解析学 C 第 12 回講義ノート　(2021.7.20) 0701 版

１９．積分の線形性とルベーグの収束定理

教科書『ルベーグ積分３０講』第１８講 p.137，第２０講後半

測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ は与えられているとします．前回までで，非負の可測関数に対して積分を定義し，いくつかの定理を導きました．

まず，単関数に対して積分を定義しました．
次に，非負の（$f(x) \geq 0$）可測関数 f に対しては，近似単関数の列，すなわち単関数の増加列

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \leq \phi_n(x) \leq \cdots$$

で

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$$

を満たすものが存在することを証明しました．そして，積分は

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) = \int_X f(x)\ m(dx)$$

と表せることを証明しました（講義１８）．
このように単関数の積分の極限として表すことができたおかげで，単調収束定理，ファトゥーの補題という積分と極限の交換に関する２つの重要な定理が証明できました（講義１７）．

今回は,（非負とは限らない）一般の可測関数の積分を扱います．

今回も次の仮定をおきます．
　$f(x) = \infty$ または $f(x) = -\infty$ となるような x 全体の集合の測度は 0 とする．すなわち，

$$m(\{x \in X \mid f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

　定義関数（教科書では特性関数とよんでいる），単関数，単関数の積分，可測関数，可測集合，lim sup, lim inf などの用語のうち，ひとつでも定義を忘れているものがあればこの先を読む前に調べてください．

１９－１．一般の可測関数の積分

負の値もとりうる可測関数 $f(x)$ に対して，正の部分 $f^+(x)$ と負の部分 $-f^-(x)$ に分けることから始めます．各点 $x \in X$ ごとに，

$$f^+(x) := f(x) \vee 0, \quad f^-(x) := (-f(x)) \vee 0$$

と定義します．$a \vee b$ は $\max\{a, b\}$ の意味で，2 つのうち最大のものを表すのによく使われる記号です．

例

$X = \mathbb{R}$ とし，$f(x) = x^2 - 1$ を考えます．グラフを描いてみてください．

$|x| \geq 1$ で $f^+(x) = x^2 - 1$，$|x| < 1$ で $f^+(x) = 0$ となります．f^- の方はいったん符号を変えてから（y 軸に関して折り返してから）0 と比べて大きい方を取りますから，$|x| \geq 1$ で $f^-(x) = 0$，$|x| < 1$ で $f^-(x) = -(x^2 - 1)$ となります．

f^+, f^- もグラフを描いてみましょう．描いてみると次のことがすぐにわかります．

1) $f^+(x) \geq 0$, $f^-(x) \geq 0$
2) $f^+(x)$ と $f^-(x)$ は同時には 0 でない値をとらない．（一方が正ならば，他方は 0.）
3) $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.
4) $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

$f^+(x)$, $f^-(x)$ は非負の可測関数ですから，積分は定義できます．
一般に，f, g が可測ならば，$f \vee g$ も可測（可測関数の定義さえわかれば証明は容易）．
(A)

一般の可測関数 f の積分の定義

$\displaystyle\int_X f^+(x)\ m(dx) < \infty$，または $\displaystyle\int_X f^-(x)\ m(dx) < \infty$ が成り立つとき， $f(x)$ の X 上の積分を

$$\int_X f(x)\ m(dx) := \int_X f^+(x)\ m(dx) - \int_X f^-(x)\ m(dx)$$

と定義する．

♣ $\displaystyle\int_X f^+(x)\ m(dx) < \infty$，または $\displaystyle\int_X f^-(x)\ m(dx) < \infty$ という条件は，$\infty - \infty$ を避けるためです．
$\displaystyle\int_X f^+(x)\, m(dx) < \infty$，かつ $\displaystyle\int_X f^-(x)\, m(dx) < \infty$ が成り立つとき（このことは，$\displaystyle\int_X |f(x)|\, m(dx) < \infty$ と同値なことに注意），$f(x)$ は**可積分（積分可能）**であるといいます．

$f(x)$ が可積分ならば，上の定義より $|f(x)|$ も可積分であり，

$$\int_X |f(x)|\ m(dx) := \int_X f^+(x)\ m(dx) + \int_X f^-(x)\ m(dx)$$

です．

$E \in \mathcal{B}$ 上での積分は，$f(x)\phi(x;E)$ という可測関数の積分と定義されます．$f(x)\phi(x;E)$ の正の部分，負の部分はそれぞれ $f^+(x)\phi(x;E)$, $f^-(x)\phi(x;E)$, に一致しますから，

$$\int_E f(x)\ m(dx) := \int_X f(x)\phi(x;E)\ m(dx) = \int_E f^+(x)\ m(dx) - \int_E f^-(x)\ m(dx)$$

となります．X 上の積分の場合と同様に，$\displaystyle\int_E |f(x)|\ m(dx) < \infty$ のとき，$f(x)$ は E で**積分可能**であるといいます．

ここまでで，単関数の積分，非負可測関数の積分（近似単関数の積分の極限），一般の可測関数の積分（$f^+(x)$ と $f^-(x)$ にわけて，それぞれの積分（非負だから近似単関数の積分の極限）の差）と，順を追って定義してきました．

次に，当然成り立ってほしい積分の線形性を見ていきます．

１９－２．積分の線形性

定理 19.1（積分の線形性）

$f(x)$, $g(x)$ を可積分な関数とする．このとき，任意の実数 α, β に対して，

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta\ g(x))\ m(dx) = \alpha \int_X f(x)\ m(dx) + \beta \int_X g(x)\ m(dx).$$

リーマン積分の場合は，定義から，積分の線形性は明らかでした．ルベーグ積分の場合は，積分と極限の交換定理がすっきりした形で表せるかわりに，積分の線形性は自明ではありません．例えば，$f(x)+g(x)$ を考えてみても，$(f+g)^+(x) = f^+(x) + g^+(x)$, $(f+g)^-(x) = f^-(x) + g^-(x)$ が成り立つとは限らないからです．

例

f は上で考えた関数 $f(x) = x^2 - 1$ としましょう．

$|x| \geq 1$ で $f^+(x) = x^2 - 1$，$|x| < 1$ で $f^+(x) = 0$,

$|x| \geq 1$ で $f^-(x) = 0$，$|x| < 1$ で $f^-(x) = -(x^2 - 1)$

でした．

g を $-1 \leq x \leq 0$ で $g(x) = -1$, $0 < x \leq 1$ で $g(x) = 1$, それ以外で $g(x) = 0$ としましょう．両方の関数のグラフと $f(x) + g(x)$ のグラフを描いて，$(f+g)^+(x)$ と $f^+(x) + g^+(x)$ は異なる関数であることを確かめましょう．

定理 19.1 を証明するには次の補題 19.2 と命題 19.3 を示せば十分です．

補題 19.2

$f(x)$ が積分可能ならば，任意の実数 α に対して，$\alpha f(x)$ も積分可能で

$$\int_X \alpha f(x)\ m(dx) = \alpha \int_X f(x)\ m(dx).$$

証明

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と分解するとき，$\alpha \geq 0$ ならば，$(\alpha f)^+(x) = \alpha f^+(x)$, $(\alpha f)^-(x) = \alpha f^-(x)$. だから，

$$\int_X \alpha f(x)\ m(dx) = \int_X \alpha f^+(x)\ (dx) - \int_X \alpha f^-(x)\ m(dx)$$
$$= \alpha(\int_X f^+(x)\ (dx) - \int_X f^-(x)\ m(dx)) = \alpha \int_X f(x)\ m(dx).$$

$\alpha < 0$ ならば，$(\alpha f)^+(x) = -\alpha f^-(x)$, $(\alpha f)^-(x) = -\alpha f^+(x)$. だから，

$$\int_X \alpha f(x)\ m(dx) = \int_X (-\alpha) f^-(x)\ (dx) - \int_X (-\alpha) f^+(x)\ m(dx)$$
$$= \alpha(\int_X f^+(x)\ (dx) - \int_X f^-(x)\ m(dx)) = \alpha \int_X f(x)\ m(dx).$$

【証明終】

命題 19.3

$f(x), g(x)$ が積分可能ならば，$f(x) + g(x)$ も積分可能で

$$\int_X (f(x) + g(x))\ m(dx) = \int_X f(x)\ m(dx) + \int_X g(x)\ m(dx).$$

命題 19.3 を吉田伸生著『ルベーグ積分入門』に沿って証明していきます.（積分の記号はこの本で使っている省略形で書いています.）

証明

$h = f{+}g$ とおく．以下，$\int(f^-{+}g^-)m(dx) < \infty$ の場合に示す．($\int(f^+{+}g^+)m(dx) < \infty$ の場合も同様に示せる．) このとき，$\int h^- m(dx) < \infty$. なぜなら，$(a(x), b(x)) \neq (+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)$ ならば，$(a(x) + b(x))^- \leq a(x)^- + b(x)^-$ が成り立つから（$a(x)$ と $b(x)$ が同時に負になるとは限らない！），$h^- \leq f^- + g^-$ である．したがって，

$$\int h^- \leq \int (f^- + g^-) = \int f^- + \int g^- < \infty.$$

ところで，

$$h^+ - h^- = h = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

仮定より，上式で f^-, g^-, h^- が ∞ となる測度は 0 なので，移項することができて，

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

上式の各項は非負なので，命題 17.1 より，

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+.$$

この式で $\int f^-, \int g^-, \int h^-$ は有限値なので，移項してよい．よって，

$$\int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-.$$

すなわち，

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

【証明終】

１９－３．ルベーグの収束定理

定理 19.4（ルベーグの収束定理）可測関数列 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は，$n \to \infty$ で $f(x)$ に各点収束しているとし，ある可積分関数 $F(x)$ が存在して，すべての n に対して，

$$|f_n(x)| \leq F(x)$$

が成り立つとする．このとき，任意の $E \in \mathcal{B}$ 上で

$$\int_E f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\ m(dx)$$

が成り立つ．

♣ $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ だから，この定理の結論を

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \ m(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\ m(dx)$$

と表すと，極限と積分が交換可能であることを述べている．

<u>証明</u>

$F(x)+f_n(x)\geq 0\ (n=1,2,\ldots)$ であるから，ファトゥーの補題（補題 17.5）より，

$$\int_E \liminf(F(x)+f_n(x))\ m(dx) \leq \liminf \int_E (F(x)+f_n(x))\ m(dx) \qquad (3)$$

（$F(x)$ は n によらないので）左辺は

$$\int_E \liminf(F(x)+f_n(x))\ m(dx) = \int_E (F(x)+\liminf f_n(x))\ m(dx)$$

$$= \int_E F(x)\ m(dx) + \int_E \liminf f_n(x)\ m(dx) \qquad (4)$$

最後に，積分の線形性（定理 11.1）を用いた．一方，右辺は定理 11.1 より

$$\liminf \int_E (F(x)+f_n(x))\ m(dx) = \int_E F(x)\ m(dx) + \liminf \int_E f_n(x)\ m(dx) \qquad (5)$$

(3), (4), (5) を合わせると，

$$\int_E \liminf f_n(x)\ m(dx) \leq \liminf \int_E f_n(x)\ m(dx) \qquad (6)$$

を得る．

同様に，$F(x)-f_n(x)\geq 0\ (n=1,2,\ldots)$ に対して，ファトゥーの補題（補題 17.5）を用いると， (D)

$$\int_E \liminf(-f_n(x))\ m(dx) \leq \liminf \int_E (-f_n(x))\ m(dx).$$

一般に，$\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$ (E) であることに注意すると，

$$-\int_E \limsup f_n(x)\ m(dx) \leq -\limsup \int_E f_n(x)\ m(dx).$$

すなわち，

$$\int_E \limsup f_n(x)\ m(dx) \geq \limsup \int_E f_n(x)\ m(dx) \qquad (7).$$

(6) と (7) を合わせて，

$$\int_E \liminf f_n(x)\ m(dx) \leq \liminf \int_E \quad f_n(x)\ m(dx) \leq \limsup \int_E \quad f_n(x)\ m(dx)$$

$$\leq \int_E \limsup f_n(x)\ m(dx).$$

仮定より，$\liminf f_n(x) = \limsup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であるから，両端の積分が等しく，不等号がすべて等号になる．特に，$\displaystyle\int_E f_n(x)\ m(dx)$ は $n\to\infty$ のとき極限値をもつことがわかり，

$$\int_E f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\ m(dx)$$

である．　　　　【証明終】

ルベーグの収束定理のとても役に立つ応用

定理　（積分記号のもとでの微分法）伊藤ルベーグ p.95

測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ があり，関数 $f(x,\alpha)$ $(x\in X,\ \alpha\in(a,b))$ は x の関数としては X の上で可積分，α の関数としては微分可能とり，またの X の上で積分可能な関数 $\phi(x)$ が存在して $X\times(a,b)$ の上で $|f_\alpha(x,\alpha)|\leq\phi$ であるとすると，積分 $\displaystyle\int_X f(x,\alpha)m(dx)$ は α の関数として微分可能であって

$$\frac{d}{d\alpha}\int_X\ f(x,\alpha)m(dx) = \int_X\ f_\alpha(x,\alpha)m(dx).$$

ここで，$f_\alpha(x,\alpha)$ は $f(x,\alpha)$ の α に関する偏導関数.

平均値の定理とルベーグの収束定理より容易に証明できます.

例題

次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\ dx.$$

ここで次のガウス積分の結果は使ってよい.

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

解法

$f(x,\alpha)=e^{-\alpha x^2}$, $X=[0,\infty)$, $(a,b)=(\dfrac{1}{2},2)$ (1 を内部に含む区間なら何でもよい)，測度はルベーグ測度とする．

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\ dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)=-x^2e^{-\alpha x^2}$$

であるから，$X\times(\frac{1}{2},2)$ 上で

$$x^2e^{-\alpha x^2}\le x^2e^{-x^2/2}\le Ce^{-x^2/4}$$

をみたす $C>0$ が存在することを示せばよい（$x^2/2$ は α の範囲から．最右辺の $1/4$ は $1/2$ より小さい数ならなんでもよい）．これが示せれば $\phi(x)=Ce^{-x^2/4}$ として定理を適用することができる．

$g(x):=x^2e^{-x^2/4}$ の増減を調べて，有界であることを示す．

$$g'(x)=(2x-\frac{x^3}{2})e^{-x^2/4}.$$

$x\ge 0$ の範囲では $x=2$ で最大値 $g(2)=4e^{-4}$ をとる．$C=4e^{-4}$ とおくと，$X\times(\frac{1}{2},2)$ 上で $g(x)\le C$, すなわち，

$$0\le\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\right|\le Ce^{-x^2/4}.$$

$\displaystyle\int_0^\infty Ce^{-x^2/4}\ dx<\infty$ であるから，定理の結論

$$\frac{d}{d\alpha}\int_X f(x,\alpha)m(dx)=\int_X f_\alpha(x,\alpha)\ dx.$$

が使える．
右辺（x は積分で消えているから α だけの関数であることに注意）：

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=-\frac{1}{4}\sqrt{\pi}\alpha^{-3/2}.$$

$\alpha=1$ とおくと，$-\dfrac{1}{4}\sqrt{\pi}$.
左辺：

$$\int_0^\infty(-x^2)e^{-\alpha x^2}\ dx.$$

ここで $\alpha=1$ とおくと求める積分が得られる．

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\ dx=\frac{1}{4}\sqrt{\pi}.$$

最終レポート

(1)　ルベーグ測度の構成法を A4 サイズの紙 1 枚以内にまとめよ．

(2)　ルベーグ積分の定義と、おもな定理（いくつかある極限と積分の交換に関する定理，積分の線形性など）の内容と，それらをどのような順で証明したかを A4 サイズの紙 2 枚程度にまとめよ．

(3) （自由レポート）　n を自然数とするとき，$\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx$ をもとめよ．

用語の違い

多くの本では，X 上の**ボレル集合体**とは,「X の開部分集合をすべて含む最小のシグマ加法族」と定義して，$\mathcal{B}(X)$ と表します．

「最小の」とは，$\mathcal{G}$ を X の開部分集合をすべて含む**シグマ加法族**（『ルベーグ積分 30 講』ではこれをボレル集合体とよんでいる）とすると，$\mathcal{B}(X)\subset\mathcal{G}$ がなりたつということです．

測度空間 $(X,\mathcal{B}(X),m)$ が与えられたとき，$\mathcal{B}(X)$ にすべての零集合を付け加えてシグマ加法族になるようにしたものが,『ルベーグ積分 30 講』で定義した（カラテオドリの意味での）可測集合族 $\mathcal{M}$ です．X の部分集合 A が**零集合**であるとは，$A\subset N$, $m(N)=0$ を満たす $N\in\mathcal{B}(X)$ が存在することです．(A 自体は $\mathcal{B}(X)$ に属すとは限らないので付け加える.）$\mathcal{B}(X)$ にすべての零集合を付け加えたシグマ加法族（シグマ加法族の完備化）を作り，新たに付け加わった集合に対しても測度を定義することを，**測度空間の完備化**といいます．可測集合族 $\mathcal{M}$ は最初から完備なシグマ加法族です．

進んだ教科書

『ルベーグ積分入門』　伊藤清三著　裳華房　1963

ロングセラーです．私もこれで勉強しました．

『[新装版] ルベーグ積分入門　使うための理論と演習』　吉田伸生著　日本評論社　2021

この講義のつづきに当たる第 5 章以降は伊藤ルベーグより読みやすいです．

演習書

『難問克服　ルベーグ積分』　服部哲弥著　東京図書　2020

すべての問題に丁寧な解答がついています．