高1

2006. 8/27 9:00〜

Date . . No.

高木寛通氏(東京大) ℚ-Fano 3-fold

べき和多様体とFano 3-fold

§ Waring Probrem (19c 中ごろ〜)

F_d (n+1)変数のd次同次多項式

問 ① $F_d = l_1^d + \cdots + l_N^d$ ($l_1, \cdots, l_N$：1次式)

という表示が可能な最小のNを求めよ。

(例えば F_d 一般のとき)

② ①のような表示ができるときそのような表示全体をparametrizeする多様体の完備化(VSP(F_d:N)とかく)を求めよ。

variety of sums of power

ナイーブな次元評価

V = (n+1) dim vector sp

$l_i \in V^*$ $F_d \in S^dV^*$

$$\begin{array}{ccc} S = (V^*)^N & \longrightarrow & S^dV^* \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (l_1, \cdots, l_N) & \longmapsto & l_1^d + \cdots + l_N^d \end{array}$$

F_d：一般 についての①

⟺ S が dominant になる最小のN?

期待値 $N(n+1) \geq \binom{n+d}{d}$ となる最小のN?

ほとんど正しい (Alexander Hirshowitz 1995, JAG 4)

No. Date . .

次が例外

①の解

n	d	Nの期待値	実際のN	$\dim VSP(F_d,N)$
≥ 2	2	$\lceil \frac{n+2}{2} \rceil$	$n+1$	$\frac{n(n+1)}{2}$
2	4	5	6	3
3	4	9	10	5
4	3	7	8	5
4	4	14	15	5

$\boxed{\text{向井}}$ (London Math Soc LNS 179)

$VSP(F_d,N)$

$n=2$ 5次のdel Pezzo 3 fold $n=3$ $G(2,5)$

prime Fano 3-fold of genus 12

?

prime Fano 5-fold of deg 660

Ranestad - Schreyer (math AG 9801110)

?

完備化

$\mathrm{VSP}(F_d, N) \subset \mathrm{Hilb}^N \check{\mathbb{P}}^n$

他の例

n	d	N	VSP
2	6	10	pol K3 of $g=20$ (向井)
2	7	12	5点 (Dixon-Stuart 1908)
5	3	10	holomorphic symplectic 4-fold

§ $g=12$ prime Fano 3-fold

↑

X = $-K_X$ ample

$\mathrm{Pic}\, X \simeq \mathbb{Z}[-K_X]$

$(-K_X)^2 = 2g(X) - 2$ となる $g(X)$ (genus 種数)

が 12 $(g(X) \leq 12, \neq 11)$

$-K_X$ = very ample なので $X \xhookrightarrow{\Phi_{|-K_X|}} \mathbb{P}^{13}$

Xの上のline の Hilb scheme $\mathcal{H}_1$

― 〃 ― conic ― 〃 ―

$\mathcal{H}_2$

X = "一般"

$X \rightsquigarrow$ { $\mathcal{H}_1$ = smooth 平面4次曲線と同型 }

$\mathcal{H}_1 \xhookrightarrow[|K_{\mathcal{H}_1}|]{} \mathbb{P}^2$

X上のlineの交わり

$\rightsquigarrow \mathcal{H}_1$ 上の theta char Θ

$(2\Theta \sim K_{\mathcal{H}_1})$

Scorza, Dolgachev, -Kanev

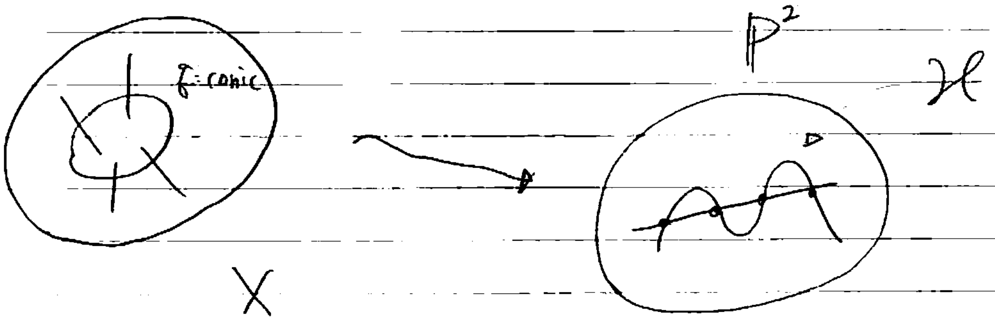
$\rightsquigarrow \mathcal{H}_1$ と同じ $\mathbb{P}^2$ に住む別の4次曲線 F_4

べき和として回復 $l_1^4 + \cdots + l_6^4 = F_4$

$\mathcal{H}_2 \simeq \check{\mathbb{P}}^2$

双対性：1つのX上のconicと交わるX上のlineは4本あり、$\mathcal{H}_1$ の点として $\mathcal{H}_1$ と $\mathbb{P}^2$ の直線の交わりになっている。

$l_1 \sim l_6$ は X の1点を通る6本のconicに対応



$\zeta \longmapsto \mathbb{P}^2$ の line

§ 別の例。

X = (Singular) $\underset{(\mathbb{Q})}{\wedge}$ Fano 多様体

$\iff$ ① X 高々 term sing のみ

② $-K_X$ ample

高3

2006. 8/27. 9:00〜

Date . . No.

向井先生の $g=12$ と類似の ($\mathbb{Q}$-) Fano 3-fold

がみつかった ($g=8$, $\underbrace{\frac{1}{2}(1,1,1)\times 2}_{\text{特異点}}$ $\mathbb{C}^3/(x,y,z)\sim(-x,-y,z)$

X : '一般'

$X \rightsquigarrow \left\{ \mathcal{H}_1 \quad \mathbb{P}^3 \text{ の } (2)\cap(3) \subset I \ (g=4) \right.$

(X上のlineの交わり)

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}_1$ 上の theta char Θ

$(2\Theta \sim K_{\mathcal{H}_1})$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{H}_1$ と同じ $\mathbb{P}^3$ に住む別の4次曲面 F_4

べき和として双有理的に回復 $\ell_1^4+\cdot\cdot+\ell_{10}^4 = \boxed{F_4}$

$\mathcal{H}_2$ = cubic surface $\subset \check{\mathbb{P}}^3$

双対性 = 1つの X 上の conic と交わる X 上の line は6本あり. $\mathcal{H}_1$ の点とは $\mathcal{H}_1$ と $\mathbb{P}^3$ の平面の交わりになっている.

$\ell_1 \sim \ell_6$ は Xの1点を通る6本のconicに対応

Xのかわりに次のような3-fold A を考える $(X \underset{\text{bir}}{\sim} A)$

B_5 = smooth quintic del Pezzo 3-fold

$\left\{ \begin{array}{l} -K_{B_5} = 2H \quad (H \text{ ample}) \\ \quad H^3 = 5 \\ \text{実は } 6 \dim, \deg = 5 \end{array} \right.$

$B_5 \cong G(2,5)\cap\mathbb{P}^6$

$G(2,5) \xrightarrow[\text{Plücker}]{} \subset \mathbb{P}^9$

$c\mathbb{P}^6$

C : B_5 上の deg $= 6$ の $\mathbb{P}^1$

$f : A \longrightarrow B_5$ bl up along C

Cは次の3種

1) $\underbrace{\langle C \rangle}$ $\cong \mathbb{P}^6$

Cのはる最小の線形部分空間

$\downarrow$ $\langle C \rangle \cong \mathbb{P}^5$

その中でも一般的なものは

$S := B_5 \cap \langle C \rangle$ が non singular

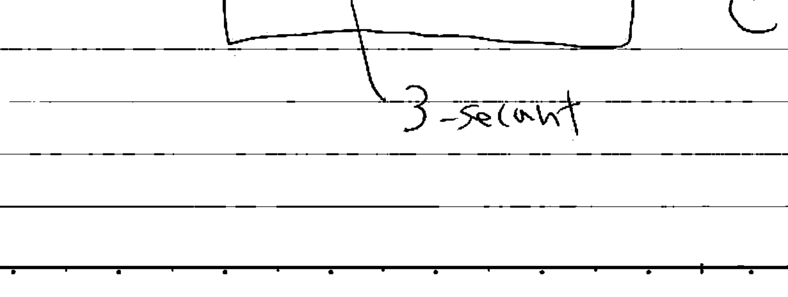
($K_S \sim -H|_S$ Sは quintic del Pezzo surface)

$\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 4点 bl up

$e_1 \sim e_4$: π - exc $h : \pi^*(\text{line})$

うまくπを選べば Cは次のいずれか

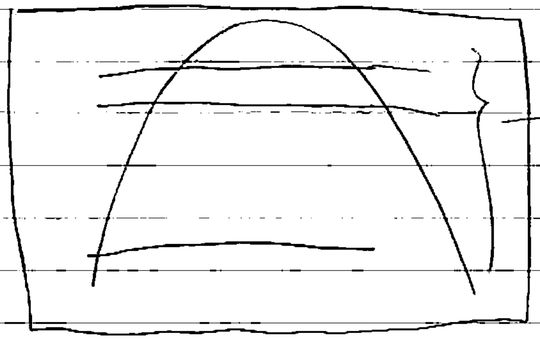
2) $C \sim 5h - 2\sum_{i=1}^{3} e_i - 3e_4$



高4

2006. 8/27. 9:00〜

3) $C \sim 2h$



ρ

6本の2-sec

$h - e_i - e_j$ (6本)

Aについて

1)
$$\begin{tikzcd} \overset{\rho=2}{A} \arrow[rr, dashed, "\text{flop}"] \arrow[d, "f"'] & & \overset{\rho=2}{A'} \arrow[d, "f'"] \\ C \subset \underset{\rho=1}{B_5} & & \overset{\rho=1}{B_5} \end{tikzcd}$$

同種のbl-up

(deg 6 の $C' \simeq \mathbb{P}^1$ でbl up

$\langle C' \rangle \simeq \mathbb{P}^6$)

2)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "\substack{\text{anti}\\\text{flip of}\\e_4}"] \arrow[d, "f"'] & A' \arrow[r, dashed, "\substack{\text{flop}\\\text{of } e_1 \sim e_3}"] & Y \arrow[d] \\ B_5 & & X \leftarrow \boxed{\rho=1} \end{tikzcd}$$

$\frac{1}{2}(1,1,1)$ Sing が1つ生じる

Sの strict transform をつぶす.

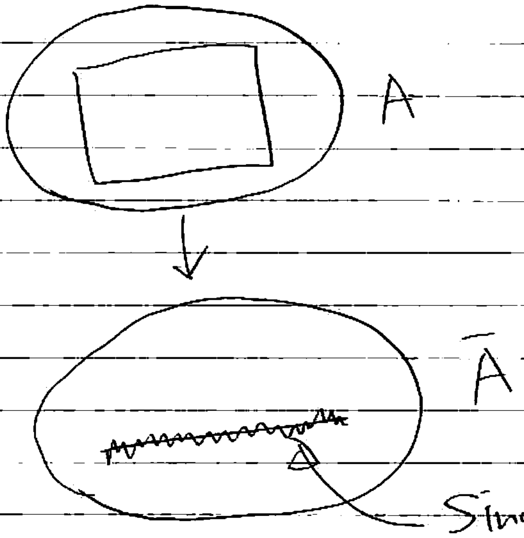
$\simeq \mathbb{P}^2$

もう1つ生じる

3)

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B_5 & & \bar{A} \end{tikzcd}$$

S の strict trans を crepant に曲線につぶしたもの



Sing A (canonical sing)

2006. 8/27. 9:00〜 高5

Date . . No.

§ $\mathcal{H}_1$ について。

A上の line l とは次のいずれかの曲線

$$(-K_A l = D l = 1)$$

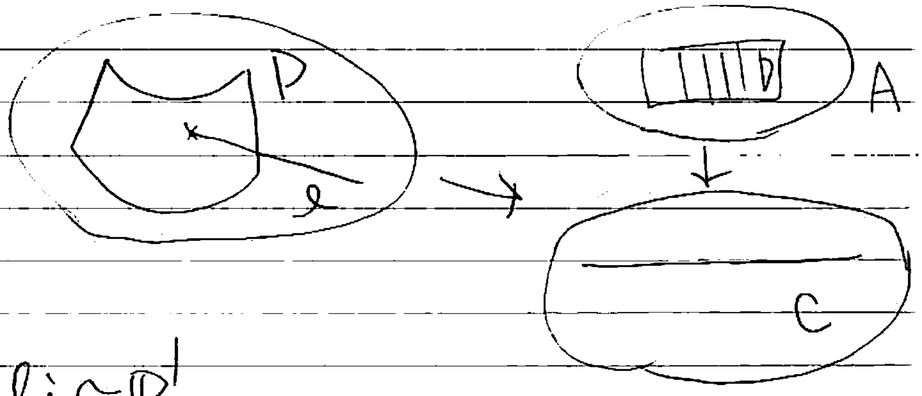
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d] \\ B_5 \arrow[r, phantom, "\supset"] & C \end{tikzcd}$$

$D := \mathrm{exc}(f)$

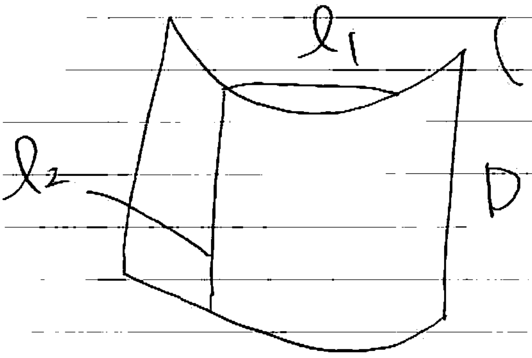
(1) $l \simeq \mathbb{P}^1$

$D . l = 1$

$-K_A . l = 1$



(2). $l = l_1 \cup l_2$, $l_i \simeq \mathbb{P}^1$

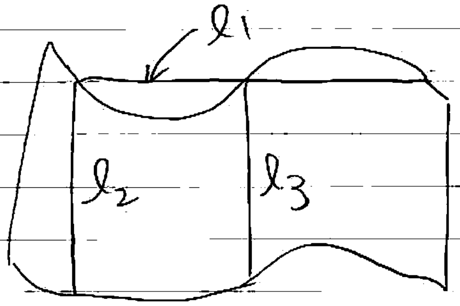


$(-K_A \cdot l_1 = 0)$

(l_2のとり方 2通り)

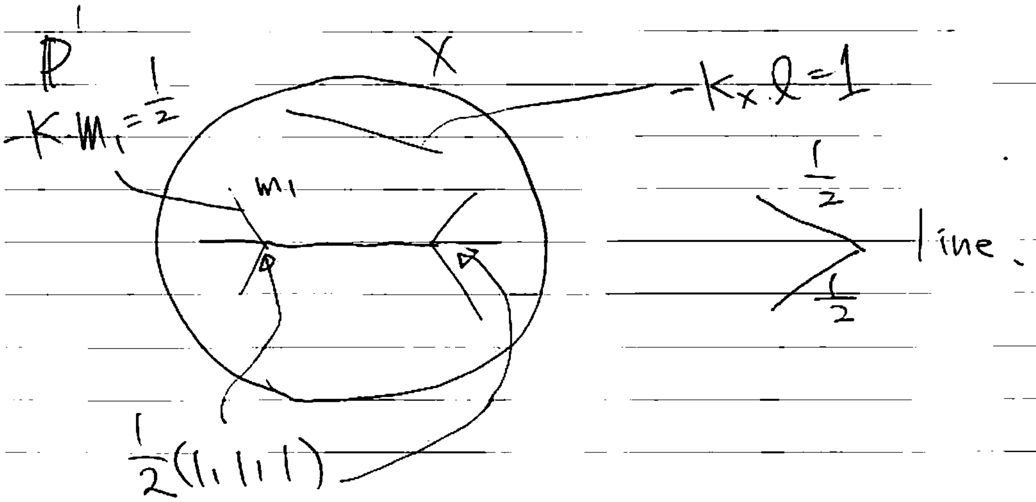
(2-secant)

(3). $l = l_1 \cup l_2 \cup l_3$ $l_i \simeq \mathbb{P}^1$



(l_2, l_3のとり方 3通り)

注）　②のcase　X上の曲線としてlineと呼べるものは次のようになる。



$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} \arrow[r, "\varphi", "自然な射影"'] \arrow[d, "\pi"] & B_5 \\
\mathcal{H}_{B_5} \cong \mathbb{P}^2 &
\end{tikzcd}$$

universal family of lines

$\mathcal{H}_1$をつくりたい

B_5上の直線のはなし。

Prop（古島-中山）

$\mathcal{H}_{B_5}$ = B_5上の直線のHilb

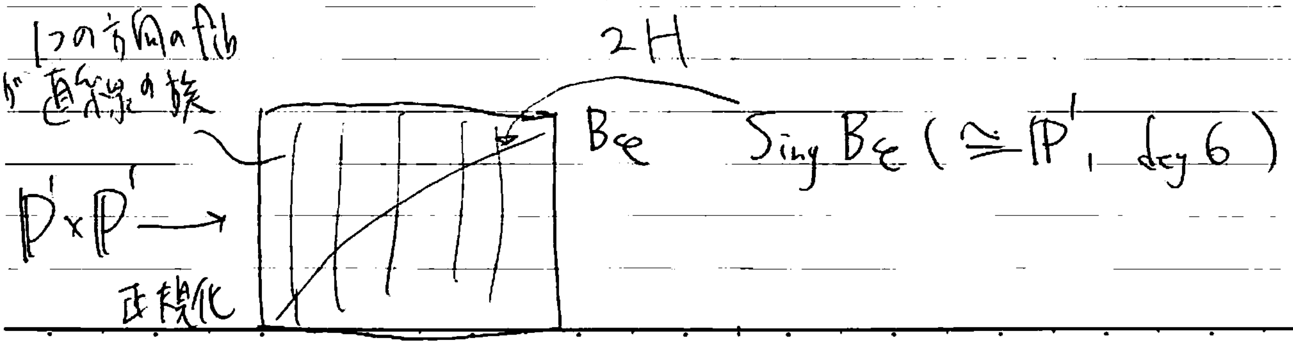
(1) $\mathcal{H}_{B_5} \cong \mathbb{P}^2$

(2) φはdeg 3の有限射、⇔ B_5の各点に3本のlineが通る

(3) B_φ = φのbranch locus $\subset B_5$

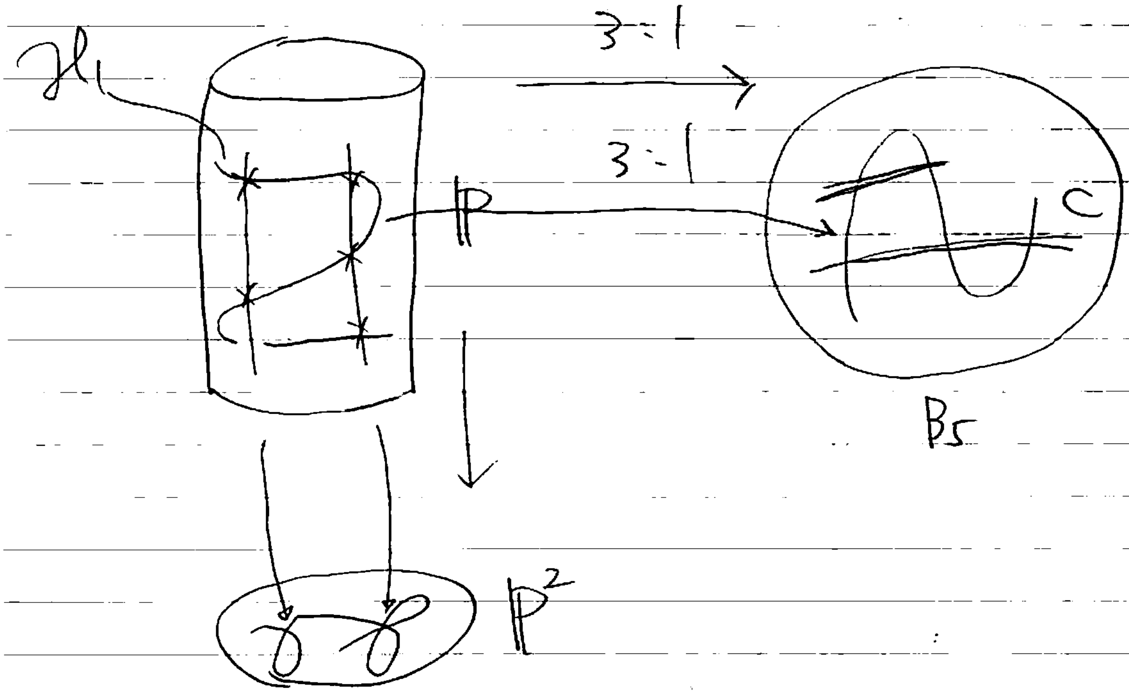
$\Longrightarrow B_\varphi \in |-K_{B_5}|$　（2次と切断）

$$-K_{B_5} = 2H$$

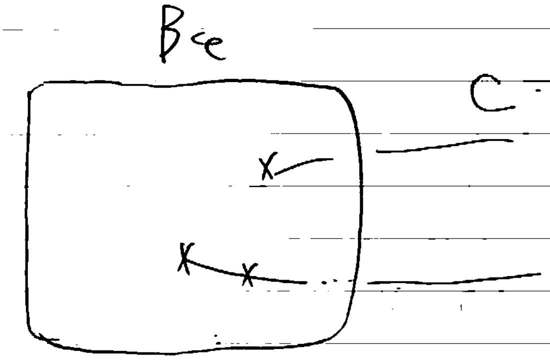


2006. 8/27. 9:00〜

$\mathcal{H}_1 := \varphi^{-1}(C)$ $M := \pi(\mathcal{H}_1)$ は C と交わる line を param.

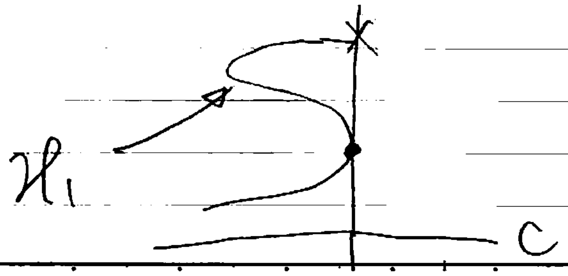


C を (1), (2), (3) の状況のもと general にとると、smooth になる.



B_e と C は $B_e \cdot C = 2H.C = 12$ 点で simple に交わるとしてよい.

しかも $\mathcal{H}_1 \xrightarrow[3:1]{} C$ の分岐が simple としてよい



Hurwitz の公式 $\mathcal{H}_1 \xrightarrow{3:1} C$

$2g(\mathcal{H}_1) - 2 = 3(-2) + 12 \Rightarrow g(\mathcal{H}_1) = 4$

$\mathcal{H}_1$ に theta characteristic をきめる。

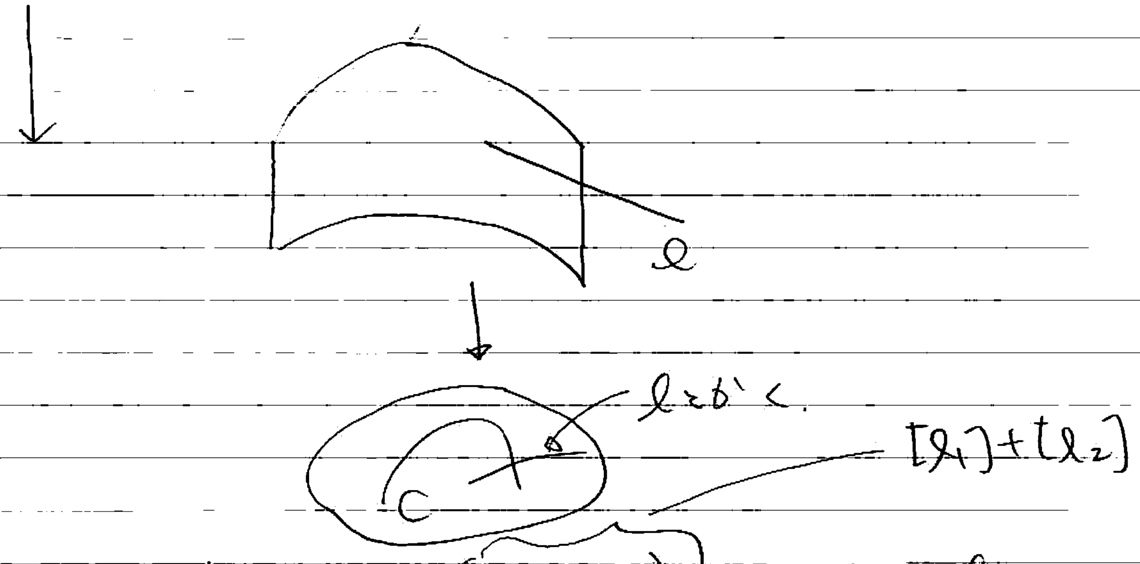
$\varphi|_{\mathcal{H}_1} : \mathcal{H}_1 \xrightarrow[3:1]{\Phi_{|\delta|}} \mathbb{P}^1$

$\quad \hookrightarrow g^1_3$ で def
$\quad\quad\quad \|$
$\quad\quad\quad \delta$

$\Theta := (\pi|_{\mathcal{H}_1})^* \mathcal{O}_M(1) - \delta$ とおく。

Θ の意味

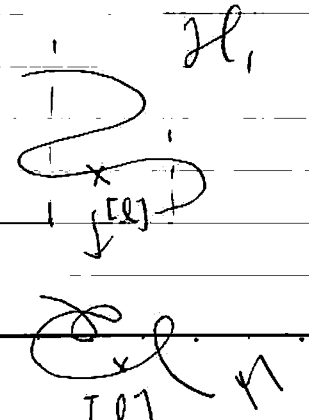
l = A の一般の直線。



$\Theta + [l] = \pi^*\mathcal{O}_M(1) - (\delta - [l])$

$\cap$

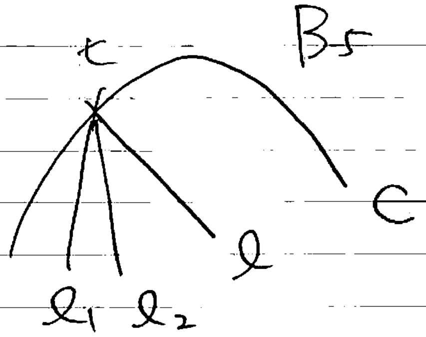
$\mathcal{H}_1 = \pi^*\mathcal{O}_M(1) - [l_1] - [l_2]$



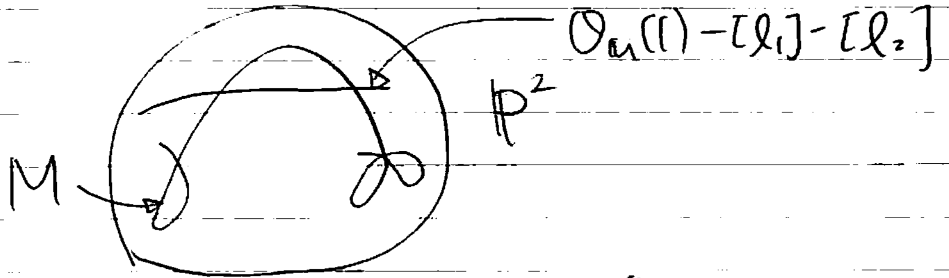
高7

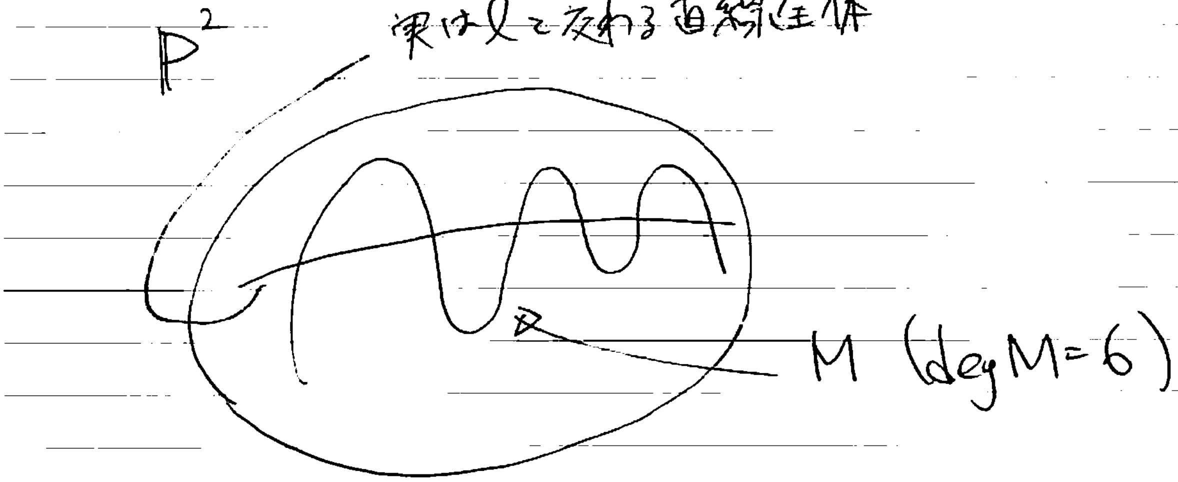
2006.8/27, 9:00〜

Date . . No.

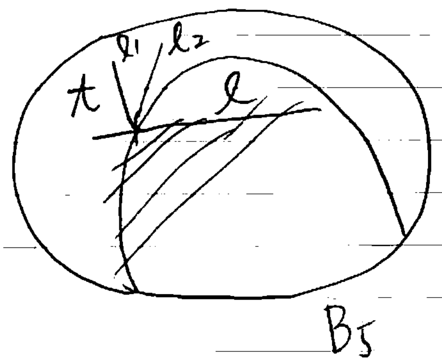


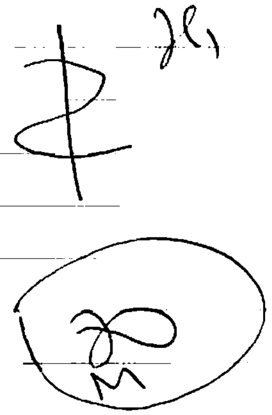
$$[l_1]+[l_2]+[l] \sim S$$





実はlと交わる直線全体





$I_\Theta := \{([l_1],[l_2]) \mid [l_1]$ は $|\Theta+[l_2]|$ の元の supp に入る $\}$

$\cap$

$\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_1 = \{([l_1],[l_2]) \mid l_1\cap l_2 \neq \phi\}$

checkできること、

① I_Θ は対称、

② 対角線と交わらない。($\Longleftrightarrow h^0(\Theta)=0$) $\Rightarrow$

③ I_Θ は $(4,4)$ corresp.

④ $|\Theta+[l]|$ は唯1つの元をもつ、

Dolgachev - Kanev. (Adv. in math 98).

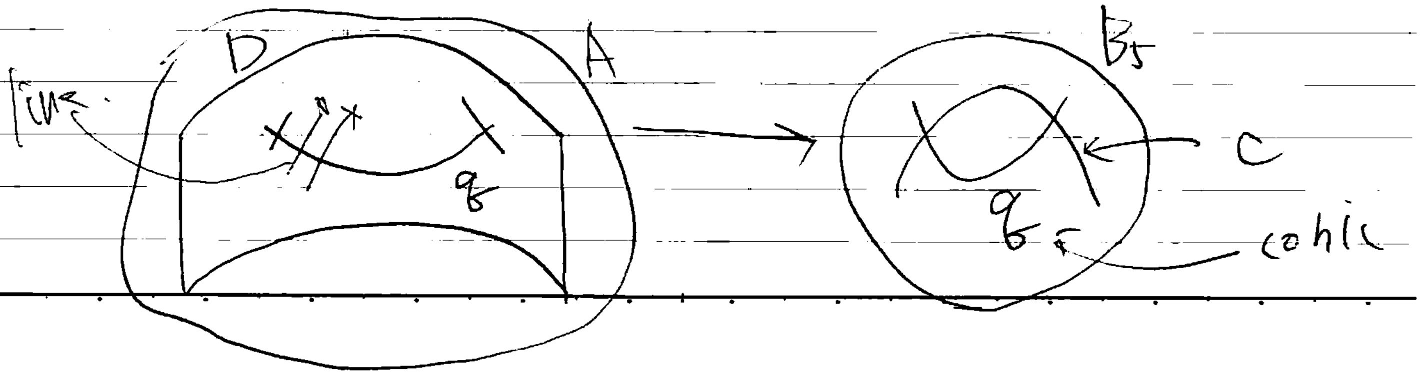
$2\Theta = K_{\mathcal{H}_1}$ になる、

$h^0(\Theta)=0$

§ $\mathcal{H}_2$ について、

A上の conic q とは、$\mathbb{P}^1$ のいくつかの連結和で、

$-K_A\cdot q = D\cdot q = 2$ をみたすもの、



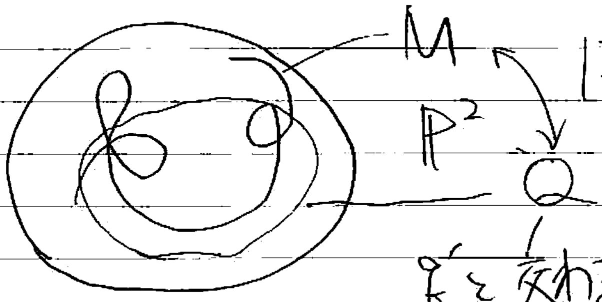
2006.8/20 9:00〜

Date . . No.

? A上で q と交わる line を求める

$\updownarrow$

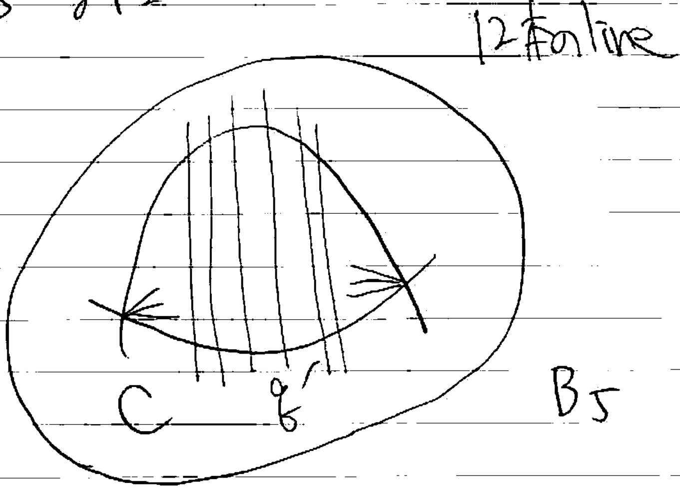
B_5 上で q' と C と交わる line を求める.



12点で交わる

q' と交わる line 全体
実は P^2 の conic

§ $\mathcal{H}_2$ について、



A上の line で q と交わるもの

$\sim$で $O_M(2) - 2\delta$

$= 2\Theta \underset{D.K}{=} K_{\mathcal{H}_1}$

$\mathcal{H}_1 \xrightarrow[\Phi_{|K_{\mathcal{H}_1}|}]{} P^3$

よって、q と交わる line に対応する 6点 $\in \mathcal{H}_1$ は、$|K_{\mathcal{H}_1}|$ の元

$\mathcal{H}_1 \xrightarrow[\Phi_{|K_{\mathcal{H}_1}|}]{} P^3$ としたときの 平面をきめる.

q : A上の conic

$\rightsquigarrow$

$P^3 \supset \mathcal{H}_2$

↑ conic のなす locus

$\mathcal{H}_2$ は cubic surface.

A の moduli 数

1) 9

2) 8 ← $(\mathcal{H}_1, \Theta)$ は $\Theta + \delta - \delta' \sim 0$ となるもの ($\delta . \delta'$ は g^1_3)

3) 8

↑

$(2) \cap (3) \subset \mathbb{P}^3$

↑

singular quadric.