解析学C第5回講義ノート　(2021.5.25 用)

１０．可測集合族

教科書『ルベーグ積分３０講』第１０講

第9章では一般の集合 X に対して，その上の集合関数として外測度 m^* を定義しました．つまり，外測度は $m^*: 2^X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ です．ここで，2^X は X の部分集合全体の集合を表します（この記号はよく本で見かけるので覚えておくといいです）．

今回は，まず可測集合全体 $\mathcal{M}$ が σ–加法族をなすことを示し，外測度を可測集合全体 $\mathcal{M}$ に制限したものを仮に測度 m と名付けて，つまり，$m: \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ を考え，実際に m が測度の条件 (M1), (M2) を満たすことを示します．

１０－１．可測集合族は σ–加法族をなす

今回の材料は，これまでやった中の次の３つです．

以下 X は一般の空でない集合とします．

$m^*: 2^X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ が次の条件を満たすとき，m^* を X 上の**カラテオドリ外測度** (Carathéodory outer measure)，または単に**外測度** (outer measure) という．

(C1)　$0 \leq m^*(A) \leq +\infty$;　$m^*(\emptyset) = 0$.

(C2)　$A \subset B$ ならば，$m^*(A) \leq m^*(B)$.

(C3)　$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

$A \subset X$ が可測（すなわち $m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$）

$\Longleftrightarrow$

すべての $E \subset X$ に対し，

$$(*) \qquad m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

集合 X の部分集合族 $\mathcal{B}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{B}$ は（X 上の）σ–加法族であるという．

(B1) $\mathcal{B}$ は少なくともひとつの部分集合を含む．

(B2) $A \in \mathcal{B}$ ならば，$A^c \in \mathcal{B}$.

(B3') $A, B \in \mathcal{B}$ ならば，$A \cap B \in \mathcal{B}$.

(B3") $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ が互いに素な集合列ならば，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

σ–加法族の定義は，最初に挙げた (B1), (B2), (B3) でなく，同値な書き換えをした (B1), (B2), (B3'), (B3") の方を使います．
（なぜこちらを使うといいかに注意して証明を読んでください．）

定理

可測集合全体 $\mathcal{M}$ は，σ–加法族をなす．

証明　(B1), (B2), (B3'), (B3") が成り立つことを順に示していきます．

(B1)　$\mathcal{M}$ が少なくとも一つ要素をもてばいいので，$\emptyset \in \mathcal{M}$ を言えばよい．任意の $E \subset X$ に対して，可測の定義式の右辺で $A = \emptyset$ とすると，($\emptyset^c = X$ に注意）

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E \cap \emptyset) + m^*(E \cap X) = m^*(\emptyset) + m^*(E) = m^*(E)$$

（ここで，$m^*(\emptyset) = 0$ を用いた．） 最後の辺は左辺に等しい．よって，$\emptyset \in \mathcal{M}$.

(B2)　$A \in \mathcal{M}$ のとき，$A^c \in \mathcal{M}$ を言えばよいが，$A^{cc} = A$ なので，可測の定義式（等式の方でも，不等式の方でもどちらでもよい）より，$A^c \in \mathcal{M}$.

(B3') を示す．すなわち，$A, B \in \mathcal{M}$ のとき，$A \cap B \in \mathcal{M}$ を示す．

１行ずつ，最初に挙げたことのどれを使っているか，そして最初に挙げたこと以外は一切使っていないことを確認しながら追っていってください．

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \qquad \text{（ } A \in \mathcal{M} \text{ より）}$$

$$\geq \{m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap A \cap B^c)\} + m^*(E \cap A^c) \qquad \text{（ } B \in \mathcal{M}, (\ast) \text{ で } E \text{ に } E \cap A \text{ を代入）}$$

$$= m^*(E \cap A \cap B) + \{m^*(E \cap A \cap B^c) + m^*(E \cap A^c)\}$$

$$\geq m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap (A \cap B)^c).$$

最後の式変形で，

$$(A \cap B)^c = (A \cap B^c) \cup A^c$$

（これは図を描いて確かめよ.）と (C3) を用いた.

（(C3) は無限和だが，有限和でも成り立つ．このことは一言で証明できますか？こうした「無限 $\to$ 有限」はよく使います．第 9 章参照.）

最初と最後をみると

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A \cap B) + m^*(E \cap (A \cap B)^c).$$

であり，これは $A \cap B \in \mathcal{M}$ を意味する.

(B3") を示す.（可測集合の定義を不等式で表したことがここで威力を発揮する.）

$A_n,\ n = 1, 2, \ldots$ を互いに素な $\mathcal{M}$ に属する集合とする.

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

とおく．E を X の任意の部分集合として

$$(**) \qquad E \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

に注意する.

- ここで，集合の等式の証明のしかたを振り返ってみましょう．B, C を集合とすると，

$$B = C \iff B \subset C \quad \text{かつ} \quad B \supset C$$

である.

$$B \subset C \iff \forall x \in B \text{ に対して } x \in C.$$

また，

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \iff \forall x \in A \text{ に対して } \exists n \text{ such that } x \in A_n.$$

これを使って，(**) を証明するのはレポート問題.「当たり前と思えても，正しいことは必ずきちんと示せる.」

証明に戻ります.

外測度の条件 (C3) より，

$$m^*(E \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n)$$

（証明すべき不等式の右辺の項を上から評価した！）

よって，$A \in \mathcal{M}$ を示すには，

$$(1) \qquad m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap A^c)$$

を示せば十分である．

そこで，

$$S_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

とおく．このとき，

$$S_k \subset A, \quad S_k^c \supset A^c$$

である．(C2) より，

$$m^*(E \cap S_k^c) \geq m^*(E \cap A^c).$$

（ここでも証明すべき不等式の右辺の項を上から評価した！）

いま．任意の $E \subset X$ および $k = 1, 2, \ldots$ に対して，不等式

$$\boxed{(*)_k \ : \ m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap S_k^c)}$$

が成り立つとしよう．すると両辺の $k \to \infty$ の極限をとると，

$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + \lim_{k \to \infty} m^*(E \cap S_k^c)$$

（$\sum_{n=1}^{\infty}$ は $\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k}$ として定義されていることを思い出そう.）

$$m^*(E \cap S_k^c) \geq m^*(E \cap A^c).$$

がすぐ上で言えているから，

$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap A^c).$$

が得られて，(1) が証明された．

あとは，k についての帰納法で $(*)_k$ がすべての $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことを証明する．

(i) $k = 1$ のとき：$S_1 = A_1 \in \mathcal{M}$, $S_1^c = A_1^c$ より，

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap S_1^c).$$

これは $(*)_1$ である．

(ii)　$(*)_k$ が成り立つと仮定して，$(*)_{k+1}$ を示す．

$(*)_k$ において，$E = F \cap S_k$（$F \subset X$ は任意）とすると，

$$m^*(F \cap S_k) \geq \sum_{n=1}^{k} m^*((F \cap S_k) \cap A_n) + m^*(\emptyset) = \sum_{n=1}^{k} m^*(F \cap A_n).$$

ここで，S_k の定義と A_n, $n = 1, 2, \ldots$ が互いに素であることを用いた．（確認せよ．）

一方，外測度の条件 (C3) から，

$$m^*(F \cap S_k) \leq \sum_{n=1}^{k} m^*(F \cap A_n).$$

２つの不等式を合わせて，

$$(2) \qquad m^*(F \cap S_k) = \sum_{n=1}^{k} m^*(F \cap A_n)$$

（有限加法性！）が任意の $F \subset X$ に対して成り立つことが示せた．

特に，$(*)_k$ の右辺に (2) を適用すると，右辺は $m^*(E \cap S_k) + m^*(E \cap S_k^c)$ となり，$S_k \in \mathcal{M}$ がわかる．

これで，$(*)_{k+1}$ を示す準備ができた．

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A_{k+1}) + m^*(E \cap A_{k+1}^c) \qquad (\, A_{k+1} \in \mathcal{M} \text{ より})$$

$$\geq m^*(E \cap A_{k+1}) + m^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + m^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k^c) \qquad (\, S_k \in \mathcal{M} \text{ より})$$

$$= m^*(E \cap A_{k+1}) + m^*(E \cap S_k) + m^*(E \cap S_{k+1}^c) \qquad (\, A_k, k = 1, 2, \ldots \text{ は互いに素})$$

$$= m^*(E \cap A_{k+1}) + \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap S_{k+1}^c) \qquad (\,(2) \text{ で } F \text{ のかわりに } E \text{ とする})$$

$$= \sum_{n=1}^{k+1} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap S_{k+1}^c).$$

これで $(*)_{k+1}$ が示せた．

証明終．

１０－２．可測集合の測度

$A \in \mathcal{M}$ に対して，

$$m(A) := m^*(A)$$

とおくと，m は $(X, \mathcal{M})$ 上の測度である．

$\mathcal{M}$ が σ–加法族であることを，上で長々と示したのでした．あとは，m が測度の条件，特に，可算加法性（教科書では「完全加法性」とよんでいる）を満たすことを示します．

> $A_n,\ n=1,2,\ldots$ を互いに素な $\mathcal{M}$ に属する集合とする．このとき，
>
> $$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

証明

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

とおく．$\mathcal{M}$ が (B3") を満たすことの証明の中で導いた式 (1)：

$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap A^c)$$

を用いる．E は任意だったから $E = A$ とすると，

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + m^*(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

を得る．

一方，外測度の条件 (C3) から，逆向きの不等号

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

が成り立つので，

$$m^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

$A_n, A \in \mathcal{M}$ だから，$m^*(A_n) = m(A_n),\ m^*(A) = m(A)$ より，

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

証明終

♣　今回の講義ノートの証明で (C3) が重要な役割を果たしていることに注意しよう．

１０－３．測度の完備性

測度の完備性

$A \in \mathcal{M}$, $m(A) = 0$ ならば，すべての $S \subset A$ に対して，$S \in \mathcal{M}$ が成り立つ．

このことは，外測度の条件と，可測集合の定義から容易に導けるので，教科書を見る前に，自分で考えてみよう．

レポート５

【１】　講義ノート途中の

$$E \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

を水も漏らさぬように証明せよ．

【２】　長い証明には必ずキーポイントが数個ある．キーポイントとは，証明がうまくいくために何を示せばよいか，どんな記号を定義するとよいかのアイデアである．それさえあれば，あとは単なる式変形，計算で証明が埋まるようなものである．上の (B3”) の証明のキーポイントを挙げよ（５個以内）．

(B3’) のキーポイントをひとつ挙げよ。

このように，証明は１行１行追っていく（局所的に見る）ほかに，全体の構造（大域的）にも注意を払うことが必要です．それに，キーポイントをうまく見つければ，証明を自分で再現できるようになります．