解析学Ｃ第８回講義ノート　(2021.6.15 用）6.9 版

１３．２つの可測性の一致

教科書『ルベーグ積分３０講』第１３講

この章では，後回しにしていた，ルベーグの意味での可測性とカラテオドリの意味での可測性が，$\mathbb{R}^n$ の有限集合の場合は同値であることを証明します．

その証明には，これまでやってきたこと，特に,（カラテオドリの）可測集合全体が σ–加法族をなすこと，前回やった等測包などが威力を発揮します．

これまで，いろいろな概念や定理が出てきましたが，講義ノートを読んでいって，忘れているものに出会う度に，調べましょう.（数学ってそういう勉強のしかたしないといつまでたっても身につかない）

等測包とは何か，忘れていたら見直してください．等測包が存在することの証明の詳しい説明は前回省略しましたが，教科書の証明を追えましたか？つぎの２点に答えられたら，あなたはちゃんと理解している！

1) なぜわざわざ半開区間 $I_n^{(\ell)}$ をちょっと広げて開区間 $\tilde{I}_n^{(\ell)}$ にしたか？

2) 証明の下から３行目あたりで $\ell \to \infty$ としているが，O_ℓ は集合としての極限はないかもしれないけど，だいじょうぶ？

１３－１．２つの可測性の一致

定理

$\mathbb{R}^k$ の有界な部分集合 S に対し，S がルベーグの意味で可測であることと，カラテオドリの意味で可測であることは同値である．

証明

S を含む十分大きい半開区間を J とする．S がカラテオドリの意味で可測であるとは，任意の $E \subset \mathbb{R}^k$ に対して

$$m^*(S) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$$

を満たすことである．ここで $E = J$ ととれば，ルベーグの意味で可測であることの定義になるので,「カラテオドリ $\Longrightarrow$ ルベーグ」は示せたことになる．

以下,「ルベーグ $\Longrightarrow$ カラテオドリ」を証明する．ルベーグの意味で可測とは，

$$(1) \qquad m^*(S) = m_*(S) = |J| - m^*(J \cap S^c)$$

が成り立つことである.（このあたりのいきさつを忘れていたら，ルベーグ内測度のあたりをみなおそう.）

（1）をみたす S がカラテオドリの意味で可測であることを示す．以下,「可測」とはカラテオドリの意味で可測とする．可測集合は σ–加法族をなすことを示した．

S の等測包を G とする．等測包は可測集合で名前の通り外側から S を包み，外測度が S と等しい可測集合である．すなわち，

$$S \subset G, \quad m^*(S) = m^*(G) = m(G).$$

$J \cap S^c$ の等測包を $\tilde{G}$ とする．

$$(2) \qquad K := J \cap \tilde{G}^c$$

とおく．$\tilde{G}$ も長方形 J も可測だから，K も可測集合で（可測集合全体はは σ–加法族をなすから，可測集合の補集合，２つの可測集合の共通部分も可測集合），

$$K \subset S \subset G.$$

（確かめよ．一般に，$A \subset B$ ならば，$A^c \supset B^c$ であることを用いる.）

$$J \cap S^c \subset J \cap \tilde{G} \subset \tilde{G}.$$

$m^*(J \cap S^c) = m(\tilde{G})$ より，$m(J \cap \tilde{G}) = m(\tilde{G})$ であることに注意しておく．

また，K の定義から

$$J \cap K^c = J \cap (J \cap \tilde{G}^c)^c = J \cap (J^c \cup \tilde{G}) = J \cap \tilde{G}$$

であるから

$$(3) \qquad m(J \cap K^c) = m(J \cap \tilde{G}) = m(\tilde{G}).$$

J は次のように互いに共通部分をもたない２つの集合に分解できる．

$$J = K \cup (J \cap K^c).$$

ここに現れる集合はどれも可測集合だから,（m^* は外測度で，m は測度．少しでも定義があいまいだったら，前に戻って確認しよう）$K \subset J$, $m(J) = m(K) + m(J \cap K^c)$ より，

$$m(K) = m(J) - m(J \cap K^c)$$

$$= |J| - m(\tilde{G}) \qquad\qquad (\,(3)\text{ より})$$
$$= |J| - m^*(J \cap S^c) \qquad\qquad (\tilde{G}\text{は } J \cap S^c \text{ の等測包})$$

　上の式と (1) より $m(K) = m^*(S)$，および G が S の等測包であることから，

$$m(K) = m^*(S) = m(G).$$

これより，$m(G-K) = 0$（G も K も可測だから $G - K = G \cap K^c$ も可測）となる．

$S - K \subset G - K$ より，$S - K$ も零集合（零集合は可測．教科書 p.73）である．(零集合について忘れていたら，教科書 p.73 の完備性を参照すべし）S は

$$S = K \cup (S - K)$$

と可測集合の和集合として表されるから，S も可測である．

【証明終】

１３－２．可測集合の表示

　まず，上の定理に出てきた K は

$$m(K) = m(J) - m(J \cap K^c) = |J| - m^*(J \cap S^c) = m_*(S)$$

を満たすことに注意しよう（ルベーグ内測度 m_* を忘れていたら定義を見直そう）．さらに，K は F_σ 集合です．(各自確かめよ.)

K を S の**等測核**といいます．

上の定理の証明のなかで次のことが示されました．

命題

S を有界な（ルベーグの意味で＝カラテオドリの意味で）可測集合とする．S の等測包を G，等測核を K とすると，

$$K \subset S \subset G$$

であり，$G - K$ は零集合である．

つまり，可測集合は，可算個の開集合の共通部分の形の集合から零集合を除いたものであり，かつ，可算個の閉集合の和集合に零集合を加えたものである，ということです．
　可測集合というとイメージわかないかもしれませんが，これで少しは感じがわかるのではないでしょうか．

１４．可測関数

教科書『ルベーグ積分３０講』第１７講前半

１年生で習った積分はリーマン積分とよばれます．区間 $[a,b]$ 上での連続な関数の積分は次のように定義されました．まず区間を $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ のように分割し，和

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(z_i)\ (x_i - x_{i-1}), \quad z_i \in [x_{i-1}, x_i)$$

を考えます．もし，[分割の幅] $\to 0$ の極限をとるとき，分割を細かくする仕方によらず，代表点 z_i の取り方によらず，同じ値に収束するならば，その値を

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

と表しました．連続な関数の場合は「有界な閉区間上で連続な関数は一様連続である」という性質が強力に効いて，上のような極限が存在することが示せました．

教科書第 15 講にこのあたりのことがきちんとまとめられています.（じっくり読んで予習（復習？）レポートを書きましょう.）

以下 $f \geq 0$ として，図で考えます．リーマン積分は，関数と x 軸の間の面積を短冊のような細い長方形の列の面積で近似していることになります.「縦割りの近似」です.

一方，ルベーグ積分は「横割りの近似」と言っていいでしょう．教科書第 18 講できちんと定義しますが，リーマン積分と比較するために，大雑把に見ていきましょう．xy 平面を 2^{-n} の幅で並んだ水平な線で横にスライスしていきます．そして f を近似する関数 f_n を，各 x に対して $\dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}$ を満たす整数 k をとり（全体をスライスしているので必ず存在する！），この範囲の x に対して $f_n(x) := \dfrac{k}{2^n}$ と決めます（教科書 p.138 の図参照．こうして決めた，f_n と x 軸に挟まれた部分は，f が連続関数ならば長方形を組み合わせた階段型の図形になっています．その面積を求めるのに

$$\{x \mid \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$$

のような集合の測度が必要になります．可測関数とはこのような集合の測度が測れる関数です.）

今回は，ルベーグ積分の「被積分関数」となりうる可測関数を定義します．可測関数は，連続関数，区分的に連続な関数のみならず，有理数の x に対し 1，無理数の x に対し 0 であるような関数も含みます.

１４－１．可測関数

ここでは一般の可測空間 $(X, \mathcal{B}, m)$（空でない集合 X とその上の σ–加法族 $\mathcal{B}$ と測度 m の 3 つ組）を考えます．

♣ ここで，σ–加法族の定義と基本性質を覚えている限り書きだしてみてください．

講義ノート 4 の (B1)-(B3), (B3'), (B3"), (B4)–(B6) を全部書き出せましたか？これを覚えていないと先に進めません．忘れていた部分は**今，覚える！**

可測関数の定義

関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**可測** (measurable) であるとは，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha < \beta)$ に対し，

$$\{x \mid \alpha \le f(x) < \beta\} \in \mathcal{B}$$

が成り立つことである．

$\{x \mid \alpha \le f(x) < \beta\}$ は $f^{-1}([\alpha, \beta))$ のようにも書き，f による $[\alpha, \beta)$ の**逆像**（f によって $[\alpha, \beta)$ に写されてくる x 全体の集合）といいます．

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ と定義します．

この先，関数は $+\infty$, $-\infty$ も「値」として取ってよいことにします．すなわち，しばしば

$$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

を扱います．そのため，上の定義に $f^{-1}(+\infty) = \{x \mid f(x) = +\infty\} \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(-\infty) = \{x \mid f(x) = -\infty\} \in \mathcal{B}$ も加えておきます．

この先，次の性質をたくさん使います．

逆像の性質

一般に，写像 $g : X \to Y$ および $A, B \subset Y$ に対し，

1) $g^{-1}(A \cup B) = g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B)$.

2) $g^{-1}(A \cap B) = g^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$.

3) $g^{-1}(A^c) = (g^{-1}(A))^c$.

4) $g^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(A_n)$.

5) $g^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} g^{-1}(A_n)$.

1) と 3) を証明してみましょう．証明の仕方は基本的には「$C = D \iff C \subset D, C \supset D$」および,「$C \subset D \iff \forall x \in C$ に対して $x \in D$」ですが，もっと楽にできることもあります．

1) $g(x) \in A$ ならば $g(x) \in A \cup B$. 逆像の定義を考えると，$g^{-1}(A) \subset g^{-1}(A \cup B)$. 同様に，$g^{-1}(B) \subset g^{-1}(A \cup B)$. この 2 つを合わせると $g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B) \subset g^{-1}(A \cup B)$.

逆向きの包含関係を言うには，まず，$x \in g^{-1}(A \cup B)$ を任意にとると，$g(x) \in A \cup B$, すなわち，$g(x) \in A$ または $g(x) \in B$. このことは，$x \in g^{-1}(A) \cup g^{-1}(B)$ を意味する．

3)
$$
\begin{aligned}
x \in g^{-1}(A^c) &\iff g(x) \in A^c \\
&\iff g(x) \notin A \\
&\iff x \notin g^{-1}(A) \\
&\iff x \in (g^{-1}(A))^c.
\end{aligned}
$$

こんな感じで証明できます．残りはレポート問題です．いちど自分でやっておくと，この先ずっと自信をもって使えます．

それでは早速使いましょう．

命題 14.1

$f : X \to \mathbb{R}$ が可測な関数ならば，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

(a) $f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{B}$,
(b) $f^{-1}([\alpha, +\infty)) \in \mathcal{B}$,
(c) $f^{-1}((\alpha, \beta)) \in \mathcal{B}$,
(d) $f^{-1}([\alpha, \beta]) \in \mathcal{B}$,
(e) $f^{-1}((\alpha, \beta]) \in \mathcal{B}$.

上では,「任意の α, β, $(\alpha < \beta)$ に対し，$f^{-1}([\alpha, \beta)) \in \mathcal{B}$」と可測関数を定義しましたが，ほかの形の区間に対しても，逆像が $\mathcal{B}$ に入ることを示します．ここで $\mathcal{B}$ が σ–加法族であることを使っていくつか証明してみます．

まず，(a) を証明するために，

$$(-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, \alpha)$$

と書き直す．
　逆像の性質 (4) より，

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, \alpha)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-n, \alpha)) \in \mathcal{B}$$

ここで，可測関数の定義の $f^{-1}([-n, \alpha)) \in \mathcal{B}$ と，$\mathcal{B}$ が σ–加法族であることを用いた．

$$f^{-1}((-\infty, \alpha)) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, \alpha))$$

より，$f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \mathcal{B}$. 【証明終】

♣ 上の証明のようにどこで何を使ったかをはっきりさせよう．

次に，(d) の $f^{-1}([\alpha, \beta]) \in \mathcal{B}$ を証明する．まず，

$$[\alpha, \beta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha, \beta + \frac{1}{n})$$

と書き換える．
　（$[\alpha, \beta] \subset [\alpha, \beta + \frac{1}{n})$ がすべての n に対して成り立つから，包含関係 $\subset$ は成り立つ．
　包含関係 $\supset$ を示すには，任意に $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha, \beta + \frac{1}{n})$ をとる．$\alpha \le x < \beta + \frac{1}{n}$ がすべての n に対して成り立つから，両辺 $n \to \infty$ とすると，$\alpha \le x \le \beta$ となり（極限をとったので β の側に等号がつく），証明したいことが言えた.【証明終】

実は，可測関数の定義として，$[\alpha,\beta)$ の代わりに (a)–(e) に挙げたどの形の区間を用いて定義しても同じであることがわかります.

<u>命題 14.1'</u>

任意の α,β に対して，次の 5 つのうちどれかが成り立てば f は可測である．すなわち，$f^{-1}([\alpha,\beta)) \in \mathcal{B}$.

(a) $f^{-1}((-\infty,\alpha)) \in \mathcal{B}$,
(b) $f^{-1}([\alpha,+\infty)) \in \mathcal{B}$,
(c) $f^{-1}((\alpha,\beta)) \in \mathcal{B}$,
(d) $f^{-1}([\alpha,\beta]) \in \mathcal{B}$,
(e) $f^{-1}((\alpha,\beta]) \in \mathcal{B}$.

これを示すには $[\alpha,\beta)$ を (a)–(e) のそれぞれの形の区間の和集合，共通部分，補集合で表せばよい.

例えば，(a) の形の区間で表してみよう.

$$[\alpha,\beta) = [\alpha,+\infty) \cap [\beta,+\infty)^c.$$

この右辺を書き直すと，

$$[\alpha,\beta) = (-\infty,\alpha)^c \cap (-\infty,\beta).$$

また，(d) の形の区間で表すと，

$$[\alpha,\beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha,\beta-\frac{1}{n}]$$

です.（各自確かめよ.）これと $\mathcal{B}$ が σ–加法族であることから命題 14.1' が証明できます.

１４－２．$\mathbb{R}$ の開集合と閉集合の逆像

<u>命題 14.2</u>

f を可測関数とする．このとき次が成り立つ.

(i) $\mathbb{R}$ の任意の開集合 O に対し，$f^{-1}(O) \in \mathcal{B}$.

(ii) $\mathbb{R}$ の任意の閉集合 F に対し，$f^{-1}(F) \in \mathcal{B}$.

<u>証明</u>

$\mathbb{R}$ の任意の開集合 O は可算個の区間 $[\alpha_n, \beta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ の和集合として表される（前に 2 度でてきて，証明は自由レポートになっている事実）．すなわち，

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n).$$

ここで，逆像の性質 (4) より，

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([\alpha_n, \beta_n)).$$

右辺は $\mathcal{B}$ に属すから，$f^{-1}(O) \in \mathcal{B}$ が示せた．

F を $\mathbb{R}$ の任意の閉集合とすると，F^c は開集合だから（♣ 覚えておいて！），$f^{-1}(F^c) \in \mathcal{B}$. 逆像の性質 (3) より，右辺は $(f^{-1}(F))^c$ だから，$(f^{-1}(F))^c \in \mathcal{B}$. よって，$f^{-1}(F) \in \mathcal{B}$.

この講義では証明はしないが，次が成り立つ．

> 任意のボレル集合（♣ 定義を思い出そう！）B に対して，
>
> $$f^{-1}(B) \in \mathcal{B}.$$

<u>レポート 8</u>

【1】逆像の性質でここで証明していないものを証明せよ．説明はていねいに．

【2】（元気な人）命題 14.1, 14.1' で証明されていないもの，ヒントだけあるものをきちんと証明せよ．そのとき，どこで何を用いたかを明記せよ．