解析学 C 第 11 回講義ノート　(2021.7.13)　0625 版

１８．積分の基本定理

教科書『ルベーグ積分３０講』第１９講

これまで非負の可測関数に対して積分を定義し，いくつかの定理を導きました．
測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ は与えられているとします．

まず，単関数に対して積分を定義し，それから，非負の（$f(x) \geq 0$）可測関数 f に対し，f の積分を

$$\int_X f(x)\ m(dx) := \sup \int_X \phi(x)\ m(dx)$$

で定義しました．ここで，sup は

$$0 \leq \phi(x) \leq f(x)$$

を満たすすべての単関数にわたってとります．

一方で，非負の可測関数 f に対し，近似単関数の列，すなわち単関数の増加列

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \leq \phi_n(x) \leq \cdots$$

で

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = f(x)$$

を満たすものが存在することを証明しました．

今回は

$$\lim_{n \to \infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) = \int_X f(x)\ m(dx)$$

（右辺は sup を用いて定義されていることに注意）が成り立つことが証明します．この極限は近似単関数列の取り方によりません．

　今回も次の仮定をおきます．
　$f(x) = \infty$ または $f(x) = -\infty$ となるような x 全体の集合の測度は 0 とする．すなわち，

$$m(\{x \in X \mid f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

　ここまでで，単関数，単関数の積分，可測関数，可測集合，sup などのことばを使いましたが，このうちひとつでも定義を忘れているものがあれば今すぐ調べてください．

１８－１．エゴロフの定理

まず確認をしましょう．X 上の関数列 $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ が関数 f に**各点収束**するとは，各 $x \in X$ において，

　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ のとき，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ を満たす

ということでした．このとき，N は ε だけでなく，x にもよります．

x によらない共通の N が取れるとき，**一様収束**するといいます．すなわち，

　任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ のとき，すべての $x \in X$ に対して $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ．

つまり，$n \geq N$ で，f_n は f の上下それぞれ ε の幅の帯の中にすっぽり入る，ということです．これは，各点収束より強い概念です．つまり，「一様収束 $\Longrightarrow$ 各点収束」ですが，逆は成り立ちません．ちなみに，上の 2 つの定義で $n \geq N$ のとき，$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ としても同値です．都合のいい方を使えばよいです．

逆が成り立たない例

$X = [0, \infty)$, $0 \leq x \leq 1/n$ で，$f_n(x) := 1 - nx$, $x \geq 1/n$ で $f_n(x) = 0$ と定義する．$f(0) = 1$, $x > 0$ で $f(x) = 0$ とおくと，$\{f_n\}$ は f に各点収束するが，一様収束しない．(n をいくら大きくしても，f の上下それぞれ ε の幅の帯の中に f_n は入りきれない．)

一様収束に関する重要な定理

$\mathbb{R}$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ が関数 f に一様収束するならば，f も連続関数である．

上の例はそれぞれの $\{f_n\}$ は連続関数ですが，一様収束ではないので極限の関数は $x = 0$ で不連続でした．

上の例を別の側面からみる

$X = [0, \infty)$, $0 \leq x \leq 1/n$ で，$f_n(x) := 1 - nx$, $x \geq 1/n$ で $f_n(x) = 0$ と定義する．$f(0) = 1$, $x > 0$ で $f(x) = 0$ とおくと，$\{f_n\}$ は f に各点収束するが，X 上で一様収束しない．

　しかし，任意の $a > 0$ に対して，$[a, \infty)$ 上では f_n に f に一様収束する．すなわち，$\varepsilon. > 0$ があたえられたとき，$a^N < \varepsilon$ となるような N をとれば，すべての $n \geq N$ とすべての $x \in [a, \infty)$ に対して，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ となる．

ここでわかることは，X より少しだけ小さい適切な部分集合を考えるとその上で一様収束するようにできることです．

実は，$\{f_n\}$ が連続関数の列に限らず，可測関数列でもうまく部分集合を取ればその上で一様収束するようにできます．

定理 18.1　エゴロフの定理

有界な測度空間 $(X, \mathcal{B}, m)$ 上で定義された可測関数列 $\{f_n\}, n = 1, 2, \ldots$ が関数 f に各点収束するとする．このとき，任意の正の数 ε に対して，次の性質を満たす可測集合 H が存在する．
(i) $m(H) < \varepsilon$
(ii) H^c 上で $n \to \infty$ のとき f_n は f に一様収束する．

有界な測度空間とは $m(X) < \infty$（$m(X)$ が有限値）を満たす測度空間でした．
この定理は，一様収束しない X の部分集合は，いくらでも測度を小さくできることを主張しています．
証明を追っていくと，結局 $\varepsilon - N$ 論法を使っているだけだということがわかるでしょう．

証明

$m(\{x \in X \mid f(x) = \pm\infty\}) = 0$ を仮定しているから，集合 $\{x \in X \mid f(x) = \pm\infty\}$ は H に属すとしてよい．
以下，$-\infty < f(x) < \infty$ とする．$\{f_n\}$ が可測関数列なら，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ も可測である．(命題 15.6 の系)
各 $r \in \mathbb{N}$，$n = 1, 2, 3 \ldots$ に対し，X の部分集合

$$A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) := \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in X \mid |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r}\}$$

を定義する．
つまり，

$$x \in A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) \iff k \geq n \text{ ならば } |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r} \qquad (1)$$

命題 15.4 より，$f_k - f$ は可測関数，さらに $|f_k - f|$ も可測だから，$A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) \in \mathcal{B}$ である．
$A_n\left(\frac{1}{2^r}\right)$ は定義から，n に関して単調増加な集合列であり，$f_n \to f$ という仮定より

$$A_1\left(\frac{1}{2^r}\right) \subset A_2\left(\frac{1}{2^r}\right) \subset \cdots \subset A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) \subset \cdots \to X \qquad (2)$$

($\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) = X$ ということ．)

11-2 の (a) の測度の性質（これを**測度の連続性**とよぶ）

集合の増加列（等号も許す）$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ に対して，

$$m(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

を用いると，

$$m(X) = \lim_{n\to\infty} m\left(A_n\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)$$

が成り立つ．仮定より $m(X) < \infty$ だから，有限の極限値が存在する．($\varepsilon = 1/2^r$ として $\varepsilon - N$ 論法を用いると）適当な自然数 n_r をとると，$n \geq n_r$ で

$$|m(X) - m\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)| < \frac{1}{2^r}.$$

$$m\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right) > m(X) - \frac{1}{2^r}$$

が成り立つ．($m(X) > m\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)$ に注意．)

任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\varepsilon > \frac{1}{2^\ell}$$

となる $\ell \in \mathbb{N}$ をとり，

$$H := \bigcup_{r=\ell+1}^{\infty}\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)^c$$

とおく．(肩の c は補集合 (complement) を表す．)

$A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right) \in \mathcal{B}$ と σ–加法族の性質より（復習せよ！），$H \in \mathcal{B}$ である（すなわち H の測度 $m(H)$ が定義できる）．

以下 H が求める集合であることを示す．

$$m(H) = m\left(\bigcup_{r=\ell+1}^{\infty}\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)^c\right)$$

$$\leq \sum_{r=\ell+1}^{\infty} m\left(\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)^c\right) \qquad \text{(11-2 の (c))}$$

$$= \sum_{r=\ell+1}^{\infty}\left\{m(X) - m\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)\right\} \qquad \text{(補集合)}$$

$$
\begin{aligned}
&< \sum_{r=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \qquad\qquad (n_r\text{の選び方より}) \\
&= \frac{1}{2^\ell} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

H^c 上で一様収束すること．

$x \in H^c$ とすると，

$$H^c = \bigcap_{r=\ell+1}^{\infty} A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)$$

より，すべての $r(\geq \ell+1)$ に対し，

$$x \in A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right).$$

任意の δ に対し，$\delta > 1/2^r$ となる $r(\geq \ell+1)$ をとると，(1) より，

$$k \geq n_r \text{ のとき，} \qquad |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r} < \delta$$

が成り立ち，これは H^c 上で f_n が f に一様収束することを意味している．
【証明終】

１８－２．積分の基本定理

まず，次の定理を思い出そう．

定理 16.4（非負可測関数の単関数近似）

非負の可測関数 f に対し，単関数の増加（非減少）列

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \leq \phi_n(x) \leq \cdots$$

が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$$

を満たす.

第 16 講では実際に上のような近似単関数列を具体的に作ってみました．今回は，上のような近似単関数をどのようにとっても

$$\int_x f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx)$$

が成り立つことを示すのが最終目標です．

まず，$m(X) < \infty$ の場合に，エゴロフの定理を用いて，次を示します．

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) \qquad (3)$$

証明

非負の可測関数 f の積分の定義を思い出すと

$$\int_X f(x)\ m(dx) := \sup \int_X \phi(x)\ m(dx)$$

で，sup は，$0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ を満たす単関数 ϕ にわたってとる．定理 16.4 の単関数列を $\{\phi_n(x)\}$ とすると

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \sup \int_X \phi(x)\ m(dx) \geq \int_X \phi_n(x)\ m(dx). \quad \text{（sup だから）}$$

この両辺の $n \to \infty$ の極限をとると

$$\int_X f(x)\ m(dx) \geq \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) \qquad (4)$$

を得る．

(3) を示すには，任意の $0 \leq \psi(x) \leq f(x)$ を満たす単関数 ψ に対して

$$\int_X \psi(x)\ m(dx) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) \qquad (5)$$

を示せばよい．

実際，(5) が成り立つことがわかれば，ψ に関して sup をとると，

$$\int_X f(x)\ m(dx) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx)$$

となり，(4) と逆の不等号が成り立つことがわかる．

　エゴロフの定理を用いて (5) を示そう．H^c 上で $\phi_n(X)$ は f に一様収束するから，任意の $\delta > 0$ に対して，十分大きい N をとると，すべての $x \in H^c$ に対して，

$$|\phi_N(x) - f(x)| < \delta$$

が成り立つ．このとき，

$$f(x) - \delta \leq \phi_N(x).$$

$0 \leq \psi(x) \leq f(x)$ より，$x \in H^c$ のとき，

$$\psi(x) - \delta \leq \phi_N(x).$$

ψ は単関数だから，$\psi \leq K$ となる数 K がとれて，

$$\begin{aligned}
\int_X \psi(x)\ m(dx) &= \int_{H^c} \psi(x)\ m(dx) + \int_H \psi(x)\ m(dx) \quad \text{（命題 16.3(3) より）} \\
&\leq \int_{H^c} (\phi_N(x) + \delta)\ m(dx) + \int_H \psi(x)\ m(dx) \quad \text{（命題 16.3(1) より）} \\
&\leq \int_X \phi_N(x)\, m(dx) + \int_{H^c} \delta\, m(dx) + \int_H \psi(x)\, m(dx) \quad \text{（命 16.3(2) および } H^c \subset X \text{ より）} \\
&\leq \int_X \phi_N(x)\ m(dx) + \delta\ m(H^c) + K\ m(H) \quad \text{（} \psi \leq K \text{ と定数の積分）} \\
&\leq \int_X \phi_N(x)\ m(dx) + \delta\ m(X) + K\varepsilon \quad \text{（ } H^c \subset X \text{ とエゴロフの定理）}
\end{aligned}$$

ここで $N \to \infty$ とすると，

$$\int_X \psi(x)\ m(dx) \leq \lim_{N\to\infty} \int_X \phi_N(x)\ m(dx) + \delta\ m(X) + K\varepsilon$$

を得る．ここで，δ, ε は任意だから $\delta \to 0, \varepsilon \to 0$ とすると (5) を得る．

【証明終】

上では $m(X) < \infty$ を仮定して，エゴロフの定理を用いて (3) を示した．この仮定ははずすことができて次の定理が得られる．

定理 18.3

f を $(X, \mathcal{B}, m)$ 上の非負の可測関数とする．単関数の増加列

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \leq \phi_n(x) \leq \cdots$$

は

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$$

を満たすとする．このとき，

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx)$$

が成り立つ．

定理 18.3 で $f(x)$ の代わりに $f(x)\ \phi(x; E)$（$\phi(x; E)$ は集合 E の定義関数）を考えれば，任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して

$$\int_E f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_E \phi_n(x)\ m(dx)$$

が成り立つことがわかる．

証明

上の (4) は $m(X) < \infty$ の仮定を用いていないのでここでも成り立つ．あとは上と同様に任意の $0 \leq \psi(x) \leq f(x)$ を満たす任意の単関数に対して

$$\int_X \psi(x)\ m(dx) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) \qquad (5')$$

を示せばよい．

これまで非負単関数 $\psi(x)$ を，

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \phi(x; A_i),\ \ \alpha_i \geq 0,$$

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\ell,\ \ A_1, \ldots, A_\ell \text{は互いに素}$$

と表してきたが，ここでは $\alpha_i = 0$ となる項を抜いて

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi(x; A_i),\ \ \alpha_i > 0$$

と表そう．このとき，値が 0 になる A_i は入れていないので，$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset X$．さらに，

$$\{x \in X \mid \psi(x) > 0\} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$$

と表せる．以下，$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ とおく．

2 つの場合に分ける．

(i) $\int_X \psi(x)\ m(dx) < \infty$ の場合．
このとき，$m(B) < \infty$ である．　　　　(a)
　B に対して，(3) の証明と同様にして

$$\int_B \psi(x)\ m(dx) \leq \lim_{n\to\infty} \int_B \phi_n(x) m(dx)$$

が成り立つことが示せる．B の定義から，

$$\int_B \psi(x)\ m(dx) = \int_X \psi(x)\ m(dx)$$

また，$X = B \cup B^c$ と命題 16.3(3) より，

$$\int_B \phi_n(x)\ m(dx) \leq \int_X \phi_n(x)\ m(dx).$$

であることから，(5') が導かれる．

(Ii) $\int_X \psi(x)\ m(dx) = \infty$
このとき，$m(B) = \infty$ である．　　　　(b)

$$2\varepsilon := \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} > 0 \tag{6}$$

とおき，

$$B_n := \{x \in X \mid \psi(x) > 0,\ \ \phi_n(x) \geq \psi(x) - \varepsilon\}$$

とおく．$\{\phi_n\}$ は増加列で，$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = f(x)$, および $\psi(x) \leq f(x)$ だから

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots$$

$$\lim B_n = \bigcup_n^\infty B_n = \{x \in X \mid \psi(x) > 0\} = A_1 \cup \cdots \cup A_k \tag{c}$$

となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} m(B_n) = m(B) = \infty.$$

一方，$x \in B_n$ ならば $\phi_n(x) \geq \psi(x) - \varepsilon \geq \varepsilon$ なので（ (6) より），

$$\int_X \phi_n(x)\ m(dx) \geq \varepsilon\ m(B_n).$$

$n \to \infty$ の極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) \geq \varepsilon \lim_{n\to\infty} m(B_n) = \infty$$

となり，(5’) が成り立つ．

【証明終】

自由レポート　（提出は自由ですが，ルベーグ積分をきちんと理解したい人はぜひやってみてください.）

証明の (a), (b), (c) の部分をきちんと説明せよ．