解析学C第3回講義　(2021.4.27)

６．ルベーグ内測度　(2021.5.25 版)

教科書『ルベーグ積分３０講』第６講

ルベーグ外測度は有界な集合 S を可算個の長方形で覆って，いわば外側から近似するものでした．それに対して，内側から S を近似するにはどうしたらよいでしょう.（ジョルダン測度の場合のように，外側と内側から挟んでいきたい.）S に含まれる可算個の長方形を考えればいいのでしょうか.

「面積」を拡張するならば，$S = \tilde{Q} = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$（正方形の中の x, y 座標がともに有理数である点の集合）のような，基本的な集合に対しても定義したいのですが，少なくとも一方の座標が無理数である点がぎっしりとあるため，S に含まれる長方形は存在しません．任意の有界集合に対してそれを覆う長方形列が必ず存在することと対照的です．ここで $\tilde{Q}$ が有界であること，すなわち十分大きい長方形 J で $\tilde{Q} \subset J$ となるものがとれることに着目します.

ルベーグが考えたことは，

『$\tilde{Q}$ を内側から近似できなければ,「補集合」を外側から近似すればいいじゃない.』

６－１．内測度の定義

内測度の定義

S を平面内の有界な集合とし，それ含む長方形 J をとる.
S の内測度 $m_*(S)$ を

$$m_*(S) := |J| - m^*(J \cap S^c)$$

と定義する.

内測度の値は S を含む長方形 J の取り方によりません.
内測度が「内側から近似」している様子は，p.42 の図 14 を見てください（白い部分）.

この先のねらいをざっくりく言うと，外から近似した外測度と，補集合を外から近似することからえられる内測度が一致するとき，それが目標である測度（の候補）になることを示していこう，ということです.

内測度が内側から近似する感じを味わう

最初に例として挙げた，$\tilde{Q} = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ は外測度なら求めることができるので，それを求めることによって，$S := [0,1]^2 \setminus \tilde{Q}$ $(= [0,1]^2 \cap \tilde{Q}^c)$ の内測度を求めます．

$$\mathbb{Q}^2 = \{(x,y)\ :\ x,y \in \mathbb{Q}\}.$$

$J = [0,1]^2$ ととると，$S \subset J$, $|J| = 1$ です．さて，$\mathbb{Q}$ は可算集合ですから，$\mathbb{Q}$ の要素２つの組 $\mathbb{Q}^2$ も可算集合です．その部分集合 $\tilde{Q} = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ も可算集合です．可算集合の無限部分集合（要素の数が無限）は可算集合であることに注意.（★このあたりのことはレポート問題参照.）測度論においては,「可算無限」の概念が本質的な役割を果たします.

一般に $S \subset \mathbb{R}^2$ の外測度の定義は $\{I_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, を長方形（左と下の辺のみ含む）の列として，

$$m^*(S) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|\ :\ S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

でした.

$\tilde{Q}$ に対しては，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\tilde{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

かつ，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \le \varepsilon \qquad (*)$$

となるような長方形の列 $\{I_n\}$ が取れることを以下示します.

証明は，教科書第３講で直線上の有理数を扱ったのと同様のことを平面内で行います．ただ，ノート３では「完全加法性が成り立つと仮定して」やっていたので，互いに素な区間で有理数の集合を覆いました．ここでは，外測度の定義で集合を覆う可算無限個の長方形を考えるので，長方形どうしは重なってもかまわない，というところが違いです.

この先を読む前に,（忘れていたら講義ノート３をもう一度読んで），自分で証明を考えてみてください．直線が平面になったこと以外にも，第３講でやったことよりゆるくて大丈夫なことに注意．こういうのを，自分でできるようになっておくと，あとで応用できるから楽しいです.

考える時間

証明

$\tilde{Q}$ は可算集合なので，要素に番号をつけて $\tilde{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ のように一列に並べることができます．

$\varepsilon > 0$ を任意に決めます．そして，$\tilde{Q}$ の最初の要素 r_1 を中心とする一辺 $\varepsilon/2$ の長方形（実は正方形だがこの講義で「長方形」とは左と下の辺のみ含むものを意味する）をとります．（具体的には，r_1 の座標を (a, b) とするとき，$[a - \varepsilon/4, a + \varepsilon/4) \times [b - \varepsilon/4, b + \varepsilon/4)$.）この長方形と J との共通部分も長方形になるのでそれを I_1 とします．

I_2 を，r_2 を中心とする一辺 $\dfrac{\varepsilon}{2^2}$ の長方形と J の共通部分とします．

同様に I_n を r_n を中心とする一辺 $\dfrac{\varepsilon}{2^n}$ の長方形と J の共通部分とします．

これを繰り返すと，長方形の可算無限列が定義され，どの有理数も必ずどれかの長方形に含まれますから，

$$\tilde{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

です．

I_n の決め方から，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

覆い方について inf をとると（m^* の定義），

$$m^*(\tilde{Q}) \leq \varepsilon.$$

ε は任意だったから，

$$m^*(\tilde{Q}) = 0$$

S の内測度の定義より，

$$m_*(S) = |J| - m^*(\tilde{Q}) = 1 - 0 = 1.$$

ここであらためて，I_n の取り方を振り返ってみると，$\tilde{Q} \subset \bigcup I_n \subset J$，また，$S = J \setminus \tilde{Q}$，したがって，$J - \bigcup I_n \subset S$ となり，教科書に書かれている「S を $J - \bigcup I_n$ によって内側から近似していく」感じがわかります．(教科書の図 13 参照.）

６－２．内測度の性質

内測度の性質

(I1)　$0 \leq m_*(S) < \infty$

(I2)　$m_*(S) \leq m^*(S)$

(I3)　$S \subset T$ ならば，$m_*(S) \leq m_*(T)$

(I4)　任意の長方形 I に対し，$m_*(I) = |I|$.

証明はレポートとします．それぞれ，ルベーグ外測度の性質 (G1)〜(G3) および (G3') を使うはずなので，どこでどれを使ったか，明記すること．教科書を見てもかまいませんが，まず自分で考えてからにしよう．教科書の証明で省略されているところも埋めよ．

６－３．ルベーグ可測な集合

ルベーグ可測集合の定義

平面内の有界な集合 S が

$$m^*(S) = m_*(S)$$

をみたすとき，S を**ルベーグ可測集合**，または単に**可測集合** (measurable set) という．

S が可測集合のとき，

$$m(S) := m^*(S)(= m_*(S))$$

とおき，$m(S)$ を S の**ルベーグ測度**という．

• 長方形 I に対しては，$m^*(I) = m_*(I) = |I|$ が成り立つ（$J = I$ として定義を用いる）から，長方形は可測集合です．

• $m^*(S) = 0$ を満たす集合は，(I2) より $m_*(S) = 0$ となるから，可測です．

零集合

$m^*(S) = 0$ を満たす集合を**測度 0 の集合**，または**零集合** (null set) という．

零集合を「ぜろしゅうごう」（ルベーグ積分３０講）と読む人も,「れいしゅうごう」（数学辞典）と読む人もいます．

この同値な言いかえは

S が零集合である必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，長方形の列 $\{I_n\}, n \in \mathbb{N}$ が存在して，

(i) $\quad S \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

(ii) $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$

特に，$m^*(\emptyset) = 0$ だから，空集合は可測です．

ここまでで，まず，平面内の有界な集合に対してルベーグ外測度とルベーグ内測度を定義しました.（一般の $\mathbb{R}^n$ の集合に対しても同様に定義できますが，あとできちんとやります.）

集合 S に対してこの 2 つが一致するときその値を S のルベーグ測度と定め，S を（ルベーグ）可測集合とよびました．

そこで気になるのは，どのような集合がルベーグ可測集合か，ということです．

ここまででわかっているのは，長方形と零集合と空集合はルベーグ可測であるということです．これだけでは少なすぎますね．

教科書第 7 講は，ルベーグが最初に測度の概念を作ったときに考えた道筋を示しています．

ルベーグが考えたこと：

開集合はルベーグ可測にちがいない．なぜなら，開集合は互いに素な可算個の長方形（左と下の辺のみ含むもの）I_i, $i = 1, 2, \ldots$ の和集合 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ として表される（証明は自由レポート）．これらの長方形はは開集合を覆うけれどはみ出していないので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ の値がルベーグ測度に一致するだろう．開集合がルベーグ可測なら，その補集合である閉集合もルベーグ可測であるはずだ.（この段階で証明するのはかなり大変なのであとでやります.）

開集合と閉集合が可測であることを認めると，任意の可測集合 S は次の意味で開集合と閉集合でそれぞれ上と下から近似できることがわかります.（この証明は教科書に書いてあ

る．難しくない.）

S を可測集合とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の性質を満たす開集合 O と閉集合 F が存在する：

$$F \subset S \subset O, \quad m(O \setminus S) < \varepsilon, \;\; m(S \setminus F) < \varepsilon.$$

さらに，もう 1 歩進めて，任意の可測集合 S に対して，可算個の開集合の共通部分としてあらわされる集合 G，および可算個の閉集合の和集合としてあらわされる集合 H が存在して，

$$H \subset S \subset G,$$

$G \setminus S$ および $S \setminus H$ は零集合.（この証明も教科書にある.）

さらに，H, G も可測であることが示せる.（ここでは証明していない.）

ルベーグは，その学位論文で

「開集合，閉集合は可測集合である．一般の可測集合は，同じ測度をもつ可算個の開集合の共通部分と可算個の閉集合の和集合によって，上と下からはさむことができるような集合である.」

という形で「可測集合はどのような集合か？」という問に答えました．

ルベーグが最初に考えたからルベーグ測度とよばれているわけですが，そのあと，カラテオドリが整備して，ルベーグ測度に限らない一般の測度論を作り上げました．

カラテオドリがまずやったことは，$\mathbb{R}^n$ 以外の空間上に測度を定義したいときにも使えるような可測の定義（教科書では「カラテオドリの意味で可測」とよんでいる）を与え，それが，$\mathbb{R}^n$ 上の有界な集合に対しては第 6 講で定義した「ルベーグの意味の可測とその周辺」であることと同値であることを示しました．

ここからあとは，カラテオドリの構想に沿って測度を構成していきます．その途中で，開集合，閉集合が可測であること，可算個の開集合の共通部分，可算個の閉集合の和集合が可測であることが自然に証明されます．

<u>レポート３</u>

(1) ルベーグ内測度の性質 (I1)–(I4) を証明せよ．

(2) 教科書 p.48 の開集合の定義から (O1), (O2) を証明せよ．

(3) 閉集合の定義と (O1)–(O3) から (F1)–(F3) を証明せよ．

<u>自由レポート２</u>（自分で考えるのが好きな人むけ）　期限 5 月末

開集合は，互いに素な可算個の長方形（左と下の辺のみ含むもの）の和集合として表されることを示せ.（教科書第 7 講で使っている事実）

測度空間 (2021.3.30 版)

教科書『ルベーグ積分３０講』第１１講の一部

教科書では第５章から本格的に長さ，面積，体積を拡張してさらに「極限」をとりいれた概念である測度を作っていきますが，途中ルベーグの学位論文の話や，カラテオドリの構想の話が入って,（どのようにして現在の完成された測度論に至ったかが書かれているのがこの教科書の良い点なのですが），目標が見えにくいので，ここで，目標を先に出しておきましょう.

関数とは，定義域内の各数に対して，数を一つ対応させるルールでしたが，集合関数は，各集合に対して，数を対応させるルールです．集合関数の定義域は，集合の集合です.「集合の集合」のことを**集合族**といいます.

集合族という語に慣れるまでは，注意が必要です．$\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^k$ の部分集合族（$\mathbb{R}$ の部分集合の集まり）とすると，$B \in \mathcal{A}$ ならば $B \subset \mathbb{R}$ です．つまり集合族の各要素（元）は集合です。（この授業では，集合の「要素」と集合の「元」は同じ意味です．普段両方使っているので，混じることがあるかもしれません.）

長さ，面積，体積を拡張したものは，それぞれ１次元，２次元，３次元の**ルベーグ測度**ですが，測度はこれ以外に無限にあります．例えば，確率も測度で，**確率測度**といいます.
面積と確率という一見全く異なる概念が，測度という共通の枠で扱えます．確率測度は $\{1,2,3,4,5,6\}$ のような有限集合のみならず，$\mathbb{R}^k$，さらには $C([0,1])$（区間 $[0,1]$ 上で定義される連続関数全体の集合）上でも定義できて，ブラウン運動のようなランダムな粒子の動きを数学的に表すことができます.

測度は任意の空でない集合上で定義できるので，今回は，$\mathbb{R}^k$ に限らないで，空でない任意の集合 X 上で考えます.（ルベーグ測度を考えるときには X を $\mathbb{R}^k$ だと思えばいい.）

以下，X を空でない集合とします．まず，最終目標である測度の定義から見ていきます.

<u>測度の定義（仮）</u>

$\mathcal{B}$ を X の部分集合族とする.
$\mathcal{B}$ 上の集合関数 m が次の条件を満たすとき，m を $(X,\mathcal{B})$ 上の測度という.

(M1) $\forall A \in \mathcal{B}$ に対して，

$$0 \le m(A) \le +\infty$$

ただし，$m(\emptyset) = 0$ とする.

(M2) （測度の可算加法性）$A_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}$ を互いに素な集合の列とするとき，

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

• **互いに素**という用語はこの講義でよく出てきますが，$i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$（どの 2 つの集合も共通部分をもたない）の意味です.

• (M1) で $\leq +\infty$ となっているのに気が付きましたか？測度を考えるときは $+\infty$ もひとつの数のように扱います.（$\mathbb{R}^2$ の面積は $+\infty$ ですから，$+\infty$ も値域に入れておく必要があります.）つまり，

$$m \colon \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

です.

• (M3) が，この講義の最初からずっと構成に含めたかった「極限」の概念です．教科書では「完全加法性」と言っていますが,「可算加法性」という言葉の方がよく使われます.（どちらを使ってもかまいません.）

さて，上では定義域である部分集合族 $\mathcal{B}$ については何も言いませんでしたが，本当は $\mathcal{B}$ が最低限満たすべき条件がいくつかあります．たとえば (M1) で空集合は測度 0 とありますが，それなら $\emptyset \in \mathcal{B}$ が必要です．また，(M2) では $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が現れますが，これも $\mathcal{B}$ に属している必要があります.

一般に，測度の定義域となりうる集合族は次の条件を満たすことが必要です.

<u>σ（シグマ）加法族</u>

集合 X の部分集合族 $\mathcal{B}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{B}$ は（X 上の）**σ–加法族**であるという.

(B1) $\mathcal{B}$ は少なくともひとつの部分集合を含む.

(B2) $A \in \mathcal{B}$ ならば，$A^c \in \mathcal{B}$.

(B3) $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, に対して，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

• この講義では，σ–加法族という用語で統一します.

• (B1) は $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ということで，$\mathcal{B} = \emptyset$ と $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$ とは意味が異なることに注意．前者は $\mathcal{B}$ の中に一つも要素がないことを意味し，後者は $\mathcal{B}$ は $\emptyset$（これも X の部分集合！）という一つの要素をもっています．集合族の概念に少しずつ慣れていきましょう.

• (B3) は可算個の $\mathcal{B}$ の要素（元）に対して，その和集合も $\mathcal{B}$ に含まれるという条件です．これで測度の定義の (M2) で，左辺に現れる和集合も定義域に入ることが保証されます.「極限」の概念を入れるために必要な条件です.

• (B3) では $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ が互いに素でなくてもよいことに注意.

測度の定義（本番）

X および X 上の σ–加法族 $\mathcal{B}$ が与えられたとき，集合関数 $m : \mathcal{B} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が次の条件を満たすとき，m を $(X, \mathcal{B})$ 上の**測度**であるという．

(M1) $\forall A \in \mathcal{B}$ に対して，

$$0 \leq m(A) \leq +\infty$$

ただし，$m(\emptyset) = 0$ とする．

(M2) （測度の可算加法性）$A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ を互いに素な集合の列とするとき，

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

測度空間

$(X, \mathcal{B}, m)$ （集合とその上の σ–加法族および測度の 3 つを組にしたもの）を**測度空間**という．測度を入れない 2 つ組 $(X, \mathcal{B})$ を**可測空間**という．

● 「空間」というと違和感を感じる人もいるかもしれませんが，集合に何らかの構造をいれたものだと思ってください．ほかの例では，距離空間，ベクトル空間など．

♣ 教科書では σ–加法族の代わりに「ボレル集合体」という用語を用いていますが，普通はボレル集合体とは「開集合が生成する σ–加法族」という特別なものを意味しますので，この講義でも σ–加法族とボレル集合体を使い分けます．

みなさんは，ここで，測度と σ–加法族の定義をしっかり覚えてください．
数学を理解するには，一番大事な概念をしっかり暗記することが必要です．

σ–加法族の性質

下の性質は (B1), (B2), (B3) から簡単に導けるし，何度も使うことなのでここで紹介しておきます．

(B4) $X, \emptyset \in \mathcal{B}$.

(B5) $A, B \in \mathcal{B}$ ならば，$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B \in \mathcal{B}$.

(B6) $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

証明

(B4) ここで，(B1) が効いてきます（意味のない条件だったら初めから入っていない！）．$\mathcal{B}$ は少なくとも一つの要素をもつのだから，それを A とすると，(B2) より，$A^c \in \mathcal{B}$. (B3) で $A_1 = A, A_2 = A^c, A_n = A, n \geq 3$ とすると（集合列の中に同じものがあってはいけないとは一言もいわれていない．言われていないことは許される！），(B3) より，

$$X = A \cup A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}.$$

$\emptyset = X^c$ なので，(B2) より，$\emptyset \in \mathcal{B}$.

(B5) ド・モルガンの法則より，

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

に注意すると，(B2) と (B4) より，$A^c \cup B^c \in \mathcal{B}$. (B2) をまた使うと，$(A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{B}$. よって，$A \cap B \in \mathcal{B}$ が示された．

$A \setminus B$（差集合）は $A \cap B^c$ のことだから，上を参考に各自証明しよう．

(B6) (B2) より，$A_n^c \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}$ であり，(B3) より，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{B}$.

ド・モルガンの法則と (B2) より，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)^c \in \mathcal{B}.$$

確率も測度である！

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \mathcal{B} = 2^X (X\text{ の部分集合全体からなる集合族}), m(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

とし，さらに $A \in \mathcal{B}$ に対して，$m(A) = \sum_{i \in A} m(\{i\})$,（例えば，$m(\{2,3\}) = m(\{2\}) + m(\{3\})$.）と定義すると，$(X, \mathcal{B}, m)$ は測度空間である．（これは公正なサイコロの確率モデル．）

♣ 経験上，さいころを投げ続けると出た目の平均はいつかは必ず 3.5 に近づくことがわかっています．（n 回投げたら，出た目すべての和を取って n で割ったものが $n \to \infty$ で 3.5 に収束する．）これは大数の法則と言いますが，測度に極限をとりこむことにより，この経験的事実を数学の定理として証明することができます．