

トポロカルトリーワ多様体について

梶原 健氏

- 1 トポカカル多様体入門
(基本的なものは)
- 2 トポカカルトリーワ多様体と交点理論
- 3 局所化, 曲面上の交点理論 (の証明)

トポカカル多様体入門

(ここ簡単な入門は名古屋講義録(本))

どんな幾何? $\left\{ \begin{array}{l} \text{① 凸体の幾何, 線型不等式 (組合せ論, 計算機代数)} \\ \text{② 付値論的な見方 (代数幾何的)}$

(注) "トポカカル" ... min-plus 代数 に注目した研究をはじめた人 (アラビヤ人) にちなんで
(max-plus 代数) とうきは"421135411"

min-plus 代数の例

$(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ (トポカカル代数)
 \uparrow
 実数全体
 $\forall a, b \in \mathbb{R}$
 $a \oplus b := \min(a, b)$... トポカカル和
 $a \odot b := a + b$... 積
 (実数の和)

(注) \oplus に関する単位元がない (半環とよばれる)

例
 $1 \oplus 1 = 1$, $1 \odot 0 = 0$

トポカカル代数を基盤にした代数や幾何をはじめ

→ (トポカカル多項式
 トポカカル幾何)

(この行き方はミスティック?)

$(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$: トポカカル P² の直線
 \mathbb{R}^r : トポカカル \mathbb{R} -加群

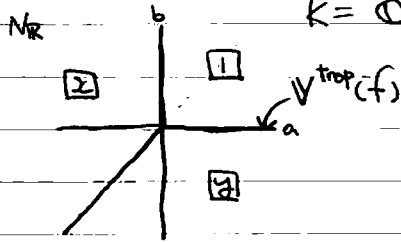
②の観方を大まかにした方がいい?

$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

例1

$$f = x + y + 1 \in K[x^{\pm}, y^{\pm}]$$

$$K = \overline{\mathbb{C}(t)}$$



$$w = (a, b)$$

$$x^i y^j \dots a \quad (\langle m, w \rangle + v(a_m))$$

$$y^i \dots b$$

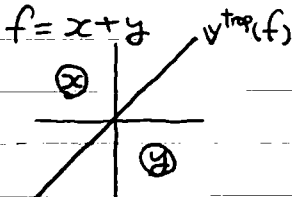
$$1 \dots 0$$

$$\textcircled{1} \quad a \leq b, 0$$

$$\textcircled{2} \quad b \leq a, 0$$

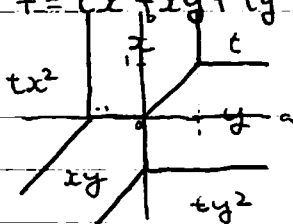
$$\textcircled{3} \quad 0 \leq a, b$$

例11

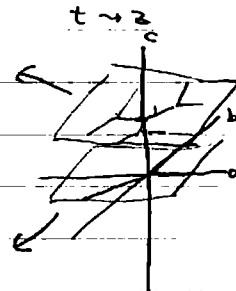
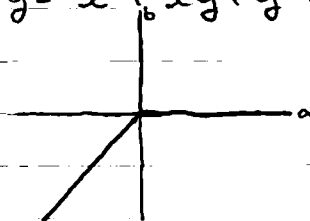


例1

$$f = tx^2 + xy + ty^2 + x + y + t$$



$$g = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$$



例

$$I = \langle x+y+z+1, x+y+2z \rangle$$

$$V^{\text{trop}}(I) = V^{\text{trop}}(x+y+z+1) \cap V^{\text{trop}}(x+y+2z)$$

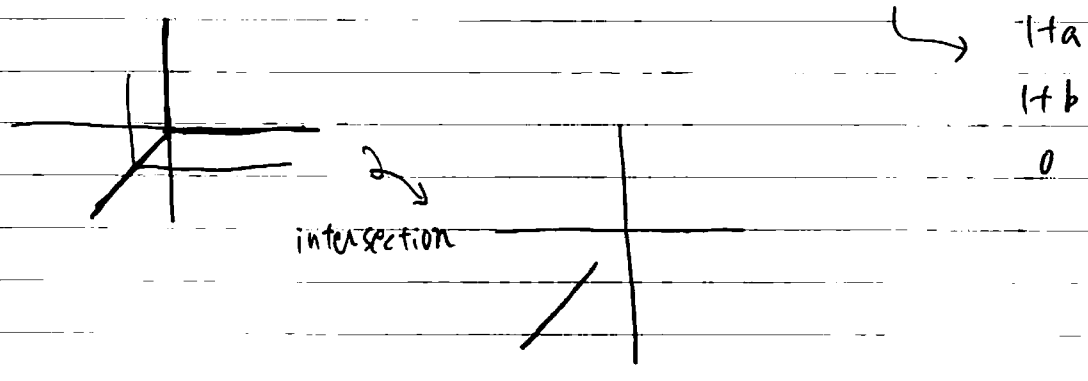
実は $V^{\text{trop}}(I) = V^{\text{trop}}(z-1) \cap V^{\text{trop}}(x+y+2)$

$$\langle z-1, x+y+1 \rangle = I$$

I のトロピカル基底

$$\left(\begin{aligned} I \text{ の零点集合} &= \{ (x, y, -1) : x+y = -2 \} \\ &= \{ (x, -2-x, -1) : x \in \mathbb{R} \} \end{aligned} \right)$$

例 $V^{\text{trop}}(x+y+1) \cap V^{\text{trop}}(tx+ty+1)$



$$\langle x+y+1, tx+ty+1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$V^{\text{trop}}(\cdot) = \emptyset$$

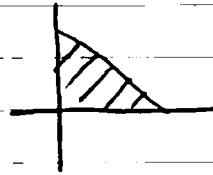
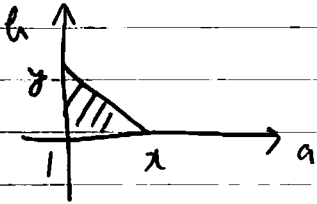
単項行列 P_N の場合 $0 \neq f \in k[x_1^{\pm}, \dots, x_r^{\pm}]$

主張 f の Newton Polytope は $V^{\text{trop}}(f)$ の形が $\frac{1}{n}$ だけ。

$$\text{New}(f) := \{ m \in M, a_m \neq 0 \} \text{ の } f = \sum a_m x^m \text{ 凸包 } \subset M_{\mathbb{R}}$$

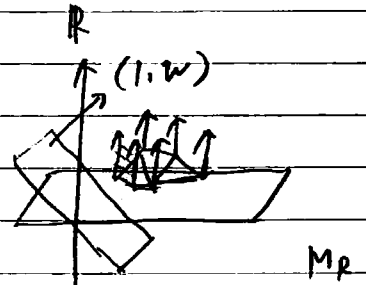
$$f = x + y + 1$$

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$$



$$\mathbb{R} \times M_{\mathbb{R}} \supset \widetilde{New}(f) := \{ (v(a_m), m), a_m \neq 0 \}$$

$$(v : K^x \rightarrow \mathbb{R})$$

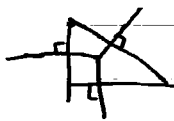


$N_{\mathbb{R}} \ni w$ に対し $(1, w)$ が定まる $\mathbb{R} \times M_{\mathbb{R}}$ 内の超平面 π を考えよ。

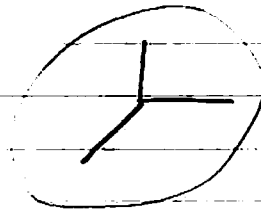
$v^{top}(f) \ni w$ と同条件

$(1, w)$ を法線と取り超平面が $\widetilde{New}(f)$ の2点以上で接する。

($\widetilde{New}(f)$ の法扇 π 同)



(-1)倍



"法扇"

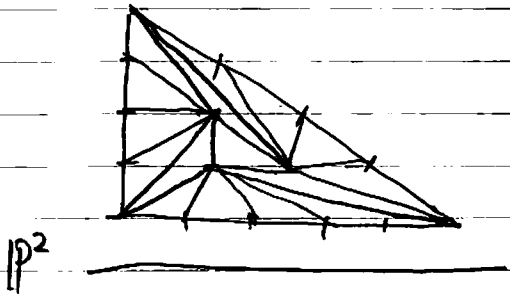
↑
2次式も同様



(-1)倍



"正則" 細分は "4次の三角形" の細分のまじりではない。



トピカル基底について

$I \subset K[M]$ ideal に対し,

$$V^{trop}(I) = V^{trop}(f_1) \cap \dots \cap V^{trop}(f_s) \text{ とする}$$

I の基底 f_1, \dots, f_s を I の トピカル基底 とす。

(注) トピカル基底は存在する。(計算は "computing ~")

命題 トピカル基底は存在する

主張 「トピカル多様体は有限個の多面体からなる複体である」
を認める。

これは $(I \neq (0)) \quad 0 \neq f \in I$ をとり,

$$V^{trop}(f) \supset V^{trop}(I) = \bigcap_{0 \neq f \in I} V^{trop}(f)$$

$V^{trop}(I)$ になる多面体を I の元を一つずつ取って消していけばよい。 //

主張の証明のアイデア

$V^{trop}(I) \ni W$

$$\Leftrightarrow m_W(I) = \langle \{ m_W(f) : f \in I \setminus \{0\} \} \rangle$$

$$\downarrow \sum a_m x^m \quad (f = \sum a_m x^m)$$

$a_m x^m$ は W に関して最小のものを集める

↓
これは単項式も含まれる。

I に関するグレブナー扇を求めて、単項式を含むかどうか判定すれば、 $V(\text{top}(I))$ がわかる。

I のグレブナー扇, $w, w' \in N_{\mathbb{R}}$

$w \sim w' \iff m_w(I) = m_{w'}(I)$
同値関係

この同値類を $C_I(w)$ と書く。

($C_I(w)$ の $\overline{C_I(w)}$ を Grobner cone と呼ぶ)

事実 ($v(K) = \mathbb{R}$ のとき)

$C_I(w)$ は凸多面錐の相対的内部である。

参. Sturmfels, "Grobner basis and convex polytopes")

- $\#\{m_{\prec}(I); \prec: \text{項順序}\} < \infty$
- $\forall \prec$ に対し, $\exists w$ s.t. $m_{\prec}(I) = m_w(I)$
- (上の場合 $\dim m_w(I) = \dim_{\mathbb{R}} N_{\mathbb{R}}$)

注 (well-ordered 性が \mathbb{R} - \mathbb{C} の多項式環では注意が必要がある...)

今日

付値論的にみると...

K : 代数的閉体

$$K = \overline{\mathbb{C}((t))}$$

$$v: K \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
$$\sum_{i \in \mathbb{Q}} a_i t^i \mapsto \min\{i, a_i \neq 0\}$$

$$-\log: \bar{\mathbb{R}} \xrightarrow{1:1} \mathbb{R}_{\geq 0}$$

↑
位相は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ と同相なものを入れる。

記号

$$M = \mathbb{Z}^r$$

$$N = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$$

$$M_{\mathbb{R}}, N_{\mathbb{R}}, \dots$$

$$\mathbb{Z}^r \text{ の } e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$T = (K^\times)^r = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, K^\times)$$

$$\begin{matrix} \cup & \cup \\ (x(e_i)) & \longleftarrow \chi \end{matrix}$$

$$v_T = v^r: T \longrightarrow \mathbb{R}^r$$

$$\begin{matrix} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, K^\times) & \longrightarrow & \text{Hom}(M, \mathbb{R}) = N \otimes \mathbb{R} = N_{\mathbb{R}} & \text{トポロジカル多様体} \\ \cup & & \cup & \uparrow \end{matrix}$$

$$\chi \longmapsto v \circ \chi$$

↑
昨日の話の部分。

Def

$$V \subset \bar{T} = (K^*)^n$$

closed sub variety

$$\parallel$$

$$V(K)$$

Vに伴うトポカル多様体 V^{top} を

$$V^{top} := \nu_T(V(K)) \text{ の閉包 } \subset N_{\mathbb{R}} \text{ で定義する.}$$

\mathbb{R} の通常の位相に関するもの.

事実

この設定で $I \subset K[M]$

$$V = V(I) = \{ p \in T \mid f(p) = 0, \forall f \in I \}$$

の時, $V^{top} = V^{top}(I) \quad //$

例 $V: x+y+1=0 \quad K[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$
 $K = \mathbb{C}(t)$

$(K^{\times})^2$
 \cup

$(p, q) = (p, -p-1)$

$p = a_{ip} t^{ip} + \dots$

$q = b_{jq} t^{jq} + \dots$
高次

$a_{ip}, b_{jq} \neq 0$ とする.

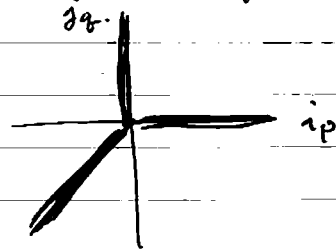
$V_T((p, q)) = (i_p, j_q)$

$(p, q) \in V$ の時 $p+q+1=0$

$(a_{ip} t^{ip} + \dots) + (b_{jq} t^{jq} + \dots) + 1 = 0$
 $1 = t^0$

$\Rightarrow i_p, j_q, 0$ のうち少なくとも2つが最小値に等しい

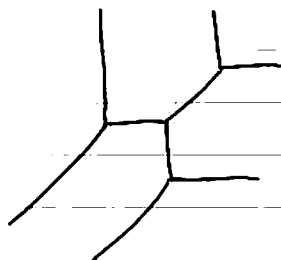
\Rightarrow
 $i_p = j_q < 0$
 $i_p = 0 < j_q$
 $j_q = 0 < i_p$



例 (3.6.2)

$V: tx^2 + xy + ty^2 + x + y + t = 0$

V^{trop}



$$T(K) \longrightarrow N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^r$$

$$\left(\begin{array}{c} \cup \\ V \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \cup \\ V^{\text{trop}} \end{array} \right)$$



(トリーク多様体)

(トローカルトリーク多様体)

“完全埋め込議論したい”
小林: トリーク以外の穴の
埋め方は?

この見方は \mathbb{R}^r は
トローカル代数的トラス.

\mathbb{R} もトローカル的に \mathbb{A}^1
affine line である
トラスとしての方が自然.

トリーク多様体の構成

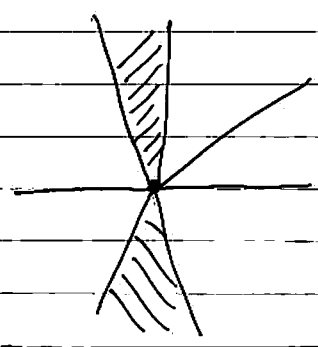
$$\text{扇 (fan)} \subset N_{\mathbb{R}}$$

||
(有理) 強凸錐 たちの複体 (左に)

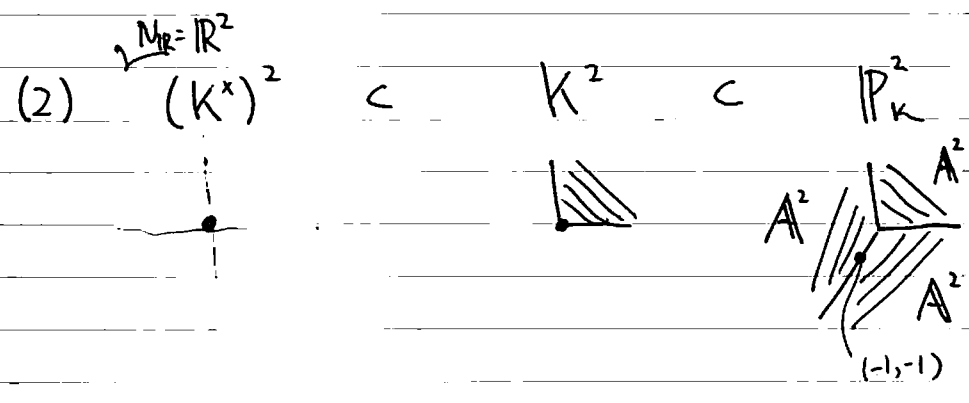
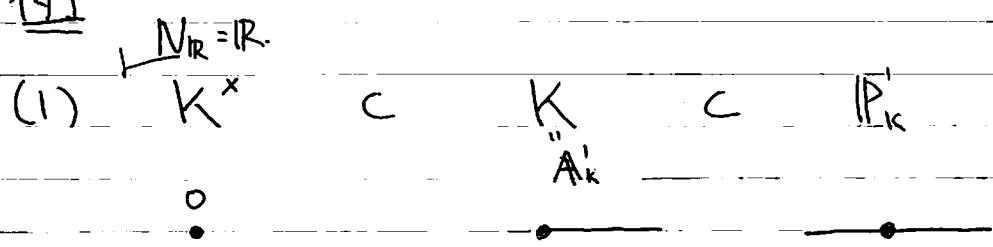


面は有理数係数の式 (の共通部分) で定義.

扇の例
 $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$



例



各 cone $\sigma \in \Sigma$ に対し,

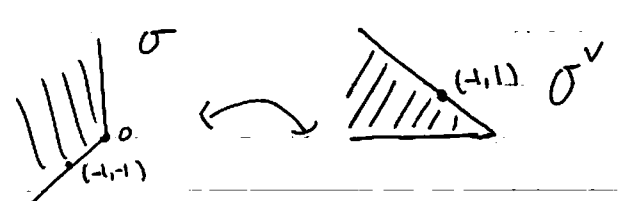
affine t - 1 - σ 多様体 \overline{U}_{σ} を 乗法 \mathbb{Z} -群.

$$\overline{U}_{\sigma} = \text{Hom}_{\neq}(\sigma^{\vee} \cap M, K)$$

$$\cong \overline{D}_{\sigma}(K), \quad \overline{U}_{\sigma} = \text{Spec}(K[\sigma^{\vee} \cap M])$$

affine \mathbb{Z} -群.

$$\sigma^{\vee} := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, n \rangle \geq 0, \forall n \in \sigma\}$$



$$\overline{D}_{\sigma}(K) = \text{Hom}_{\text{環}}(K[\sigma^{\vee} \cap M], K)$$

$$= \text{Hom}_{\neq}(\sigma^{\vee} \cap M, K)$$

← 積

Σ が扇である (i.e. cone の複体である) という性質を使うと,
 \overline{U}_σ ($\sigma \in \Sigma$) を はりあわせる事ができ

$$X_\Sigma = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \overline{U}_\sigma \text{ が得られる。}$$

トポロジカル-リック多様体の定義

Σ " \subset " $N_{\mathbb{R}}$ fan とする。

各 $\sigma \in \Sigma$ に対し $\subset \mathbb{R}^s$

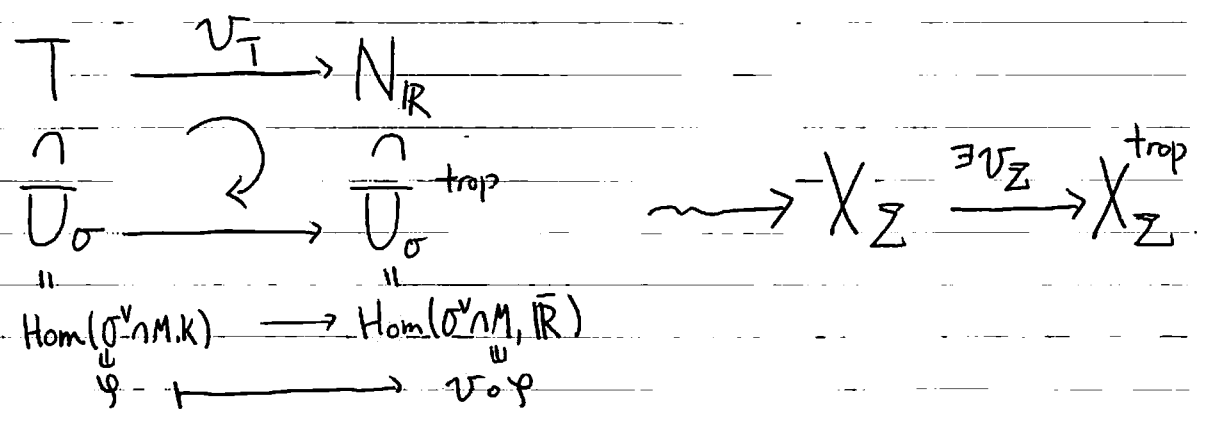
$$\overline{U}_\sigma^{\text{trop}} = \overline{\text{Hom}}_{\text{群}}(\sigma^\vee \cap M, \overline{\mathbb{R}}) \quad \subset (\text{コンパクト開位相})$$

$\overline{U}_\sigma^{\text{trop}}$ ($\sigma \in \Sigma$) を はりあわせ

$$X_\Sigma^{\text{trop}} := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \overline{U}_\sigma^{\text{trop}} \text{ を}$$

Σ に 判う トポロジカル-リック多様体という。

(注)



tropical (sub) variety $\subset X_{\Sigma}^{\text{trop}}$

Def

$V \subset X_{\Sigma}$ closed subvariety に対し

$V^{\text{trop}} := \nu_{\Sigma}(V(K))$ の X_{Σ}^{trop} における閉包

(注) Σ が完備扇のとき

X_{Σ}^{trop} の X_{Σ} の閉部分多様体 V から定義される

V^{trop} はみな compact

ちなみに:
 \mathbb{R} tropical semi ring に置き換ると.
 \mathbb{R} tropical affine line.
 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{R}(1,1)$ tropical \mathbb{P}^1 になる

tropical (algebraic)
moment map

$$\nu: \overline{K} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \& \quad | \cdot | : K \xrightarrow{-\log} \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \& \text{か} \& \< = \& \> \text{にする}$$

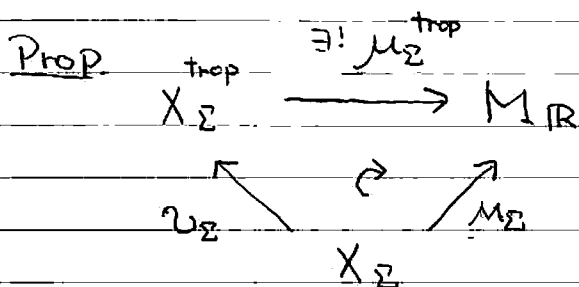
Σ : fan · projective $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ の lattice polytope

X_{Σ} の pd-ization を与える

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\Sigma}: X_{\Sigma} & \longrightarrow & M_{\mathbb{R}} \\ \downarrow \psi & & \\ P & \longmapsto & \frac{\sum_{i=1}^e |x^{m_i}(p)| \cdot m_i}{\sum_{i=1}^e |x^{m_i}(p)|} \end{array}$$

P の normal fan Σ

P の T-頂点 $m_1, \dots, m_e \in M$



$\mu_{\Sigma}^{\text{trop}}$ は $M_{\mathbb{R}}(X_{\Sigma})$ の同相写像

(注) $K = \mathbb{C}$ のとき
 \mathbb{C} の $| \cdot |$ を使う

$$\begin{array}{ccc} \nu: \mathbb{C} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longmapsto & -\log |z| \end{array}$$

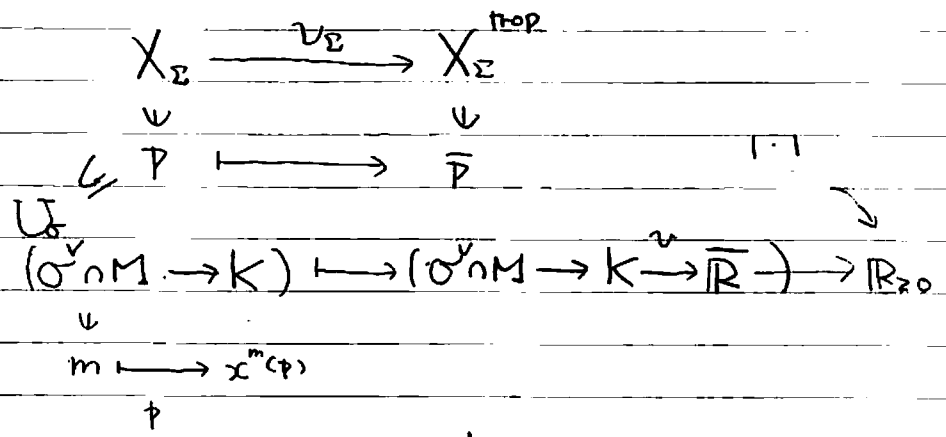
同様に tropical toric variety が出来るが 小田先生の

教科書の $M_{\mathbb{C}}(N, \Sigma) = X_{\Sigma}^{\text{trop}}$ である
角付き多様体
 $X_{\Sigma, \mathbb{C}} / \mathbb{C}^*$

$M_{\mathbb{C}}$ は $M_{\mathbb{C}}(N, \Sigma)$ と P との同相写像である。

∴) - 一意性は明らか

M_Σ^{trop} の構成



$$\mathbb{P} \xrightarrow{\quad} \frac{1}{\sum_{i=1}^t |x^{m_i}(p)|} \sum_{i=1}^t \dots$$

$\frac{|x^{m_i}(p)|}{\sum_{i=1}^t |x^{m_i}(p)|} \parallel \overline{\mathbb{P}}$ からの写像と思える = $\exp(-\overline{\mathbb{P}})(m)$
 式を書き換えると X_Σ^{trop} からの写像

$K = \mathbb{C}$ の結果より M_Σ^{trop} は同相 //

(注) $\mathbb{V}^{\text{trop}}(I)$ の形

X_Σ のとき

Cox の各次座標環

$$R_\Sigma = K[\{x_p : p \in \Sigma(1)\}]$$

+ 適当な次数

$R_\Sigma \supseteq$ 各次 ideal I により $X_\Sigma \supseteq \mathbb{V}$ を定義する事ができる。

$$\mathbb{V}^{\text{trop}}(I) \subseteq X_\Sigma$$

昨日のアフィンの場合との関係
(1-ラス)

$$\tilde{V}^{\text{trop}}(I) \Big|_{\substack{\sigma \in \Sigma \text{ には} \\ \text{対応する T-orbit} \\ \mathbb{C}^*}} = V_{\mathbb{C}^*}^{\text{trop}}(I_{\sigma})$$

トポロカルト-リッフ多様体上の
非特異射影

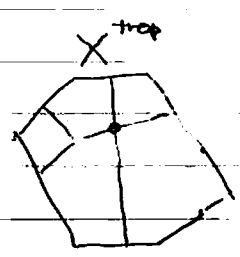
交点理論 (細かいことは"できてない"
Mikhalkin preprint "tropical geometry")

曲面の場合

$$\Sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$$

非特異 $\text{Supp}(\Sigma) = N_{\mathbb{R}}$

$$\begin{matrix} X_{\Sigma}^{\text{trop}} \\ \cup \\ \tilde{V}^{\text{trop}}(f), \tilde{V}^{\text{trop}}(g) \end{matrix}$$



トポロカル曲線
1次元

定理 C と D が有限個の点で交わる時、

$$C \cdot D = \text{MixedVol}(\square_f, \square_g)$$

各次元座標環の次数

$$= A^1(X_{\Sigma}) \quad | \text{cycle / linearly eq.}$$

$$= \text{Coker} \left(\begin{matrix} M & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \\ \downarrow m & & \downarrow \\ \Sigma \langle m, n_p \rangle & \longrightarrow & D_p \end{matrix} \right)$$

各標準基底は $\rho \in \Sigma(1)$
と対応



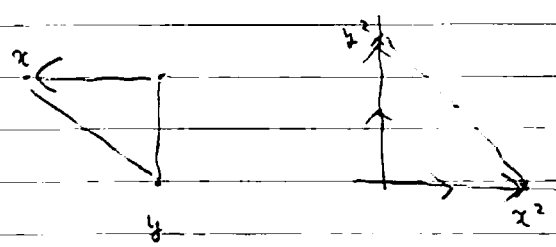
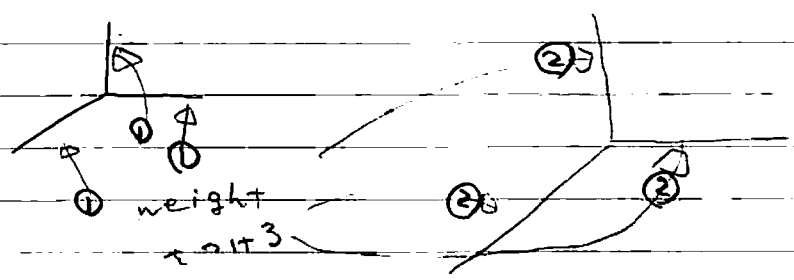
$n_p = p \cap N$ の primitive elt

$$C \cdot D = \sum_{p \in C \cap D} i(C, D; p)$$

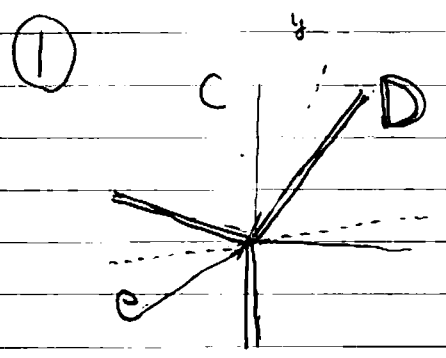
重複度

- ① $p \in \begin{matrix} \text{trop} \\ \parallel \\ \mathbb{N}^r \end{matrix} \subseteq X_{\mathbb{Z}}^{\text{trop}}$ のとき
- ② Torus orbit の $\text{ord } \pi = 1$
(1 = $\mathbb{R} \pi$ の boundary)
- ③ $\text{ord } \pi = 0$
(0 = $\mathbb{R} \pi$ の boundary)

$x + y + 1$ $x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$



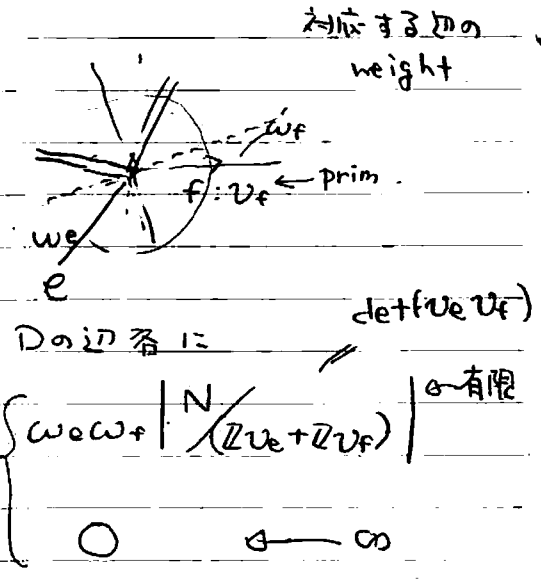
対応する x, y, t = 多面体の頂点
 を結ぶ $\lambda > 0$ の
 = primitive : \times 整数倍

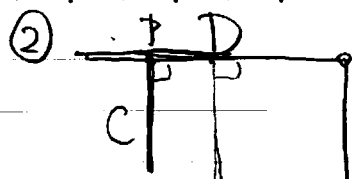


$$i(C, D; p)$$

=

$$\sum_{p \in \text{通る } C \text{ の辺 } e} \dots$$

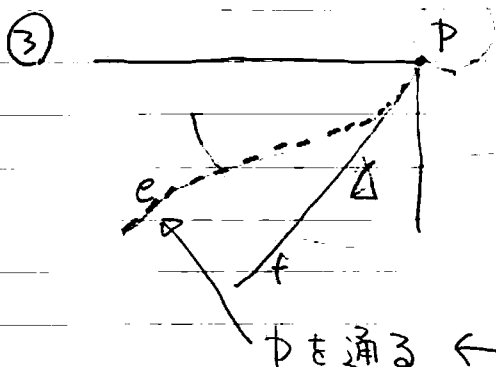




$A^{2, trop}$

(weight の積) $\times |$

$i(C, D; P)$

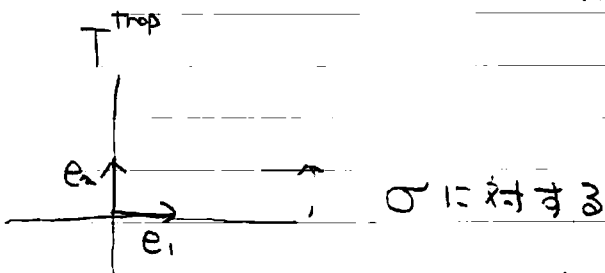
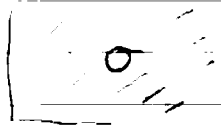


σ に対応する U_{σ}^{trop}

f を通る $\leftrightarrow e$ の ∞ 方向の primitive vector $\setminus \{0\}$

$\bigcap \text{int}(\sigma)$

\mathbb{P}^2 の fan



σ に対応する $\sigma \cap M$ の生成元

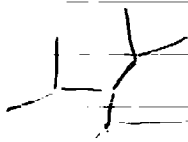
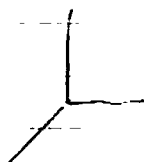
$a, b, c, d > 0$

e の primitive vector $ae_1 + be_2$

f の primitive vector $ce_1 + de_2$

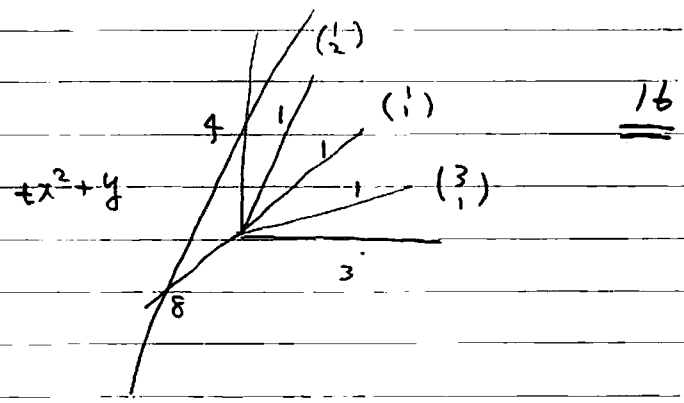
$i(C, D; P) = \min(ad, bc)$

\mathbb{P}^2 の \times $C, D = (\deg f) \cdot (\deg g)$



$(X^2Z + Y^3, X^4 + Z^2Y^2)$

$$z = 1 \quad x^8 + x^4 + x^2 y + xy^2 + y^5 + y^8$$



3. 局所化と定理の証明

定理の訂正

$V^{\text{trop}}(f)$

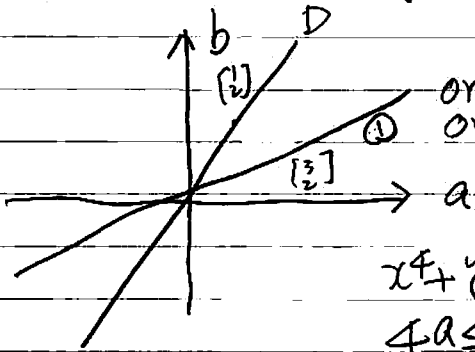
★ f, g の次数 $\in \text{Pic}(X_{\Sigma})$

$[D_f], [D_g]$

D_f, D_g は base pt.
(\mathbb{P}^2 のときは f, g が自明でなければいけません)

例 \mathbb{P}^2

$f = x^2z + y^3, g = x^4 + y^2z^2$



$x^4 + y^2$
 $4a \leq 2b$
 \geq

$x^2 + y^3$
 $2a \leq 3b$
 \geq

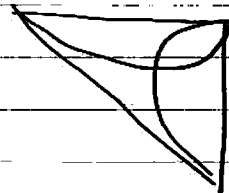
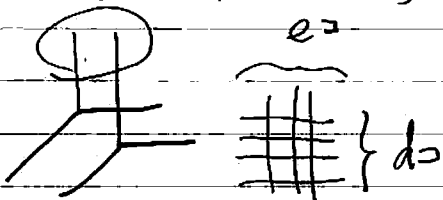
○ の重複度

$2 \times 1 \left| \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right| = 2|2-6| = 8$

$= 2 \times (\times \min(2, 6))$
 $= 4$

証明の方針

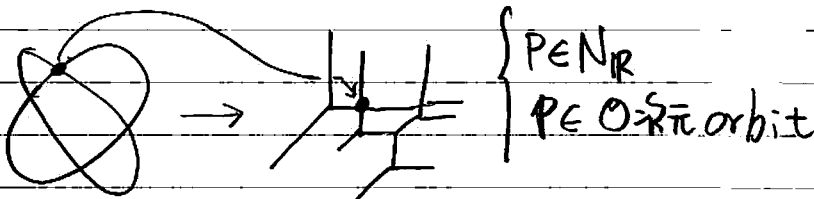
代数幾何 には 帰着
(トポロジ多様体のはずれ)



$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$8 + 4 = 12$

$X_{\Sigma} \xrightarrow{V_{\Sigma}} X_{\Sigma}^{\text{trop}}$



Σ 重複度 = C.D

mixed vol 証明

局所化

K, ν { 前述
 M, N

$R = K$ の付値環 ($\nu(x) \geq 0$ とする x)

$m_R = K$ の付値イデアル ($\nu(x) > 0$)

$w \in N_R$ に対し

$K[M]$) の w -localization
 $R[M]$

$K[M] \supset R[M_w]$

$$\parallel$$

$$\{ a_m x^m : a_m \in K^\times, m \in M, \nu(a_m) + \langle m, w \rangle \geq 0 \}$$

$\subseteq R$ -alg として生成される部分環

$$\subseteq R[\{ x^{-\langle m, w \rangle} x^m : m \in M \}] \cong R[M]$$

$R[M_w]$ を $1 + m_w$
 \parallel

$$\{ a_m x^m : a_m \neq 0, m \in M, \nu(a_m) + \langle m, w \rangle > 0 \}$$

で生成される $R[M_w]$ の ideal

とこの積閉集合で局所化する

この環を $R[M]_w$ とかく

$m_R \setminus \{0\}$ を可逆にしたものを $K[M]_w$ とかく

(三注) $w=0$

$$R[M] \rightarrow K$$

R 準同型 (K -section, $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } R[M]$)

二つのための factor 条件

$$\text{Ker } \varphi_n(1 + m_0[M]) = \phi \quad \text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } K$$

$$p \in N_R$$

$p \in O$ の orbit

つまり $\text{Spec } R[M]_0$ の support は $\nu^{-1}(0)$ と一致する

Prop $I \subset K[M]$: ideal
 $V = \text{Spec}(K[M]/I)$

V : finite/ K

$I_{w,k} := I_{w,k} \cap K[M]_w$

$I_w := I_{w,k} \cap R[M]_w$

(1) $K[M]_w / I_{w,k} \cong \bigoplus_{v_r(p)=w} \mathcal{O}_{V,p}$

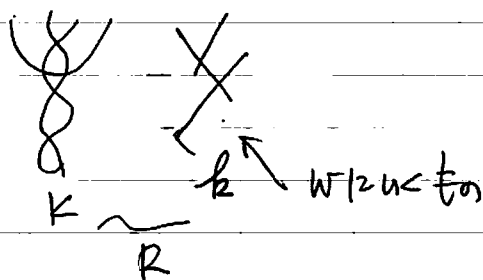
(2) $R[M]_w / I_w = \text{finite}$

torsion-free R -mod (\Rightarrow finite free)

\Rightarrow 命題 5

$\dim_k K[M]_w / I_{w,k} = \dim_k \underbrace{R/m_p \otimes_R R[M]_w / I_w}_{R[M]_w / \text{pin}_w(I) \text{ mod } m_p}$

$k = R/m_p$



Prop $\dim_k (K[M] / \langle x^{m_1} - a_1, \dots, x^{m_r} - a_r \rangle)$

$m_1 \dots m_r \neq 0$
 M a R -base

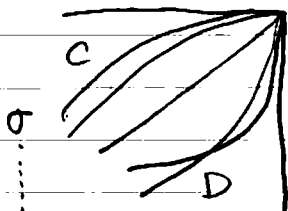
$= \# \left| M / \sum_{i=1}^r \mathbb{Z} \cdot m_i \right|_{a_i \in k^x} = |\det(m_1 \dots m_r)|$



$(x^m - a)(x^{m'} - b) = (x^{m+m'} - ab) - b(x^m - a) - a(x^{m'} - b)$

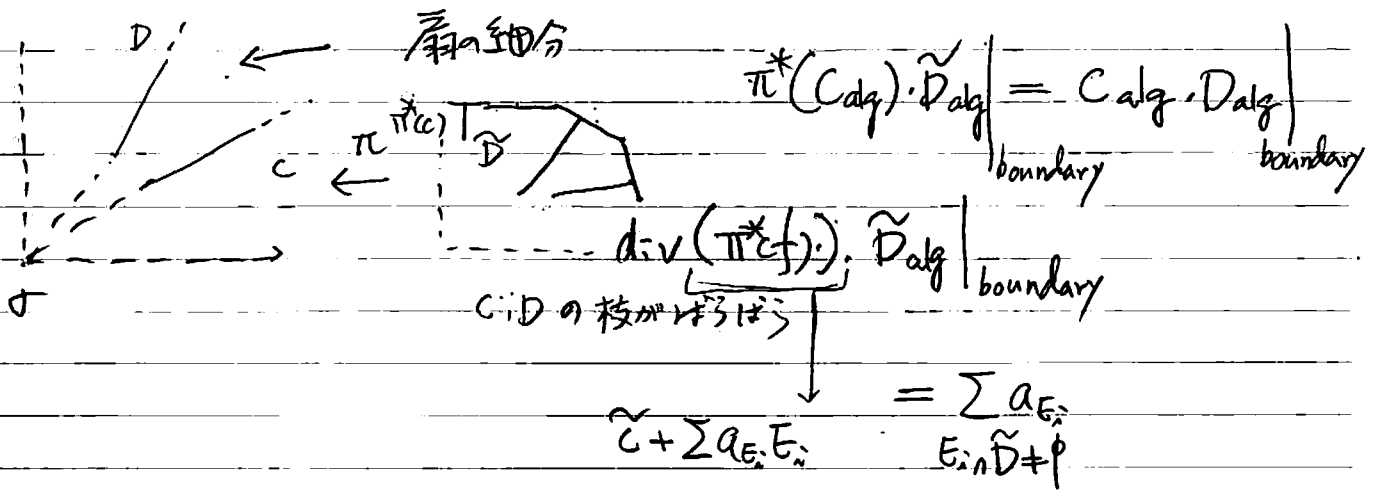
$p \in \mathcal{O}$ 2次元 orbit

σ : 2次元 cone



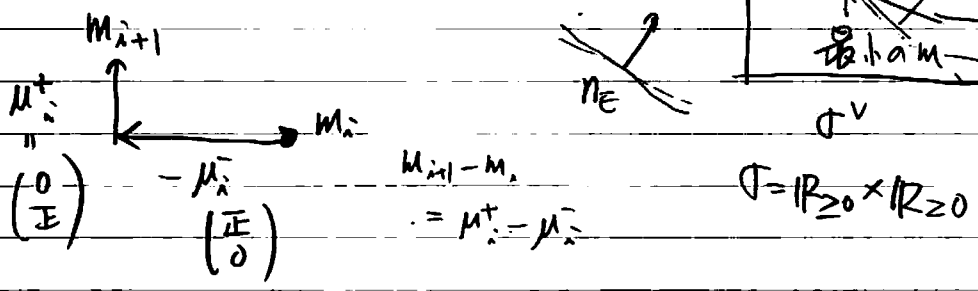
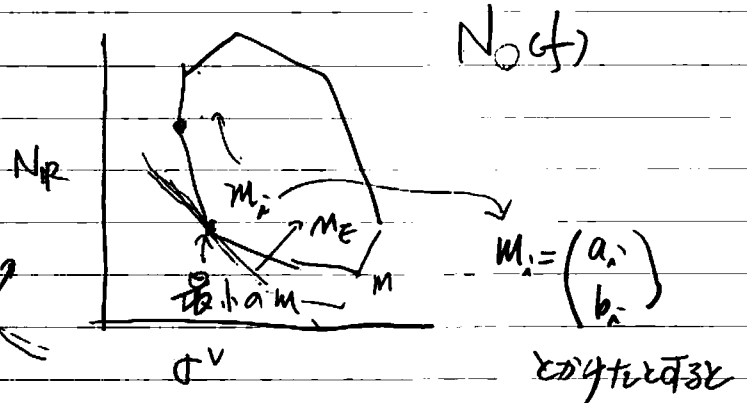
$i(C, D; p)$ の計算

代数幾何の重複度を計算に公式をみちみく



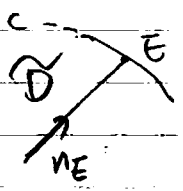
$\text{ord}_E(f) = \min_{b_i \neq 0} \langle m_i, n_E \rangle$
 $a_{E_i} = \text{ord}_{E_i}(f)$
 $\sum b_m x^m$
 $\min(0, \infty)$

$(E \leftrightarrow p_E \in \Sigma'(1))$
 $(p_E \in N_R = N \cdot n_E)$

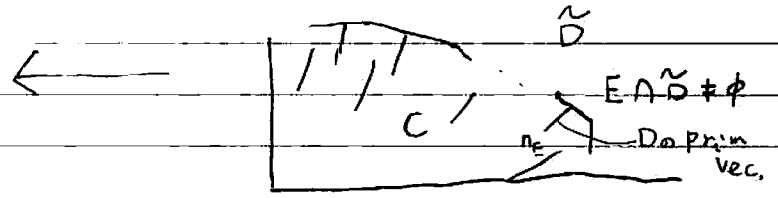
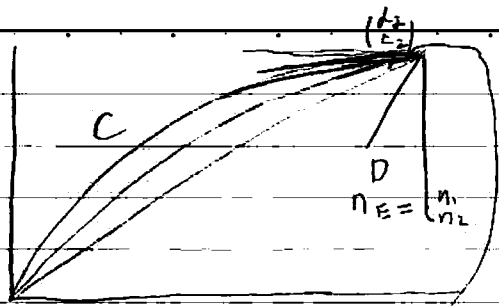


$\langle m_{i+1}, n_E \rangle$ を計算して
 $\sum_i \min(\langle \mu_i^+, n_E \rangle, \langle \mu_i^-, n_E \rangle)$
 計算して
 $\neq 0 \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix}$

$0 \geq \langle m_{i+1}, n_E \rangle - \langle m_i, n_E \rangle = \langle \mu_{i+1}^+, n_E \rangle - \langle \mu_i^-, n_E \rangle$



最後 last ~



$$\mu_i^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ d_i \end{pmatrix}$$

$$\mu_i^- = \begin{pmatrix} c_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y d_i - x c_i$$

$$\pi^*(C, \tilde{D}) = \sum_{E \cap \tilde{D} \neq \emptyset} |O_E|$$

boundary

"n_E 2-はかる"

$$x^{m_{i+1}} - m_i - 1$$

$$\sum \min(\langle \mu_i^+, n_E \rangle, \langle \mu_i^-, n_E \rangle)$$

$$\min(d_i n_2, c_i n_1)$$

W-局所化

$I \subset K[M]$; ideal

$W \in \mathbb{N}_R$, $V = \text{Spec}(K[M]/I)$

$$(1) K[M]_W / I_{W,K} \cong \bigoplus_{\substack{P \in V \\ \mathfrak{m}_P \subset W}} \mathcal{O}_{V,P}$$

($S_i, u_i, e \in \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$)

(2) - - -

(3) - - -

(2) $W = \emptyset$

($m_0 = m_R K[M]$)

V の点 P

$$(\lambda^m - \lambda^m(P), \dots)$$

$$W(P) \neq 0 \text{ のとき } \exists m \text{ s.t. } \lambda^m(P) \in \mathbb{M}_R \\ \nu(\lambda^m(P)) > 0$$

$$\lambda^m - \lambda^m(P) = \underbrace{\lambda^m}_{\text{可逆}} \left(1 - \underbrace{\frac{\lambda^m(P)}{\lambda^m}}_{\text{可逆}} \right) \quad ; \text{可逆}$$

$W(P) = 0$

$$\forall m \in M, \lambda^m(P) \in R^\times \\ \langle \{ \lambda^m - \lambda^m(P) \mid m \in M \} \rangle \cap (1 + \mathfrak{m}_0) = \emptyset \\ \subset R[M] \\ \Rightarrow W(P) \geq 0 \text{ の点はずれる} //$$

(2)

$R[M]_W / I_W$; finite torsion free
R-finite

$$R[M]_W / I_W \subset K[M]_W / I_{W,K}$$

//
 $R[M]_W$ の局所化

$$\bigoplus_{v \in W} \mathcal{O}_{v,P}$$

\downarrow
R-finite
[$R[M]_W$] の像では $1 + \mathfrak{m}_W$ は可逆. //

注)

$$\left(\frac{R[M]_W}{I_W} \right)$$

を X_{Σ}^{trop} 上に " のせし" 考える

$\nu_{\sigma}^{\text{trop}}$

$$\left(\frac{R[\sigma^{\vee} \cap M]_W}{I_W} \right)$$

も同様に def

tropical toric var. 再考

X_{Σ}^{trop} の各点 w 上には局所的な環 $R(\Sigma)_w$ が与えられる。
これを利用して X_{Σ}^{trop} を環 \rightarrow 空間 とみる。

$$X_{\Sigma}^{trop} \xrightarrow{\nu_{\Sigma}} X_{\Sigma}^{trop}$$

$(X_{\Sigma}^{trop}, \nu_{\Sigma}^* \mathcal{O}_{X_{\Sigma}})$
 \hookrightarrow zariski top.

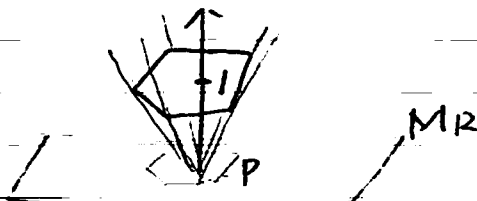
各点 w 上 $\bigcap_{w \in \sigma} R(\Sigma)_w$

intersection theory を定式化できるから

I_w sub. var. $Z \subset X_{\Sigma}^{trop}$
 defining ideal $\swarrow X_{\Sigma}$

$Z, w \dots I_Z + I_w$ は length を保つて与える

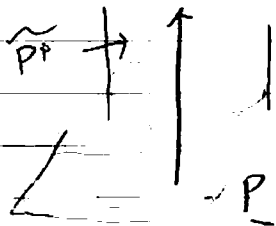
前から知られてること



$\overline{\text{Proj}}(K[\text{cone}] \text{ as Lattice})$

X

$\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$



$\tilde{P} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$

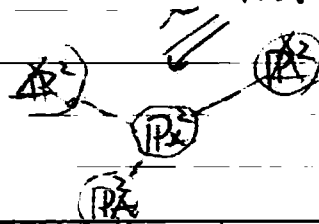
$R[\langle \tilde{P} \cap \mathbb{A}^2 \cdot M \rangle \cdot \theta]$

次数 1

$\text{Proj}(\) \otimes R/m$



\rightarrow



P の各成分で記述される

Proj トーリック 多様体の退化。

了

No. Date

