解析学Ｃ第７回講義ノート　(2021.6.8 用）

１２．ルベーグ測度

教科書『ルベーグ積分３０講』第１２講

この章では，k 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ 上のルベーグ測度を扱います．すでに平面上の（すなわち２次元）ルベーグ測度は，ルベーグのアイデアに沿って，第５講から扱ってきました．ここでは，k 次元ユークリッド空間でも同様に話を進めることができること，そして，（k 次元）半開区間で覆って定義したルベーグ外測度に対して，開集合，閉集合が可測であることを示します.（第９講以降,「可測」はつねに「カラテオドリの意味で可測」を意味することにします.）

１２－１．$\mathbb{R}^k$ 上のルベーグ外測度

$\mathbb{R}^k$ 上のルベーグ外測度は講義ノート８にありますが，思い出してみましょう．

> $\mathbb{R}^k$ の「半開区間」I は
>
> $$I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_k, b_k)$$
> $$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ : \ a_1 \leq x_1 < b_1,\ a_2 \leq x_2 < b_2,\ \ldots,\ a_k \leq x_k < b_k \ \}.$$
>
> の形をしていて，I の「体積」$|I|$ は
>
> $$|I| = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_k - a_k)$$
>
> と定義する．

$\mathbb{R}^k$ の部分集合 S に対して，S を覆う「半開区間」の列 $\{I_n\}$

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

を考え，このような列全体にわたって inf をとり，

$$m^*(S) := \inf \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

とおく．$m^*(S)$ を S の（k 次元）ルベーグ外測度 という．

任意の $E \subset \mathbb{R}^k$ に対して，

$$m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$$

がなりたつとき，S は 可測である という．

定理

$\mathbb{R}^k$ の有界な部分集合 S がルベーグの意味で可測ならば，カラテオドリの意味で可測である．

上の定理の証明は次回やります．

ところで，第 5 講（第 2 回講義資料）で，平面上の長方形（2 次元の半開区間）のルベーグ外測度は普通の意味の面積に一致することを確かめました．一般の k 次元でも同様のことが言えます．でも，半開区間が可測集合であることはまだ証明していませんでした．$\mathbb{R}^k$ の半開区間が可測であることを，少し準備してから証明します．

$\mathbb{R}^k$ 上には普通のユークリッド距離が入っているとし，教科書に合わせて，$x, y \in \mathbb{R}^k$ の間のユークリッド距離を $dist(x, y)$ を表すことにします．このとき，2 つの集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ の間の距離を

$$dist(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} dist(x, y)$$

と定義します．すべての $x \in A,\ y \in B$ であるような点の組 (x, y) の距離で最小（正確には inf ですが）ということです．

定義を習ったら，例を考える習慣をつけよう．

平面内で
(1) 原点を中心とする半径 1 の閉球（円とその内部）と，$(3,0)$ を中心とする半径 1 の閉球の間の距離は？
(2) 原点を中心とする半径 1 の開球（円の内部のみ）と，$(3,0)$ を中心とする半径 1 の開球の間の距離は？
(3) 原点（1 点集合）と $\mathbb{Q}$ の間の距離は？
（答はこの講義ノートの最後にあります.）

命題 12.1

k 次元ルベーグ外測度 m^* に関して，次が成り立つ．

$$dist(A,B)>0 \implies m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

この性質をもつ外測度を一般に，**距離的外測度** (metric outer measure) とよびます．

証明すべきことをじっと見てみましょう．正の距離だけ離れているので，半開区間を十分小さくすれば A を覆う半開区間は，どれも B を覆う半開区間と重ならないようにとれます．重なっていたら A と B の間の何もないところにかかっているので，inf をとるとき不利です．このことをきちんと説明していきましょう．

証明

$dist(A,B)=\rho>0$ とおく．$\mathbb{R}^k$ 全体を一辺 $\rho/3$ の k 次元半開区間のブロックに分ける．すなわち，

$$J_{s_1s_2\cdots s_k}:=\left[\,\frac{\rho}{3}s_1,\frac{\rho}{3}(s_1+1)\right)\times\left[\,\frac{\rho}{3}s_2,\frac{\rho}{3}(s_2+1)\right)\times\cdots\times\left[\,\frac{\rho}{3}s_k,\frac{\rho}{3}(s_k+1)\right),$$

$$s_1,s_2,\cdots,s_k\in\mathbb{Z}$$

とする．これによって $\mathbb{R}^k$ は半開区間の互いに重なりをもたないタイルでびっしり覆われる.（なぜ，分母は 2 ではなく 3 を選んだのだろうか？）

外測度は inf を使って定義しているので，
（inf の定義を忘れていたらここで見直そうね．講義についてくるには，定義を確認しながら進むことが必要です.）

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$A \cup B$ を覆う半開区間の列 $\{I_n\}, n = 1, 2, \ldots$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A \cup B) + \varepsilon$$

となるものがとれる．

さらに，

$$\{ \ I_n \cap J_{s_1 s_2 \cdots s_k} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ s_1, s_2, \cdots, s_k \in \mathbb{Z} \ \}$$

を考えると，これは $\{I_n\}$ をタイルで細分したもので，ひとつひとつは半開区間になっている．高々可算個だから，$A \cup B$ の半開区間による被覆である．

このうち，A と交わるものだけを選んで 1 列に並べたものを $\{I_i^A\}$，B と交わるものだけを選んで 1 列に並べたものを $\{I_i^B\}$ とすると，これらの半開区間の大きさをうまく選んだので，$\{I_i^A\}$ に属するどの区間も $\{I_i^B\}$ に属する区間と共通部分をもたない．よって，

$$m^*(A) + m^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^A| + \sum_{i=1}^{\infty} |I_i^B|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

（ここで，各 I_n は互いに素な有限個の $I_n \cap J_{s_1 s_2 \cdots s_k}$ の和集合であり，$|I_n|$ はこれらの有限個の細分半開区間の $|I_n \cap J_{s_1 s_2 \cdots s_k}|$ の和で表せることに注意．さらに，$\{I_i^A\}$ と $\{I_i^B\}$ を選んだときに，捨てられた細分半開区間もある！）

ε は任意だから（いくらでも 0 に近づけることができて），

$$m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B).$$

一方，ルベーグ外測度の性質から,（忘れていたら第 2 回講義資料参照）

$$m^*(A) + m^*(B) \geq m^*(A \cup B).$$

よって，

$$m^*(A) + m^*(B) = m^*(A \cup B).$$

証明終

これで，ルベーグ外測度が距離的外測度であることが証明された．

♣ 読んでいく途中で忘れている定義や基本性質に気がついたら，かならず確かめよう．

１２－２．半開区間の可測性

> 命題 12.2
>
> 半開区間は可測である．

命題の中の「可測」は，最初に言った通り，カラテオドリの意味での可測のことです．

証明（教科書と多少異なります）

I を半開区間とする．

任意の $E \subset \mathbb{R}^k$ に対して

$$m^*(E) = m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c)$$

を示す．$\varepsilon > 0$ を十分小さくとって，

$$I_\varepsilon := [a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon) \times [a_2 + \varepsilon, b_2 - \varepsilon) \times \cdots \times [a_k + \varepsilon, b_k - \varepsilon)$$

を考える．I をぐるっと幅 ε だけ小さくしたものである．

このとき,（半開区間の形より）

$$dist(E \cap I_\varepsilon, E \cap I^c) \geq \varepsilon$$

である.（わかりにくければ図を描こう.）

したがって，$E \cap (I_\varepsilon \cup I^c) = (E \cap I_\varepsilon) \cup (E \cap I^c)$ であるから,（自分で証明できる？）

$$m^*(E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)) = m^*((E \cap I_\varepsilon) \cup (E \cap I^c)) = m^*(E \cap I_\varepsilon) + m^*(E \cap I^c) \tag{1}$$

ここで，命題 12.1 を用いた．

一方，

$$E = (E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)) \cup (E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)^c)$$

と分けると，外測度の劣加法性より

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)) + m^*(E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)^c).$$

$$0 \leq m^*(E) - m^*(E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)) \leq m^*(E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)^c).$$

ここで,

$$E \cap ((I_\varepsilon \cup I^c))^c \subset ((I_\varepsilon \cup I^c))^c = I_\varepsilon^c \cap I = I - I_\varepsilon$$

に注意すると，

これより，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$0 \leq m^*(E) - m^*(E \cap (I_\varepsilon \cup I^c)) \leq m^*(I - I_\varepsilon) \to 0.$$

また，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$0 \leq m^*(E \cap I) - m^*(E \cap I_\varepsilon) \leq m^*(I - I_\varepsilon) \to 0.$$

したがって，(1) で $\varepsilon \to 0$ とすると，

$$m^*(E) = m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c)$$

をえる．証明終

注意：$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$m^*(I - I_\varepsilon) \to 0.$$

は，本当はきちんと示す必要がある．これは，第 5 講で $\mathbb{R}^2$ 内の長方形（半開区間）のルベーグ外測度が普通の意味の測度であることの証明と同じようにして，$m^*(I - I_\varepsilon) = |I| - |I_\varepsilon|$ を示すことによって可能である.（自由レポート）

半開区間が可測なことが分かったので，

$$m(I) = m^*(I) = |I| = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_k - a_k).$$

１２－３．$\mathbb{R}^k$ の開集合と閉集合

<u>命題 12.3</u>
$\mathbb{R}^k$ の開集合と閉集合は可測である．

これを証明するには次の命題を示せば十分です．

<u>命題 12.4</u>
$\mathbb{R}^k$ の任意の開集合は可算個の半開区間の和として表される．

この命題の証明は以前の自由レポートの課題でした．

ここでは命題 12.4 が成り立つことをみとめて進みます．

第 6 回講義資料で可測集合全体 $\mathcal{M}$ は σ–加法族をなすことを示しました．今回は半開区間は可測集合であることを示しました．σ–加法族の条件 (B3)（可算個の $\mathcal{M}$ の元の和集合は $\mathcal{M}$ に属す）より，開集合も可測集合であることがわかります．また，閉集合は開集合の補集合（これを閉集合の定義をしてもよい）なので，(B2) より，閉集合も可測集合です．

１２－４．$\mathbb{R}^k$ の可測集合からなる σ–加法族

上で，開集合，閉集合は可測であることがわかりました．そうすると，σ–加法族の条件から，可算個の開集合の共通部分や，可算個の閉集合の和集合も可測集合であることがわかります.（思い出してほしいのですが，可算個の開集合の和集合は開集合ですが，可算個の共通部分については何も言えません．同様に可算個の閉集合の共通部分は閉集合ですが，可算個の和集合については何も言えません.）

例：

$$(a) \qquad [0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right).$$

（可算個の開集合の共通部分が閉集合になる例.）

$$(b) \qquad \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

（可算個の開集合の共通部分が閉集合になる例.）

$$(c) \qquad (0,2) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}].$$

（可算個の閉集合の和が開集合になる例.）

定義

可算個の開集合の共通部分として表される集合を G_δ 集合という.
可算個の閉集合の和集合として表される集合を F_σ 集合という.
可算個の G_δ 集合の和集合として表される集合を $G_{\delta\sigma}$ 集合という.
可算個の F_σ 集合の共通部分として表される集合を $F_{\sigma\delta}$ 集合という.

これらはみな，可測集合のなす σ–加法族に属している.

開集合，閉集合から，高々可算回の共通部分をとる操作，和集合をとる操作を繰り返して得られる集合を（この教科書では）**ボレル集合**とよぶ.（伊藤清三『ルベーグ積分入門』などではこれと異なる定義の仕方をしているが，結局同じものである.）

ボレル集合は可測である.

定理 12.5

$S \subset \mathbb{R}^k$ が $m^*(S) < \infty$ を満たすとき，次のような G_δ 集合 G が存在する：

$$S \subset G, \quad m^*(S) = m^*(G).$$

このような G を S の**等測包**という.

証明は，S を覆う半開区間列を少し広げて開区間にしてみるなど，前に使ったようなテクニックを用いる．各自考えてみよう.（証明は教科書にあります.）
上では，任意の集合 S と外測度を考えたが，可測集合に限ると，

任意の測度が有限な可測集合 S に対し，G_δ 集合 G と零集合 N が存在して，

$$S = G - N$$

と表される．

（念のため，$N \subset G$ のとき，$G - N = G \cap N^c$ という記号を使います.）

この定理は，可測集合と G_δ 集合は零集合の差しかないことを主張する！

レポート 7

【1】　例 (a)–(c) の集合の等式のうち少なくともひとつを証明せよ.（$C = D$ を示すには，$C \subset D$ と $C \supset D$ を示す.「$1/n \to 0$ だから」というのでは証明にならない！）

【2】（やる気のある人向け自由レポート）　$m^*(I - I_\varepsilon) = |I| - |I_\varepsilon|$ を示せ.（来週授業で解説するため，自由レポートは前日（月曜日）17 時までに kibaco に出してください.）

集合間の距離の問題

(1) 1, (2) 1, (3) 0