解析学C第9回講義ノート　(2021.6.22 用）6.25 版

１５．可測関数

教科書『ルベーグ積分３０講』第１７講後半

前回は，$f : X \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの同値な定義を紹介しました．すなわち，

(1) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}((-\infty, \alpha) \in \mathcal{B}$.

(2) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f^{-1}([\alpha, \infty) \in \mathcal{B}$.

(3) $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha < \beta)$ に対し，$f^{-1}([\alpha, \beta)) \in \mathcal{B}$.

(4) $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha < \beta)$ に対し，$f^{-1}((\alpha, \beta)) \in \mathcal{B}$.

(5) $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha < \beta)$ に対し，$f^{-1}([\alpha, \beta]) \in \mathcal{B}$.

(6) $\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha < \beta)$ に対し，$f^{-1}((\alpha, \beta]) \in \mathcal{B}$.

どんな形の区間を考えてもいいということですね．

上で用いた f による逆像は

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

のことです．

逆像のいくつかの性質も前回やりましたが，今回使う性質は以下のものです．

$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$.

$f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$.

今回は，可測関数の和，積，上限，下限，上極限，下極限なども可測関数であることを示します．ここで，定義を忘れている言葉があったら，思い出そうとしてみてください．思い出せなかったら，今調べよう！

１５－１．$\mathbb{R}^k$ の開集合の逆像

一般の可測空間 $(X, \mathcal{B})$（空でない集合 X とその上の σ–加法族 $\mathcal{B}$ の 2 つ組）を考えます（測度 m はここではまだ使わない）．可測関数は X から $\mathbb{R}$ への関数です.

補題 15.1

$f_1, f_2, \cdots, f_k$ を X 上の可測関数とし，O を $\mathbb{R}^k$ の開集合とする．このとき，

$$\{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x)) \in O\} \in \mathcal{B}.$$

このことを，$X \to \mathbb{R}^k$ の写像 $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))$ を用いて表すと，簡潔に $F^{-1}(O) \in \mathcal{B}$ と表せます.

$\mathcal{B}$ は X 上の σ–加法族です．σ–加法族の定義を忘れていたら今すぐチェック！

$\mathbb{R}^k$ の開集合 O を可算個の（k 次元）区間を用いて表す話は形を変えて何度か出てきました.

- O は可算個の半開区間の和集合として表せる.
- O は可算個の互いに素な半開区間の和集合として表せる.
- O は可算個の開区間の和集合として表せる.

最初の命題は最近講義で証明しましたが，今回使う 3 つ目もまったく同様に証明できます.（ヒント：有理数は可算.）

補題の証明

まず，O が k 次元「開区間」，すなわち
$O = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_k, b_k) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \cdots, k\}$
の形のときは，

$$\{x \in X \mid a_i < f_i(x) < b_i,\ i = 1, 2, \cdots, k\} = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}((a_i, b_i))$$

であり，可測関数の定義から $f_i^{-1}((a_i, b_i)) \in \mathcal{B}$ なので，$\mathcal{B}$ が σ–加法族であることから有限個の共通部分 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}((a_i, b_i))$ も $\mathcal{B}$ に属す．すなわち，$F^{-1}(O) \in \mathcal{B}$.

次に，$\mathbb{R}^k$ の一般の開集合 O は，可算個の開区間 I_n, $n = 1, 2, \ldots$ の和集合として表せる（$O = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$）ので，記号 F の定義と，最初に挙げた逆像の性質，および今開区間に対して

証明したことから，

$$F^{-1}(O) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F^{-1}(I_n) \in \mathcal{B}$$

【証明終】

補題 15.2（連続とは「開集合の逆像が開集合」）

関数 $f : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ が連続 $\iff$ 任意の開集合 $O \in \mathbb{R}^k$ に対して $f^{-1}(O)$ は $\mathbb{R}^\ell$ の開集合．

これは集合と位相で習ったかもしれませんが，何次元でも同じことなので $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の場合の証明をレポート課題にします．
ヒント：
右側：$\forall a \in \mathbb{R}$ に対して，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. 極限の部分は

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists\delta > 0 \text{ such that } |x-a| < \delta \Longrightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

左側：

$$O \in \mathbb{R} \text{ が開集合} \iff \forall x \in O,\ \exists\varepsilon > 0 \text{ such that } x \in B(x,\varepsilon) \subset O,$$

ここで，$B(x,\varepsilon)$ は中心 x 半径 ε の開球（1 次元の場合は開区間）．

こうした基本的なことだけを使って証明できるのでやってみてください．

命題 15.3

f, g を X 上の可測関数とし，$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき，合成関数 $F(f(x), g(x))$ は $X \to \mathbb{R}$ の可測関数である．

証明

F が（2 変数の）連続関数だから，開区間 (α,β) に対し，$\tilde{O} := F^{-1}((\alpha,\beta))$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合．したがって，補題 15.1 より，$\{x \in X \mid (f(x), g(x)) \in \tilde{O}\} \in \mathcal{B}$ である．この集合を書き直すと，$\{x \in X \mid \alpha < F(f(x), g(x)) < \beta\} \in \mathcal{B}$ となる．【証明終】

命題 15.4

f, g を X 上の可測関数とすると，$af+bg$, (a,b は定数), fg , $|f|$ も可測関数である．

最初の 2 つは命題 15.3 で $F(x_1,x_2)=ax_1+bx_2$, $F(x_1,x_2)=x_1x_2$ とすればよい．命題 15.3 では $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ の場合を扱ったが，連続関数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対しても，合成関数は可測になることが同様に示せるので，連続関数 $F(x)=|x|$ を考えればよい．

１５－２．可測関数列

まず数の集合の上限 (sup)，下限 (inf) の定義を思い出そう．忘れていたら調べる！

命題 15.5

$\{f_1, f_2, \cdots\}$ を X 上の可測関数列とするとき，

$$\sup f_n(x),\ \inf f_n(x)$$

も可測関数である．

ここでは関数列の上限，下限が現れるが，その定義は，各 x に対して，数列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ の sup を「x における関数の値」$\sup f_n(x)$ とする．(数の集合 $\{f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ の sup)

sup は max と違って，必ず存在するが，$+\infty$ となることもある．

まず，$\{x\in X \mid \sup f_n(x)=\infty\}$ が可測集合であることをみよう．

$$\sup f_n(x)=\infty \iff \forall N\in\mathbb{N}, \exists n \text{ such that } f_n(x)>N$$

$$\iff \forall N\in\mathbb{N},\ x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x' \mid f_n(x')>N\}$$

($\exists n$ を和集合で表した．)

$$\iff x\in\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x' \mid f_n(x')>N\}$$

(「すべての $N\in\mathbb{N}$ に対して」を共通部分で表した．) $\{f_i\}$ は可測集合列だから，

$$\{x' \mid f_n(x')>N\}\in\mathcal{B}$$

σ–加法族の性質より

$$\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \mid f_n(x)>N\}\in\mathcal{B}$$

ゆえに，$\{x \in X \mid \sup f_n(x) = \infty\}$ は可測集合である．

つぎに，$\sup f_n(x) < +\infty$（有限値）となる x について考える．（このとき，数列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ は有界である．）

任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\sup f_n(x) \le \alpha \quad \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \le \alpha$$

（sup の定義の一部！）集合であらわすと，

$$\{x \in X \mid \sup f_n(x) \le \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \le \alpha\}.$$

可測関数列を考えていたから，

$$\{x \in X \mid f_n(x) \le \alpha\} \in \mathcal{B}.$$

よって，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid f_n(x) \le \alpha\} \in \mathcal{B}.$$
$$\{x \in X \mid \sup f_n(x) \le \alpha\} \in \mathcal{B}.$$

inf に関しても同様である．

特に，単調増加列（等号が入ることを意識する場合は単調非減少列という）

$f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots$ に対しては，

$$\sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

単調減少列（単調非増加列）$f_1(x) \ge f_2(x) \ge \ldots$ に対しては，

$$\inf f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

であることに注意しよう．

> 単調列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は可測である．

数列の上極限，下極限の定義は

$$\limsup a_n := \lim_{k\to\infty} \sup_{n\ge k} a_n.$$

$$\liminf a_n := \lim_{k\to\infty} \inf_{n\ge k} a_n.$$

$b_k := \sup_{n \geq k} a_n$ とおくと，$\{b_k\}$ は単調減少数列だから，極限（$-\infty$ も許す）が存在する．

命題 15.6 の系

$f_1(x), f_2(x), \ldots$ を可測関数の列とするとき，$\limsup f_n(x), \liminf f_n(x)$ は可測である．

１６．可測関数の積分

教科書『ルベーグ積分３０講』第１８講

いよいよ今回は積分を定義します．

今回は測度空間 $(X, \mathcal{B}, M)$ を１つ固定して，ずっとその上で考えていきます．

$\mathcal{B}$ は σ–加法族ですが，ここで講義ノート４にある σ–加法族の定義と基本性質 (B1)–(B6) を自分で書きくださるかチェックしてください．全部書けない人は今覚えること！（しつこい）

$f : X \to \mathbb{R}$ が可測関数であることの定義も見ないで書けますか？

● 数学の授業は前に習った定義を覚えていない状態で聞いてもわかりませんので（「その場にいた」という安心感を得ること以外メリットなし！），忘れた定義はこまめに確かめよう．

１６－１．単関数とその積分

この章では次の条件を置くことにします．

可測関数 f は $\pm\infty$ も関数の値として取れることにすると前に決めましたが，ここでは $f(x) = \pm\infty$ となるような x 全体の集合の測度は 0 とする．すなわち，

$$m(\{x \in X \mid f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

集合 A の 定義関数 $\phi(x;A): X \to \mathbb{R}$ を

$$\phi(x;A) = \phi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

によって定義する．

- 教科書では特性関数とよんでいます．

命題 16.1

$A \in \mathcal{B}$ ならば，A の定義関数 $\phi(x;A)$ は可測である．

練習のために証明してみましょう．$\phi(x;A)$ の取りうる値は $\{0,1\}$ であることに注意します．

証明

可測の定義 (2) を用いる．$\alpha \leq 0$ のとき，$\phi_A^{-1}([\alpha,\infty)) = \phi_A^{-1}(\{0,1\}) = X \in \mathcal{B}$, $0 < \alpha \leq 1$ のとき，$\phi_A^{-1}([\alpha,\infty)) = \phi_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{B}$, $1 < \alpha$ のとき，$\phi_A^{-1}([\alpha,\infty)) = \emptyset \in \mathcal{B}$. よって，$\phi(x;A)$ は可測である．　【証明終】

次に，定義関数の線形結合で表される関数を考えます．

X の可測集合による 分割 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，すなわち，$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ は互いに素で（「互いに素」の定義はだいじょうぶですか？）

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

を満たすものとします．

単関数の定義

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ を X の分割，$\alpha_1, \alpha_2, \quad \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ とするとき，

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \phi(x;A_i)$$

と表される関数を 単関数(simple function)，または**階段関数** (step function) とよぶ．

X を有限個の部分集合で分割していることが重要です．単関数は有限個の値しかとりません．ですから，単関数は有界な関数です（ある $K > 0$ があって，$\forall x \in X$ に対して $|\phi(x)| < K$）．

命題 16.2（単関数の性質）

(i) 単関数は可測関数である．
(ii) ϕ, ψ を単関数，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とするとき，

$$\alpha\phi(x) + \beta\psi(x), \quad \phi(x)\psi(x),$$

$$\phi(x) \vee \psi(x), \quad \phi(x) \wedge \psi(x)$$

も単関数である．

ここで，$\phi(x) \vee \psi(x) = \max\{\phi(x), \psi(x)\}$, $\phi(x) \wedge \psi(x) = \min\{\phi(x), \psi(x)\}$ で，2 つのものの最大値，最小値を表すのによく使われる記号です．

(i) の証明は一瞬で思いついてほしいのですが，いかがですか？

証明

(i) 命題 15.4 および命題 16.1 より，単関数は可測である．

(ii) 最初のひとつだけ証明してみる．(他も同様)

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \phi(x; A_i),$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \ \phi(x; B_j)$$

とあらわす．このとき，$\{A_i \cap B_j\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, \ell$ は X の分割である．(中に $\emptyset$ があってもよい）すなわち，$(i, j) \neq (i', j')$ ならば，$(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = \emptyset$, かつ

$$X = \bigcup_{(i,j)} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{\ell} (A_i \cap B_j).$$

一般に，A と B が互いに素ならば，

$$\phi(x; A \cup B) = \phi(x; A) + \phi(x; B),$$

であることと，$A_i = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\ell} (A_i \cap B_j)$ などに注意すると，

$$\alpha\phi(x)+\beta\psi(x)=\alpha(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \phi(x;A_i))+\beta(\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j\ \phi(x;B_j))$$

$$=\alpha(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \sum_{j=1}^{\ell}\phi(x;A_i\cap B_j))+\beta(\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j\sum_{i=1}^{n}\psi(x;A_i\cap B_j))$$

$$=\alpha(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}\alpha_i\ \phi(x;A_i\cap B_j))+\beta(\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n}\beta_j\ \psi(x;A_i\cap B_j))$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}(\alpha\alpha_i+\beta\beta_j)\ \phi(x;A_i\cap B_j).$$

最後の式は単関数の形をしている．

単関数の積分の定義

単関数

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ \phi(x;A_i)$$

に対し，X 上の積分 $\int_X \phi(x)\ m(dx)$ を

$$\int_X \phi(x)\ m(dx):=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m(A_i)$$

によって定義する．一般の可測集合 E 上の積分 $\int_E \phi(x)\ m(dx)$ を

$$\int_E \phi(x)\ m(dx):=\int_X \phi(x)\phi(x;E)m(dx)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i m(A_i\cap E)$$

で定義する．

E 上の積分は教科書と見かけが違いますが，同じことです．この講義ではすべて X 上の積分として表しています．

ここで，$\phi(x;A\cap B)=\phi(x;A)\phi(x;B)$ を用いました．x がどの集合に含まれるか場合分けして考えれば証明できます．

１６－２．単関数の積分の性質

命題 16.3（単関数の積分の性質）

$\phi(x), \psi(x)$ を X 上の単関数とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\phi(x) \geq \psi(x) \geq 0$ ならば，

$$\int_X \phi(x)\ m(dx) \geq \int_X \psi(x)\ m(dx) \geq 0.$$

(2) $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\int_X (a\phi(x) + b\psi(x))\ m(dx) = a\int_X \phi(x)\ m(dx) + b\int_X \psi(x)\ m(dx).$$

(3) $E \cap F = \emptyset$ ならば，

$$\int_{(E\cup F)} \phi(x)\ m(dx) = \int_E \phi(x)\ m(dx) + \int_F \phi(x)\ m(dx).$$

• (1), (2) は $\int_X$ に対して書いてありますが，$\phi(x)\phi(x; E)$ も単関数なので，$\int_X$ を $\int_E$ で置き換えた式も当然成り立ちます．

(1) だけ証明してみましょう．

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ \phi(x; A_i),$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j\ \phi(x; B_j)$$

とおいて，X の分割 $\{A_i \cap B_j\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, \ell$ を考える．

まず，$\psi(x) \geq 0$ ならば，$\beta_j \geq 0$, また，測度は必ず 0 以上だから，

$$\int_X \psi(x)\ m(dx) \geq 0$$

は直ちにえられる．命題 16.2 の証明と同様に，

$$\int_X \phi(x)\ m(dx) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell} \alpha_i\ \phi(x; A_i \cap B_j).$$

ここで，$A_i\cap B_j\neq\emptyset$ ならば，$x\in A_i\cap B_j$ のとき，$\alpha_i=\phi(x)\geq\psi(x)=\beta_j$，$A_i\cap B_j=\emptyset$ ならば $m(A_i\cap B_j)=0$ であるから

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}\alpha_i\ \phi(x;A_i\cap B_j)\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j\ \phi(x;A_i\cap B_j)=\int_X\psi(x)\ m(dx).$$

残りも各自証明しよう．

１６－３．可測関数の積分

非負可測関数の積分の定義

$f(x)\geq 0$ である可測関数 f に対し，f の（X 上の）積分を

$$\int_X f(x)\ m(dx):=\sup\int_X\phi(x)\ m(dx) \qquad (*)$$

で定義する．ここで，sup は

$$0\leq\phi(x)\leq f(x) \qquad (**)$$

を満たすすべての単関数にわたってとるものとする．

（＊＊）を満たすすべての単関数に関する sup というとイメージしにくいが，次の定理がある．

定理 16.4（非負可測関数の単関数近似）

非負の可測関数 f に対し，単関数の増加（非減少）列

$$0\leq\phi_1(x)\leq\phi_2(x)\leq\cdots\leq\phi_n(x)\leq\cdots$$

が存在して，

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=f(x)$$

を満たす．

このような単関数の増加列は，実は容易に作ることができます．$X=\mathbb{R}$ として，xy 平面内の関数 $y=f(x)$ のグラフを思い浮かべます．とりあえず連続なグラフでも描いてみましょう．x 軸に平行な幅 $1/2^n$ で並ぶ直線群 $y=\dfrac{k}{2^n}$ を描いて xy 平面を横にスライスします．各

x に対して $f(x)$ はどれかの隣り合う直線の間にあるわけですから，$\dfrac{k}{2^n} \le f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}$ となる k がただ一つ存在し，このとき $\phi_n(x) = \dfrac{k}{2^n}$ と区間の小さい側の端に合わせて定義します．このとき，$\phi_n(x) \le f(x), |\phi_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{2^n}$ となります．これがアイデアです．一般の X の場合は次のように証明できます．

証明

$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$A_k^{(n)} := \{x \in X \mid \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\},\quad k = 1, 2, \ldots, n\ 2^n - 1,$$

$$A^{(n)} := \{x \in X \mid f(x) \ge n\}$$

とおくと，f は可測なので，これらはすべて可測集合である．また，n を固定したとき，これら $n2^n + 1$ 個の集合は定義によって互いに素であり，X の分割となる．すなわち，

$$X = A_0^{(n)} \cup A_1^{(n)} \cup \cdots \cup A_{n2^n-1}^{(n)} \cup A^{(n)}.$$

そこで

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\ \phi(x; A_k^{(n)}) + n\phi(x; A^{(n)})$$

をおくと，ϕ_n は単関数で，各 $x \in X$ に対して，$\phi_1(x), \phi_2(x). \ldots, \phi_n(x), \ldots$ は単調増加数列である．また $f(x)$ が有限値をとるならば，十分大きな N に対して

$$|f(x) - \phi_n(x)| < \frac{1}{2^n},\quad \forall n \ge N$$

である．$f(x) = +\infty$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = +\infty,$$

$f(x)$ が有限値の場合も

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x).$$

よって，望む単関数列が得られた．　【証明終】

• $\phi_n(x)$ は各 x に対して，$n \to \infty$ のとき $f(x)$ に収束する．このような収束の仕方を**各点収束**といいます．

一様収束は各点収束より強い収束です．微分積分 3 で習ったと思いますが，恐れず定義を思い出そう.（第 18 講で使います.）

レポート　9

【1】　$\mathbb{R}^k$ の開集合は可算個の（k 次元）開球の和集合で表せることを示せ（ヒント：有理数は可算）.

【2】　補題 15.2 を証明せよ.

命題 15.5 の証明はレポートにしなくてよいが，各自完成させせよ.

【3】　命題 16.2 の 4 つのうちこの講義で証明していないものを 1 つ以上証明せよ.

【4】　命題 16.3 (2) のうちこの講義で証明していないものを 1 つ以上証明せよ

【5】　定理 16.4 の証明で作った単関数が n に関して単調増加であることを説明せよ．式を使って証明しても，$X = \mathbb{R}$ として図を描いて説明してもどちらでもよい.

（ヒントになるかもしれないこと：　ある k に対して，$\dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}$ ならば，$\dfrac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \dfrac{2k+1}{2^{n+1}}$，または $\dfrac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \dfrac{2k+2}{2^{n+1}}$）