解析学C第6回講義ノート (2021.6.1用)

１１．測度空間

教科書『ルベーグ積分３０講』第１１講

　前回は一般の（空でない）集合 X 上の集合関数である外測度を定義して，その定義域を可測集合の全体に制限すると，測度になることを示しました．特に，可算加法性をもつことを証明しました．
　今回は，その可算加法性が「極限」へ導くことを見ていきます．

１１－１．測度空間

まず，測度の定義を見てみましょう．

測度の定義

X および X 上の σ–加法族 $\mathcal{B}$ が与えられたとき，$m : \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が次の条件を満たすとき，$(X, \mathcal{B})$ 上の**測度**であるという．

(M1)　$\forall A \in \mathcal{B}$ に対して，

$$0 \leq m(A) \leq +\infty$$

ただし，$m(\emptyset) = 0$ とする．

(M2)（可算加法性）$A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ を互いに素な集合の列とするとき，

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

　この定義から次の基本性質がすぐに導かれます（証明はまず自分で考えてみよう．わからなかったら教科書を参照.）．

(i) （有限加法性）　$A_1, A_2, \ldots, A_n$ が互いに素ならば，

$$m(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

(ii) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad m(A) \leq m(B).$

(iii) $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B).$

１１－２．集合の単調列と測度

集合の増加列（等号も許す）$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

減少列（等号も許す）$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

と書きます．このとき次が成り立ちます．

(a) 集合の増加列（等号も許す）$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ に対して，

$$m(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n),$$

(b) 減少列（等号も許す）$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ に対して，$m(A_1) < \infty$ のとき，

$$m(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n),$$

の「$< \infty$」は，非負（0 以上）であることがわかっているものに対して「有限である」ことを表すのに使います．

証明

(a)　まず，ある N で $m(A_N)=\infty$ となる場合は，(ii) から $n \geq N$ となるすべての n に対し，$m(A_n)=\infty$. やはり (ii) から，$m(\lim_{n\to\infty} A_n)=\infty$.

以下，すべての n に対して，$m(A_n)<\infty$ とする．
(M2) を使える形にもっていくために重なりをけずっていく．

$$B_1 := A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_3, \ldots, B_n := A_n \setminus A_{n-1}$$

とおくと，($A_n \setminus A_{n-1} = A_n \cap A_{n-1}^c$．特に，$A_{n-1} \subset A_n$ のときは，教科書のように $A_n - A_{n-1}$ と書くこともある.）とおくと，(i) より，$m(B_n) = m(A_n) - m(A_{n-1})$. であり，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

で，$B_n, n \in \mathbb{N}$ は互いに素な集合列だから，完全加法性 (M2) より，

$$m(\lim_{n\to\infty} A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) = m(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty}\{m(A_n) - m(A_{n-1})\}$$

$$= m(A_1) + \lim_{k\to\infty}\sum_{n=2}^{k}\{m(A_n) - m(A_{n-1})\} = \lim_{k\to\infty} m(A_k).$$

（ここで，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}$ とは，$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=2}^{k}$ で定義されることを思い出そう.）

(b)　$C_n := A_1 - A_n$ に対して，(a) と (i) を用いる.（各自確認せよ.）

さらに，

(c) 任意の $A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

重なりの部分が右辺を大きくしていますね．(a) の証明を参考にして，証明を書いてみよう．(M1) と (ii) を使うかも．

１１－３．集合列の上極限・下極限

集合列 $A_1, A_2, \ldots$ に対して

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

と定義する．

上極限，下極限の意味は：

$x \in \limsup A_n \iff x$ は $A_1, A_2, \ldots$ のうち無限個に含まれる．
$x \in \liminf A_n \iff x$ はある n から先の，すべての $A_n, A_{n+1}, \ldots$ に含まれる．

この意味から，$\liminf A_n \subset \limsup A_n$ であろうと想像がつきます．

それでは，定義をていねいにみていきましょう．

先ず，$\limsup A_n$ から．

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$$

ならば，すべての n に対して，

$$x \in \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

和集合ですから，ある $k \geq n$ が存在して，$x \in A_k$.

ここで,「すべての n」であることに着目します．

まず，$n = 1$ に対して，$x \in A_{k_1}$ となる $k_1 \geq 1$ が取れます．

次に，$n = n_2 > k_1$ に対して，同様に，$x \in A_{k_2}$ となる $k_2 \geq n_2$ が取れます．帰納的に，$n = n_\ell > k_{\ell-1}$ に対して，$x \in A_{k_\ell}$ となる $k_\ell \geq n_\ell$ が取れます．

このようにしていくと，真に増加する数列（狭義の増加数列ともいう）$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ が取れて，$x \in A_{k_n}$, $n = 1, 2, \ldots$，すなわち x は無限個の A_n に含まれることがわかります．

次に，$\liminf A_n$ を考えましょう．

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

ならば，ある N に対して，

$$x \in \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k.$$

これは，$n \geq N$ となるすべての n に x が含まれることになります.

$\limsup A_n = \liminf A_n$ のとき，この集合を $\lim A_n$ と表します.

この定義から，$\{A_n\}$ が増加列のときは，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$\{A_n\}$ が減少列のときは，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

となります.（証明はレポート問題.）

<u>ファトゥーの補題 (Fatou's lemma)</u>

(d) $m(\liminf A_n) \leq \liminf m(A_n)$.

(e) $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ のとき，$m(\limsup A_n) \geq \limsup m(A_n)$.

<u>証明</u>

(d) $B_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $B_2 = \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k$, $B_3 = \bigcap_{k=3}^{\infty} A_k$, $\ldots$ とおくと，

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots \to \liminf A_n$$

であるから，(a) より，

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(\liminf A_n).$$

一方，B_n の定義（共通部分）から，$B_n \subset A_n$. (ii) より，$m(B_n) \leq m(A_n)$.　これは数列の項の不等式なので，両辺の $\liminf$ をとると，$\liminf m(B_n) \leq \liminf m(A_n)$ ここでは，$\liminf m(B_n) = \lim_{n\to\infty} m(B_n)$ なので，(*) と合わせて，

$$m(\liminf A_n) = \liminf m(A_n).$$

を得る.（証明終）

普通の数列に関して

$$\liminf a_n \le \limsup a_n$$

であるから，これを使って (d) と (e) を結び付けると，

> $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$ のとき，
>
> $$m(\liminf A_n) \le \liminf m(A_n) \le \limsup m(A_n) \le m(\limsup A_n).$$

$\limsup A_n = \liminf A_n (:= \lim A_n)$ のときは，上の不等式の両端が一致するのですべて等号となり，

> $\lim A_n$ が存在すれば，
>
> $$m(\lim A_n) = \lim m(A_n).$$

レポート 6

【1】　講義ノート途中の

$\{A_n\}$ が増加列のときは，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\to\infty} A_n,$$

$\{A_n\}$ が減少列のときは，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\to\infty} A_n$$

であることを，$\lim A_n := \limsup A_n = \liminf_n$ という lim の定義より示せ．

【2】　(e) を細かいところまで説明して証明せよ．