解析学C第4回講義 (2021.5.18用)

8．カラテオドリの考えた可測集合

教科書『ルベーグ積分３０講』第８講

ルベーグ外測度は平面内の任意の有界な集合に対して定義できました。(定義域を平面内の有界集合全体とする集合関数ということ.) ルベーグ内測度も外測度を使って定義するので，平面内の任意の有界集合に対して定義できます。ただ，外測度と内測度は同じ値になるとは保証できません．外測度と内測度が一致するような集合を，可測集合とよびました．

この先，定義域を可測集合全体の集まりに制限したとき，定義域の集合族がシグマ加法族になり，外測度（＝内測度）が第３回講義ノートの最後に定義した測度の条件を満たすことを何回かかけてみていきます.

ルベーグは素朴に外側と内側から集合を近似していったとき同じ値になることを可測であることの定義としましたが，すぐ上で述べた目標に到達し，さらに理論を発展させるには，カラテオドリが言い換えた可測集合の定義の方が扱いやすいです.

８－１．カラテオドリの意味での可測性

前回やった可測の概念（今回紹介するカラテオドリが提唱した可測性と区別するため，ひとまず，ルベーグの意味の可測性とよぶ）をまとめると，

ルベーグの意味での可測性

S を平面内の有界な集合とし，それを含む長方形 J をとる.
S が

$$m^*(S) = m_*(S) \tag{1}$$

を満たすとき，<u>ルベーグの意味で可測</u> であるという.
内測度は

$$m_*(S) := |J| - m^*(J \cap S^c)$$

と定義されるから，$J \cap S = S$ であることに注意すると，(1) は

$$|J| = m^*(J \cap S) + m^*(J \cap S^c) \tag{2}$$

と書き換えられる.

(2) には外測度だけしか現れないことに注意しましょう.

カラテオドリの意味での可測性

S を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする．すべての $E \subset \mathbb{R}^2$ に対して，

$$m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c) \tag{3}$$

がなりたつとき，S は カラテオドリの意味で可測 であるという．

ここでは S は有界とは限っていません．$S = \mathbb{R}^2$ を考えてもいいということです．この定義には外測度しか現れず，可算個の長方形で覆う外測度の定義において inf が $+\infty$ であっても「カラテオドリの意味の可測」の定義は有効です．

しばらくは 2 つの可測性の定義を比べるために，有界な S のみを考えましょう．すると，(3) が成り立てば，特に $E = J$（J は S を含む長方形）とすれば (2) になるので

$$(3) \Longrightarrow (2)$$

ということになります．カラテオドリの定義は,「どんな集合 E をとっても (3) が成り立つ」と言っているので，ルベーグの定義より「強い」ように見えます．

前回，長方形 I に対して，(1)（すなわち (2)）が成り立つことを示しましたが，(3)，すなわちすべての $E \subset \mathbb{R}^2$ に対して，

$$m^*(E) = m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c)$$

を示すのは大変そうです．

第 2 回講義ノート p.10 の，ルベーグ外測度の性質 (G3') より，

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$$

は直ちに導かれます．教科書 p.57 では，これが不等式でなく，等式になることの意味を感覚的に説明しようとしています．可測集合 S は鋭いナイフのようなもので，任意の集合 E をスパッと 2 つにきれいに切る，というイメージです．

実は，(2) $\Longrightarrow$ (3) も証明できて（第 13 講），次が成り立ちます．

定理

$\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合 S がルベーグの意味で可測ならば，カラテオドリの意味で可測である．

８－２．一般の $\mathbb{R}^k$ の場合

これまで $\mathbb{R}^2$ で考えてきたことは，自然に $\mathbb{R}^k$ へと一般化できます．

● $\mathbb{R}^k$ の「半開区間」I とは

$$\begin{aligned} I &= [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_k, b_k) \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ : \ a_1 \leq x_1 < b_1, a_2 \leq x_2 < b_2, \ldots, a_k \leq x_k < b_k \ \}. \end{aligned}$$

I の「体積」$|I|$ は

$$|I| = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_k - a_k)$$

と定義する．

● $\mathbb{R}^k$ の部分集合 S に対して，S を覆う「半開区間」の列 $\{I_n\}$

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

を考え，このような列全体にわたって inf をとり，

$$m^*(S) := \inf \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

とおく．$m^*(S)$ を S の <u>（k 次元）ルベーグ外測度</u> という．

● $\mathbb{R}^k$ の有界な部分集合 S に対して，$S \subset J$ となる「半開区間」J に対して，

$$|J| = m^*(S) + m^*(J \cap S^c)$$

がなりたつとき，S は <u>ルベーグの意味で可測である</u> という．

● 任意の $E \subset \mathbb{R}^k$ に対して，

$$m^*(E) = m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c)$$

がなりたつとき，S は <u>カラテオドリの意味で可測である</u> という．

<u>定理</u>

$\mathbb{R}^k$ の有界な部分集合 S がルベーグの意味で可測ならば，カラテオドリの意味で可測である．

このように，平面上の集合に関して構成していたものが，k 次元でもまったく同じように構成できることがわかります.

さらに，注目していただきたいのは可測集合を定義するとき，外測度があれば十分ということです．次章では，さらに抽象化して，一般の集合 X の部分集合に対して外測度を定義します．そうすると，カラテオドリの意味での可測な集合も定義できます.

９．カラテオドリの外測度

教科書『ルベーグ積分３０講』第９講

第 5–8 章では,「長さ」,「面積」などの拡張、ということを頭におきながら，ルベーグ外測度を定義し，ジョルダン測度（１年の微分積分で習う意味の面積）の類推で，外側からの近似（外測度）と内側からの近似（内測度）が一致する，という条件を,「ルベーグの意味での可測」と定義しました．これが $\mathbb{R}^k$ の有限集合に対しては「カラテオドリの意味での可測」と同値であることをあとで証明します.

今回は，$\mathbb{R}^k$ だけでなく一般の集合 X 上の外測度を定義します．講義 3 の最後に紹介した，X 上の測度，σ–加法族を構成するためです．カラテオドリの意味での可測性は，外側から近似，内側から近似という考え方が表に出ていないので，一般の集合上で可測集合を定義するのに適しています．そして，可測集合全体が σ–加法族になっていることを証明するのに威力を発揮します.

９－１．$\pm\infty$ の演算規則

ここでは，$\mathbb{R}^k$ の有界部分集合だけでなく，一般の集合を対象にしたいので，$+\infty, -\infty$ も普通の数のように扱います.（∞ と書いたら $+\infty$ の意味.）（$\mathbb{R}^k$ 自身のルベーグ測度を $+\infty$ と定義したい.）そのために，$+\infty, -\infty$ を含むときの数の演算を定義します.

以下 a は実数（ふつうの数）とします.

$$(+\infty) + a = +\infty, \quad (-\infty) + a = -\infty,$$

$$(+\infty) \times a = +\infty,\ (a > 0), \quad (+\infty) \times a = -\infty,\ (a < 0)$$
$$(-\infty) \times a = -\infty,\ (a > 0), \quad (-\infty) \times a = +\infty,\ (a < 0).$$
$$(+\infty) \times 0 = 0, \quad (-\infty) \times 0 = 0.$$

（左辺は演算の順序を交換しても成り立つとする.）さらに，

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

$$\lim(+\infty) = +\infty, \quad \lim(-\infty) = -\infty.$$

と決める.（あとの式の意味は，もうすこし進むとはっきりします.）

しかし，

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty)$$

は定義しない．

９－２．カラテオドリの外測度

定義　カラテオドリの外測度

m^* を集合 X 上の（定義域は X の部分集合全体）$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 値をとる集合関数（各集合に対して値を対応させるもの）とする．m^* が次の条件を満たすとき，m^* を X 上の**カラテオドリ外測度** (Carathéodory outer measure)，または単に**外測度** (outer measure) という．

(C1)　$0 \leq m^*(A) \leq +\infty$;　$m^*(\emptyset) = 0$.

(C2)　$A \subset B$ ならば，$m^*(A) \leq m^*(B)$.

(C3)

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).$$

第５章で，ルベーグ外測度を定義し，$0 \leq m^*(A) < +\infty$, $m^*(\emptyset) = 0$，および (C2), (C3) をルベーグ外測度の基本性質として証明しました．（第５章では有界な集合を考えていたので，外測度も有限だった．）

ここでは，(C1)–(C3) を満たすものとして外測度を定義します．

例１．

X を無限集合とする．このとき

$$m^*(A) := \sharp A, \quad (A \text{ が有限集合の場合}),$$

$$m^*(A) := +\infty, \quad (A \text{ が無限集合の場合}),$$

は X 上の外測度である．ここで，$\sharp A$ は A の要素の個数とする．

例２．

$X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とし，$A \subset \mathbb{N}$ に対して，

$$m^*(A) := \sharp A, \quad (A \text{ が偶数個の要素からなる場合}),$$

$$m^*(A) := \sharp A + 1,\ \text{（}A\text{ が奇数個の要素からなる場合）},$$
$$m^*(A) := +\infty,\ \text{（}A\text{ が無限集合の場合）},$$
と定義すると m^* は $\mathbb{N}$ 上の外測度である．

例３．$\mathbb{R}^k$ のルベーグ外測度

８－２で定義した $\mathbb{R}^k$ 上のルベーグ外測度は実は有界な集合に限っていなかった.（見返してみよう.）

「有界な」と限定しているのは，ルベーグの意味の可測性とカラテオドリの意味の可測性が同値である，と言っている部分だけである．

例４．直線上のルベーグ–スチルチェス外測度

$y = \phi(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の単調増加関数とする（連続性は仮定しない）．このとき任意の半開区間 $I = [a, b)$ に対して，
$$|\phi(I)| := \phi(b-0) - \phi(a)$$
とおく．ここで，$\phi(b-0) := \lim_{x \to b-0} \phi(x)$（左極限）である．任意の $S \subset \mathbb{R}$ に対し，
$$m_\phi^*(S) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |\phi(I_n)|$$
とおく．inf は S をおおう半開区間列 $\{I_n\}$ 全体にわたってとる．このとき，m_ϕ^* は $\mathbb{R}$ 上の外測度であり，ルベーグ–スチルチェス外測度 (Lebesgue - Stieltjes outer measure) とよばれる．

特に，$\phi(x) = x$ ととると，ルベーグ外測度になる．

他の例として，$\phi(x) = 0,\ \ (x \le 0),\ \ \phi(x) = 1 - e^{-x},\ \ (x > 0).$

♣ 上で，ϕ は単調増加としたが，この例のように，$\mathbb{R}$ の一部で定数であってもよい．このような関数を広義の単調増加関数，または**単調非減少関数**という．

例 1–4 が外測度の条件 (C1)–(C3) を満たすことはレポート課題.

９－３．可測集合

m^* を集合 X 上の外測度とする．すべての $E \subset X$ に対して，
$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(A \cap S^c) \tag{3}$$
がなりたつとき，A は**可測** (measurable) であるという．

この可測性の定義を，証明に使いやすい形で言い換えておきます.

$A \subset X$ が可測
$\Longleftrightarrow$
すべての $E \subset X$ に対し，

$$(1) \qquad m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

証明
$\Longrightarrow$）は自明なので，$\Longleftarrow$）を示す．

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c) \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$$

であるから，外測度の条件 (C3) と $m^*(\emptyset) = 0$ より

$$m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

が成り立つ．これと (1) を合わせて，等式を得る．

９－４．σ–加法族

可測集合全体の集合は σ–加法族をなします．以下に定義を述べます．

集合 X の部分集合族 $\mathcal{B}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{B}$ は（X 上の）**σ–加法族**であるという．

(B1) $\mathcal{B}$ は少なくともひとつの部分集合を含む．

(B2) $A \in \mathcal{B}$ ならば，$A^c \in \mathcal{B}$.

(B3) $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, に対して，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

(2)　(B1), (B2), (B3) は (B1), (B2), (B3'), (B3") と同値です．（レポート課題）

(B3') $A, B \in \mathcal{B}$ ならば，$A \cap B \in \mathcal{B}$.

(B3") $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ が互いに素な集合列ならば，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

<u>σ–加法族の性質</u>

(B4) $X, \emptyset \in \mathcal{B}$.

(B5) $A, B \in \mathcal{B}$ ならば，$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{B}$.

(B6) $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

次回は，

可測集合全体 $\mathcal{M}$ は，σ–加法族になっている

ことを証明します．(B1) と (B2) はすぐ示せるので考えてみてください．

この講義でルベーグ積分論の大体の流れを理解したら，伊藤清三先生の『ルベーグ積分入門』を読めるようになるでしょう．細かいことまで書いてあって，あとで必要になることはほとんどすべて載っている，一度は読んでおきたい名著です．

伊藤清三先生の講義をライブで聞いたことがありますが，記憶に残っているのは「空手踊り」と黒板にこっそり書いて,「ふふっ」と一人で笑って，さっと消した清三先生です．

<u>レポート４</u>

【１】 例 1, 2, 4 が外測度の条件 (C1), (C2), (C3) を満たすことを確かめよ．

【２】 (B1), (B2), (B3) の組は (B1), (B2), (B3'), (B3") の組とと同値であることを示せ．

以下は元気な人向け自由レポート．必須ではない．

【３】 例４で $\phi(x) = 0$, $(x \leq 0)$, $\phi(x) = 1 - e^{-x}$, $(x > 0)$. とした場合の半開区間 $I = [a, b)$ の外測度を求めよ．