個あるが、さらに $3d'P\sim d'H$ となる $0<d'<d$ があるかどうかによって $C\cap B=\{P\}$ となるような "直線" C の数が違ってくるので、ここからはそのような d' がない場合 (「原始的」な場合) のみを扱うことにする。

そこで、$d=\min\{0<e|3eP\sim eH\}$ となる点 $P\in B$ について、

$$\begin{aligned} M_d &:= \{C\subset\mathbb{P}^2|\deg C=d, C\text{ は “直線”}\} \\ n_d &:= \text{“\#”}M_d \end{aligned}$$

とおく。ただし M_d には 0 次元スキームの構造が自然に入っており、"#" はその次数を意味する。また、上の定義では P をあらわに書いていないが、実際現在までに得られた結果に関する限り n_d は P の取り方によっていない。

結論は、後で述べる仮定のもとで、次のようになる。

d	1	2	3	4	5	6	7	8
n_d	1	1	3	16	113	948	8974	92840

まず $d=1,2$ の場合は容易、$d=3$ の場合は B と一点 P だけで交わる 3 次曲線のなす線形束から得られる elliptic fibration のオイラー数を調べればよい。

次に、$B:F(X,Y,Z)=0$ に対して

$$(Y:F(x,y,z)=1)\subset\mathbb{A}^3$$

とおく。$\mathbb{P}^2\setminus B$ のなかの d 次 "直線" は d 次斉次式 $X(s,t),Y(s,t),Z(s,t)$ であって $F(X(s,t),Y(s,t),Z(s,t))=s^{3d}$ となるものでパラメータ付けされる。このとき、s に 1 の $3d$ 乗根を代入することにより Y 上の d 次 "直線" が 3 つ得られる。逆の方向も調べると、結局 $\mathbb{P}^2\setminus B$ のなかの d 次 "直線" の数は Y 上の d 次 "直線" の数の三分の一になる。3 次曲面が $\mathbb{P}^2$ の 6 点をブローアップしたものとしてあらわされることを使うと、$\mathbb{P}^2\setminus B$ のなかの d 次 "直線" の数を、次数が d より小さい平面有理曲線

であって、ある 3 次曲線との交わりについて様々な条件を満たすようなものの数で表すことができる。

n_4 はこれを使って得られるが、たとえば n_5 を求めるためには、次の定義のもとで $n(4;2,1^5)$ とよばれる数を求めなければならない:

Definition 2.1. 正の整数 e, a_i について、B を平面 3 次曲線、$P, P_i \in B$ を $(3e - \sum a_i)P + \sum a_i P_i \sim eH$($H$ は直線の制限) を満たすものの中で「一般の位置」にあり「原始的」なもの、$g : X \to \mathbb{P}^2$ を P_i でのブローアップ 、$E_i := g^{-1}P_i$ とする。$3e - \sum a_i > 0$ (resp. $= 0$) のとき、P を無限遠点とする $X \setminus g_*^{-1}B$ の中の "直線" (resp. $g_*^{-1}B$ と交わらない有理曲線) であって $eg^*H - \sum a_i E_i$ と線形同値なもののなす集合を $M(e;(a_i))$、$n(e;(a_i)) :=$ "#"$M(e;(a_i))$ とする (たとえば $n_d = n(d;)$(a_i は無し))。

さらに、$h : Y \to X$ を P でのブローアップとして、$3e - \sum a_i - b > 0$ (resp. $= 0$) のとき、$eg^*H - \sum a_i E_i$ と線形同値な X 上の曲線 C であって $g_*^{-1}B$ と P のみで交わり、P で b 重点を持ち、かつ $h^{-1}C$ が $Y \setminus (g \circ h)_*^{-1}B$ の中の "直線" (resp. $(g \circ h)_*^{-1}B$ と交わらない有理曲線) であるようなもののなす集合を $M(e;(a_i);b)$、$n(e;(a_i);b) :=$ "#"$M(e;(a_i);b)$ とする。

このとき、$n(e;(a_i)), n(e;(a_i);b)$ たちの間に次のような関係式がある。

Theorem 2.1. *(1)* $3e - \sum a_i > 0$ かつ $M(e;(a_i))$ の元がすべて P で非特異ならば、$n(e;(a_i)) = n(e;(a_i);1)$.

(2) $3e - \sum_{i=1}^{l+1} a_i = 0$ のとき、$n(e;(a_i)_{i=1}^{l+1}) = n(e;(a_i)_{i=1}^{l};a_{l+1})$.

(3) $3e - \sum_{i=1}^{l+1} a_i > 0$ のとき、以下を仮定する*:*

(a) $3e - \sum_{i=1}^{l+1} a_i = 1$*(resp.* > 1*)* のとき、$M(e;(a_i)_{i=1}^{l};a_{l+1}+1)$ の元はすべて *(*上の定義の中の*)* E と正規交差 *(resp.* P において E と正規交差*)*、

(b) $M(e;(a_i)_{i=1}^{l};a_{l+1}+k)(k \geq 2)$ の任意の元は E と正規交差。

このとき

$$n(e;(a_i)_{i=1}^{l+1}) = n(e;(a_i)_{i=1}^{l};a_{l+1}) + (1 + \delta_{3e-\sum_{i=1}^{l+1} a_i,1}a_{l+1})n(e;(a_i)_{i=1}^{l};a_{l+1}+1).$$

□

n_7, n_8 を求めるためには $e = 6, 7$ の場合に定理を適用しなければならないが、そのために必要な仮定の部分はまだ証明できていない。

以上のように、現在までの n_d の求め方はエレガントとはいえないものであり、任意の d についてこの方法で n_d を求めることはできないだろうと思っている。

3. $\mathbb{P}^1 \setminus$ (二点) 上の数え上げ

3 次元 Calabi-Yau 多様体上の有理曲線の数え上げ以外に、もう一つよくわかっている (かつ面白い) ものとして、楕円曲線「上の曲線」、すなわち楕円曲線の (分岐) 被覆の数え上げがある。まずその結果の一部を [Di] に従って説明し、それから [Di] にならって $\mathbb{P}^1 \setminus$ (二点) の被覆の数え上げを行なう。

E を $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線、$g \geq 1, d \geq 1$ を整数、$P_1, \ldots, P_{2g-2} \in E$ を異なる点として、

$$X_{g,d} := \{f : C \to E| \ C \text{は連結}, f \text{は} P_1, \ldots, P_{2g-2} \text{で単純分岐、} \\ \text{その外では不分岐な} \ d \ \text{次被覆}\}/(E \text{上の同型})$$

とおく。ただし、$f : C \to E$ が $P \in E$ で単純分岐とは $f^{-1}(P) = \{Q_1, \ldots, Q_e\}$, $Q_1, \ldots, Q_{e-1}$ で f は不分岐、Q_e の近傍では $z = w^2$ のかたちになっていることをいう(したがって $e = d-1$)。

ここで

$$N_{g,d} := \sum_{f \in X_{g,d}} 1/(\#\mathrm{Aut}(f).(2g-2)!)$$

とおく。ただし f の自己同型とは E 上の自己同型のことである。さらに

$$F_1(q) := -\frac{1}{24}\log q + \sum_{d=1}^{\infty} N_{1,d}q^d, \quad F_g(q) := \sum_{d=2}^{\infty} N_{g,d}q^d (g \geq 2)$$

$$Z(q,\lambda) := \exp\left(\sum_{g=1}^{\infty} F_g(q)\lambda^{2g-2}\right)$$

とおく。

Theorem 3.1. *([Do])*

$$Z(q,\lambda) = q^{-1/24} \oint \frac{dz}{2\pi i z} \prod_{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}+1/2} (1 + zq^p e^{\lambda p^2/2})(1 + z^{-1}q^p e^{-\lambda p^2/2}),$$

つまり、$q^{-1/24}\prod_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+1/2}(1+zq^p e^{\lambda p^2/2})(1+z^{-1}q^p e^{-\lambda p^2/2})$ の z に関する定数項である。

また、$g \geq 2$ のとき、$F_g(e^{2\pi i t})$ は t に関する重み $6g-6$ の *quasi-modular form* である。

この結果の $T = \mathbb{C}^\times = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$ の場合の類似を考える。

さしあたりここで「$\mathbb{C}^\times$ の被覆」として考えるのは、$\mathbb{P}^1$ の被覆であって $0, \infty$ 上の点が一つずつしかないものとする。すなわち、$g \geq 1, d \geq 1$ を整数、$P_1, \ldots, P_{2g-2} \in \mathbb{C}^\times$ を異なる点として、

$$X_{g,d} := \{f : C \to \mathbb{P}^1| \ f \text{は} P_1, \ldots, P_{2g-2} \text{で単純分岐、} 0, \infty \text{で完全分岐、} \\ \text{その外では不分岐な} \ d \ \text{次被覆}\}/(\mathbb{P}^1 \text{上の同型})$$

とする。上と同様に

$$N_{g,d} := \sum_{f \in X_{g,d}} 1/(\#\mathrm{Aut}(f).(2g-2)!)$$

$$F_1(q) := \sum_{d=1}^{\infty} N_{1,d}q^d, \quad F_g(q) := \sum_{d=2}^{\infty} N_{g,d}q^d (g \geq 2)$$

$$Z(q,\lambda) := \sum_{g=1}^{\infty} F_g(q)\lambda^{2g-2}$$

とおく。ここで F_1 の "log" の項は (よくわからないので) 削った。また、$X_{g,d}$ の定義で C が連結になるという制限をつけなかった (自動的に連結になる) ことを反映して、$Z(q,\lambda)$ の定義に指数関数は入れない。

このとき、次のことが成り立つ。

Theorem 3.2.

$$\left(q\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 Z(q,\lambda) = \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+1/2} q^p e^{\lambda p^2/2}\right)\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+1/2} q^p e^{-\lambda p^2/2}\right)$$

また、$g \geq 2$ のとき $F(q^{-1}) = F(q)$ が成り立つ。

Remark 3.1. つまり 3.1 での積のうち $\prod_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+1/2}(1+zq^pe^{\lambda p^2/2})$ での z の係数と $\prod_{p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}+1/2}(1+z^{-1}q^pe^{-\lambda p^2/2})$ での z^{-1} の係数を掛けたものが出てくる。

node をもつ有理曲線の smoothing として楕円曲線を見るときの "Fusion rule" で自然に出てくる項になっている。

最初のいくつかを挙げると、

$$F_1(q) = -\log(1-q)$$

$$F_2(q) = \frac{q^2}{2\cdot 2!\cdot(1-q)^4}$$

$$F_3(q) = \frac{q^2(1+28q+68q^2+28q^3+q^4)}{2\cdot 4!\cdot(1-q)^8}$$

$$F_4(q) = \frac{q^2(1+312q+7858q^2+43504q^3+74850q^4+43504q^5+7858q^6+312q^7+q^8}{2\cdot 6!\cdot(1-q)^{12}}$$

などとなる。

証明は Theorem 3.1 と同様であるが、概要を述べておく。

まず、一般に C をコンパクトリーマン面、$P_1,\dots,P_b \in C$ を異なる点として、d 次被覆 $\pi: D \to C$ で P_i 以外で不分岐なものがあるとき、P_i たちと異なる $P\in C$ をとって $\pi^{-1}(P)$ に番号をつけると、準同型 $f: \pi_1(C\setminus\{P_1,\dots,P_b\}) \to S_d$ (S_d は d 次対称群) が定まる。P_i のまわりを左まわりに一周する経路に対応して基本群の元が共役を除いて定まるから、その共役類を c_i とする。このとき、$\pi^*(P_i) = \sum_{j=1}^n a_jQ_j$ となっているとすると、c_i の元 γ_i について $f(\gamma_i)$ は $(1\,2\,\dots\,a_1)(a_1{+}1\,\dots\,a_1{+}a_2)\dots\dots(\sum_{j=1}^{n-1}a_j{+}1\,\dots\,d)$ と共役である。

そこで、π^b を $\mathbb{C}^\times\setminus\{P_1,\dots,P_b\}$ の基本群、$\gamma_i (i=1,\dots,b)$ を P_i を一周する経路、γ_0, γ_∞ を $0,\infty$ を一周する経路、c を互換の共役類、c' を $(12\dots d)$ の共役類として

$$\mathrm{Hom}'(\pi^b, S_d) := \{f\in \mathrm{Hom}(\pi^b,S_d) | f(\gamma_i)\in c (i=1,\dots,b), f(\gamma_0), f(\gamma_\infty)\in c'\}$$

と定めると $X_{g,d}$ と $\mathrm{Hom}'(\pi^{2g-2}, S_d)/S_d$ の間に一対一対応があることになり、また $N_{g,d} = \#\mathrm{Hom}'(\pi^{2g-2}, S_d)/(\#S_d \# S_{2g-2})$ であることがわかる。

そこでさらに一般に、C を種数 h の曲線、$\pi_1^{b,h}$ を $C \setminus \{P_1, \ldots, P_b\}$ の基本群 (したがって $\pi^b = \pi_1^{b+2,0}$)、$\gamma_i (i = 1, \ldots, b)$ を P_i を一周する経路、G を有限群、c_i を G の共役類とするとき

$$Z_h(c_1, \ldots, c_b) := \#\{f \in \mathrm{Hom}(\pi^{b,h}, G) | f(\gamma_i) \in c_i (i = 1, \ldots, b)\}/\#G$$

と定めると、$N_{g,d} = Z_0(\overbrace{c, \ldots, c}^{2g-2\text{ 個}}, c', c')/\#S_{2g-2}$ となるが、この「分配関数」$Z_h(c_1, \ldots, c_b)$ について次の「Verlinde 型」の公式が成り立つ。

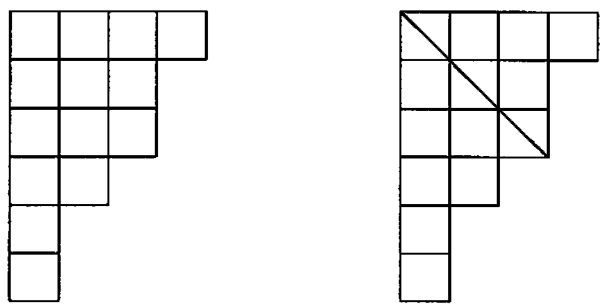
Lemma 3.3. *([DW], [FQ])*

$$Z_h(c_1, \ldots, c_b) = \sum_{r \in R} \left[\left(\frac{\#G}{\dim r} \right)^{2h-2} \prod_{j=1}^{b} f_r(c_j) \right],$$

ただし R は G の既約表現の同型類の集合、χ_r を $r \in R$ の指標として $f_r(c) := \#c.\chi_r(c)/\dim r$ とする。*(指標の直交性と fusion rule を使えば示せる。)*

d 次対称群 S_d の既約表現は d 次の Young 図形 (の台) と一対一に対応付けられていた。これを一応述べておく ([I] より)。

「台」とは、要するに下の図の (a) のようなものである:



(a) (b)

このとき、横に並んでいる正方形の数を上から $(d_1, \ldots, d_s)$ として符合数と言い、$d := \sum d_i$ を次数と言う (上の例 (a) の場合 $(4,3,3,2,1,1)$)。これらの正方形に 1 から d までの整数を書き込んだものが Young 図形である。

B を d 次の Young 図形として、$c_B := \sum_{\sigma \in H_B, \tau \in V_B} \mathrm{sgn}(\tau)\sigma\tau$、ただし $H_B \subset S_d$ は B の各行 (横一列) に入っている数の集合を保つ置換のなす部分群、$V_B \subset S_d$ は B の各列 (縦一列) に入っている数の集合を保つ置換のなす部分群とする。このとき、$\mathbb{C}[S_d]c_B$ は S_d の既約表現になり、この対応で d 次の台と S_d の既約表現は一対一に対応する。

この表現の指標は Frobenius によって求められている。その結果を上の c, c' の場合に述べるために、台を (b) のように対角線で切り、右上の部分の各行の「面積」を $(r_1, \ldots, r_t)$、左下の部分の各列の「面積」を $(s_1, \ldots, s_t)$ とする (上の例の場

合 $(7/2,3/2,1/2),(11/2,5/2,1/2))$。これらは $r_i, s_i \in 1/2+\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r_1 \geq \cdots \geq r_t$, $s_1 \geq \cdots \geq s_t$ を満たすが、逆にそのような r_i, s_i (同数) が与えられれば台をつくることができることに注意しておく。

このとき、

$$f_r(c) = \frac{1}{2}\left(\sum r_i^2 - \sum r_i^2\right), \quad f_r(c') = \begin{cases} \pm 1 & (t=1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となる (ちゃんと調べていないが、おそらくここから Remark 3.1 が解釈できるのだろう)。

これを使うと、

$$\begin{aligned} Z(q,\lambda) &= \sum_{d=1}^{\infty} q^d \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2g-2}}{(2g-2)!} \sum_r \left(\frac{\#S_d}{\dim r}\right)^{-2} f_r(c)^{2g-2} f_r(c')^2 \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} q^d \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2g-2}}{(2g-2)!} \sum_{r,s \in 1/2+\mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\frac{\#S_d}{\dim r_{r,s}}\right)^{-2} f_{r_{r,s}}(c)^{2g-2} \left(\frac{\#c'}{\dim r_{r,s}}\right)^2 \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} q^d \sum_{b=0}^{\infty} \frac{\lambda^b}{b!} \sum_{\substack{r,s \in 1/2+\mathbb{Z}_{\geq 0} \\ r+s=d}} \frac{1}{d^2} \left(\frac{r^2-s^2}{2}\right)^b \end{aligned}$$

ただし $r_{r,s}$ は $t=1, r_1=r, s_1=s$ に対応する表現とする。

よって

$$\begin{aligned} \left(q\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 Z(q,\lambda) &= \sum_{d=1}^{\infty} q^d \sum_{b=0}^{\infty} \frac{\lambda^b}{b!} \sum_{\substack{r,s \in 1/2+\mathbb{Z}_{\geq 0} \\ r+s=d}} \left(\frac{r^2-s^2}{2}\right)^b \\ &= \sum_{r,s \in 1/2+\mathbb{Z}_{\geq 0}} q^{r+s} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{\lambda^b}{b!} \left(\frac{r^2-s^2}{2}\right)^b \\ &= \Big(\sum_{p \in 1/2+\mathbb{Z}_{\geq 0}} q^p e^{\lambda p^2/2}\Big)\Big(\sum_{p \in 1/2+\mathbb{Z}_{\geq 0}} q^p e^{-\lambda p^2/2}\Big) \end{aligned}$$

となる。さらに $\sum_{p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}+1/2} q^p = q^{\frac{1}{2}}/(1-q)$ および $q(\partial/\partial q) q^x = x q^x$ を使うと、

$$\left(q\frac{\partial}{\partial q}\right)^2 Z(q,\lambda) = \left(e^{\frac{\lambda}{2}(q\frac{\partial}{\partial q})^2} \frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\right)\left(e^{-\frac{\lambda}{2}(q\frac{\partial}{\partial q})^2} \frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\right)$$

となり、λ の巾で展開して $F_g(q) = F_g(q^{-1}) (g \geq 2)$ が証明できる。

かくして定理は証明できたのだが、ではこれが何らかの「ミラー現象」に関わりがあるのか、という疑問についてはまだ調べていない。ともあれ [Di] にある Z, F_g についてのもう 2 つの定理、すなわち "Yang-Mills" および "boson" の部分について調べるべきだと思われる。

REFERENCES

[Di] R. Dijkgraaf, *Mirror symmetry and elliptic curves*, The Moduli Space of Curves (R. Dijkgraaf, C. Faber and G. van der Geer eds.), Prog. in Math. **129** Birkhäuser (1995), 149–163.

[Do] M. R. Douglas, *Conformal field theory techniques in large N Yang-Mills theory*, hep-th/9311130.

[DW] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Commun. Math. Phys. **129**(1990) 393.

[FQ] D. Freed and F. Quinn, *Chern-Simons guage theory with a finite gauge group*, Commun. Math. Phys. **156**(1993) 435–472.

[I] 岩堀長慶, 対称群と一般線形群の表現論, 岩波講座 基礎数学.

[K] R. Kobayashi, *Ricci-Flat Kähler Metrics on Affine Algebraic Manifolds and Degenerations of Kähler-Einstein K3 Surfaces* Adv. Stud. in Pure Math. **18**-II(1990) 137–228.

[KKL] E. Kiristis, C. Kounnas, D. Lüst, *Non-compact Calabi-Yau Spaces and other Non-Trivial Backgrounds for Four-dimensional Superstrings*, Mirror Symmetry II(B. Green and S.-T. Yau eds.), Stud. in Adv. Math. **1** AMS/IP (1997), 427–453.

[O1] K. Oguiso, *On algebraic fiber space structures on a Calabi-Yau 3-folds*, Internat. J. Math. 4(1993) 439–465.

[O2] K. Oguiso, *On Fibred Calabi-Yau threefolds of quasi-product type.*

[OZ1] K. Oguiso, D. Q. Zhang, *On the most algebraic K3 surfaces and the most extremal log Enriques surfaces*, Amer. J. Math. **118**(1996), 1277–1297.

[OZ2] K. Oguiso, D. Q. Zhang, *On the most extremal log Enriques surfaces, II*, preprint 1995.

[R] M. Reid, *Campedelli versus Godeaux*, Problems in the theory of surfaces and their classification, Trento, October 1998(F. Catanese et al., eds.), Academic Press, Boston, 1991, pp. 309–365.

[Z1] D. Q. Zhang, *Logarithmic Enriques surfaces*, J. Math. Kyoto Univ. **31**(1991), 419–466.

[Z2] D. Q. Zhang, *Logarithmic Enriques surfaces, II*, J. Math. Kyoto Univ. **33**(1993), 357–397.

[Z3] D. Q. Zhang, *Quatients of K3 surfaces modulo involutions*, preprint 1995.

[Z4] D. Q. Zhang, *Normal algebraic surfaces with trivial two or four times of the canonical divisor*, preprint 1996.

[Z5] D. Q. Zhang, *Normal algebraic surfaces with trivial five times of the canonical divisor*, preprint 1996.

[Z6] D. Q. Zhang, *Normal algebraic surfaces with trivial three times of the canonical divisor*, preprint 1996.