解析学C第10回講義ノート (2021.6.29用） 6.25版

１７．積分の性質

教科書『ルベーグ積分３０講』第２０講前半

前回は非負の可測関数に対して積分を定義しました．
測度空間 $(X, \mathcal{B}, M)$ を１つ固定します．

1) まず，単関数，すなわち

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \phi(x; A_i)$$

（ここで，$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ は X の分割（互いに素で和集合が X と一致），$\alpha_1, \alpha_2, \quad \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ）と表される関数に対しては積分を

$$\int_X \phi(x) \ m(dx) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i)$$

によって定義しました．

2) 次に，非負の（$f(x) \geq 0$）可測関数 f に対し，f の積分を

$$\int_X f(x) \ m(dx) := \sup \int_X \phi(x) \ m(dx)$$

で定義しました．ここで，sup は

$$0 \leq \phi(x) \leq f(x)$$

を満たすすべての単関数にわたってとります．

3) 一方で，非負の可測関数 f に対し，近似単関数の列，すなわち単関数の増加列

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \leq \phi_n(x) \leq \cdots$$

で

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = f(x)$$

を満たすものが存在することを証明しました．

4) あとで次の定理を証明します．

定理 18.3

f を $(X, \mathcal{B}, m)$ 上の非負の可測関数とする．単関数の増加列

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \leq \phi_n(x) \leq \cdots$$

は

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(x) = f(x)$$

を満たすとする．このとき，

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \lim_{n \to \infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx)$$

が成り立つ．

$\displaystyle\int_X f(x)\ m(dx)$ は sup を用いて定義されていました．それが近似単関数の積分の極限として表せます．定理 18.3 は，この極限は近似単関数列の取り方によらないことを主張しています．このことは，今回先取りして何度か使います．

5) $E \in \mathcal{B}$ 上の積分 $\int_E f(x)\ m(dx)$ は

$$\int_X f(x)\ \phi(x; E)\ m(dx)$$

で定義されるので，X 上の積分に帰することができます．

負の値も取りうる可測関数の積分はあとでまとめて考えることにして，今回は定理 18.3 を認めて，積分の基本性質と重要な定理を導きます．

今回も次の仮定をおきます．
$f(x) = \infty$ または $f(x) = -\infty$ となるような x 全体の集合の測度は 0 とする．すなわち，

$$m(\{x \in X \mid f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

１７－１．積分の線形性（非負の場合）

命題 17.1（積分の線形性）

非負の 可測関数 $f(x), g(x) \geq 0$, および **非負の** 定数 $a, b \geq 0$ に対して，

$$\int_X (af(x) + bg(x))\ m(dx) = a \int_X f(x)\ m(dx) + b \int_X g(x)\ m(dx).$$

f, g が（非負とは限らない）単関数の場合は，定理 16.3(2) で証明しました．ここでは定理 18.3 を用いて証明します.

証明

それぞれ f, g に収束する単関数の増加列

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \leq \phi_n(x) \leq \cdots \to f(x),$$

$$0 \leq \psi_1(x) \leq \psi_2(x) \leq \cdots \leq \psi_n(x) \leq \cdots \to g(x)$$

を取る．このとき，$a, b \geq 0$ なので，$a\phi_n(x) + b\psi_n(x)$, $(n = 1, 2, \dots)$ も単関数の増加列で

$$\lim_{n\to\infty} (a\phi_n(x) + b\psi_n(x)) = af(x) + bg(x)$$

を満たす.

よって，

$$\int_X (af(x) + bg(x))\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X (a\phi_n(x) + b\psi_n(x))\ m(dx) \qquad \text{（定理 18.3 より）}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(a \int_X \phi_n(x)\ m(dx) + b \int_X \psi_n(x)\ m(dx) \right) \qquad \text{（定理 16.3(2) より）}$$

$$= a \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n(x)\ m(dx) + b \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n(x)\ m(dx) \text{（各項の極限が存在するから分けられる）}$$

$$= a \int_X f(x)\ m(dx) + b \int_X g(x)\ m(dx).$$

【証明終】

♣ リーマン積分の場合は積分の線形性は定義から直ちに導かれました．ルベーグ積分で被積分関数が非負とは限らない場合は，自明ではなく，ちょっと工夫が必要です.（あとでやる予定）

１７－２．積分に関する重要な定理（非負の場合）

この先，積分と極限の交換に関する定理をいくつか証明していきます.

定理 17.2（関数項の級数）

$\{f_n(x)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ を **非負の** 可測関数列とし，

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

とする．このとき，

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\ m(dx).$$

♣ これは積分と無限和の交換可能性を表す定理です.

証明

各 n に対して $f_n(x)$ に収束する単関数の増加列を

$$0 \leq \psi_1^{(n)}(x) \leq \psi_2^{(n)}(x) \leq \cdots \leq \psi_k^{(n)}(x) \leq \cdots \to f_n(x),$$

と表す．これらを並べると

$$\begin{array}{l}
\psi_1^{(1)}(x)\ \ \psi_2^{(1)}(x)\ \ \psi_3^{(1)}(x)\ \cdots\ \psi_k^{(1)}(x)\ \cdots \to f_1(x), \\
\psi_1^{(2)}(x)\ \ \psi_2^{(2)}(x)\ \ \psi_3^{(2)}(x)\ \cdots\ \psi_k^{(2)}(x)\ \cdots \to f_2(x), \\
\psi_1^{(3)}(x)\ \ \psi_2^{(3)}(x)\ \ \psi_3^{(3)}(x)\ \cdots\ \psi_k^{(3)}(x)\ \cdots \to f_3(x), \\
\qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots \\
\psi_1^{(n)}(x)\ \ \psi_2^{(n)}(x)\ \ \psi_3^{(n)}(x)\ \cdots\ \psi_k^{(n)}(x)\ \cdots \to f_n(x), \\
\qquad\qquad \cdots\ \cdots\ \cdots
\end{array}$$

ここで，最初の **縦の列** の最初の 1 つ，2 番目の縦の列の最初の 2 つ，3 番目の縦の列から最初の 3 つ，$\cdots$，k 番目の縦の列から最初の k 個をそれぞれ足した関数を作る.（教科書 p.157 の図参照）すなわち，

$$\phi_k(x) := \sum_{i=1}^{k} \psi_k^{(i)}(x)$$

とおく．これは単関数であることに注意.（命題 16.2 より）

各 n に対して

$$0 \leq \psi_1^{(n)}(x) \leq \psi_2^{(n)}(x) \leq \cdots \leq \psi_k^{(n)}(x) \leq \cdots$$

であることを考慮すると

$$0 \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq \cdots \qquad (*)$$

が成り立つことがわかる．

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \geq \sum_{i=1}^{k} f_i(x) \geq \sum_{i=1}^{k} \psi_k^{(i)}(x) = \phi_k(x) \qquad (1)$$

ここで，$\psi_k^{(i)}(x) \leq f_i(x)$ を用いた．

一方，任意の $\ell \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \psi_k^{(i)}(x) \geq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell} \psi_k^{(i)}(x) = \sum_{i=1}^{\ell} f_i(x).$$

（不等号はなぜ成り立つか，考えてみよう．気が付けばあたりまえ．）最後の等号は，有限個の和と極限は交換できるから．

ここで，$\ell \to \infty$ として，

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) \geq \lim_{\ell\to\infty} \sum_{i=1}^{\ell} f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \qquad (**)$$

一方，(1) で $k \to \infty$ として，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \geq \lim_{k\to\infty} \phi_k(x) \qquad (***)$$

(**) と (***) より，

$$\lim_{k\to\infty} \phi_k(x) = f(x).$$

このことを，それぞれの $\phi_k(x)$ が単関数であること，および（$*$）と合わせると，単関数列 $\{\phi_k(x)\}$ は f の近似単関数列（f に収束する単調増加単関数列）であることがわかる．よって，定理 18.3 より

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_X \phi_k(x)\ m(dx)$$

を得る．この右辺に着目する．まず，$\phi_k(x)$ の定義から始めて

$$\lim_{k\to\infty} \int_X \phi_k(x)\ m(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_X \sum_{i=1}^{k} \psi_k^{(i)}(x)\ m(dx)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_X \psi_k^{(i)}(x)\ m(dx)$$ （単関数の有限和だから命題 16.3(2) を用いた）

$$\le \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_X f_i(x)\ m(dx) \qquad \text{（}\psi_k^{(i)}\text{は }f_i\text{の近似単関数）}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\int_X f_i(x)\ m(dx). \qquad \text{（}\sum_{i=1}^{\infty}\text{の定義）}$$

したがって，

$$\int_X f(x)\ m(dx) \le \sum_{i=1}^{\infty}\int_X f_i(x)\ m(dx) \tag{2}$$

一方，$f_i(x) \ge 0$ より，

$$f(x) \ge \sum_{i=1}^{k} f_i(x)$$

であるから，

$$\int_X f(x)\, m(dx) \ge \int_X \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\, m(dx) = \sum_{i=1}^{k}\int_X f_i(x)\, m(dx) \qquad \text{（有限和だから}\sum\text{と}\int_X\text{が交換可）}$$

ここで，$k\to\infty$ とすると，逆向きの不等号

$$\int_X f(x)\ m(dx) \ge \sum_{i=1}^{\infty}\int_X f_i(x)\ m(dx) \tag{3}$$

が得られる．(2), (3) より等号が成立することがわかり，定理が証明された．【証明終】

これからさらにいくつかの定理が導けます．上では X 全体の積分の形で書いていましたが，以前コメントしたように，被積分関数に $\phi(x;E)$ をかけると $\int_E$ になるので，$\int_X$ で成り立つことは $\int_E$ でも成り立ちます．

定理 17.3（積分範囲の和）

$E_n, (n=1,2,\ldots)$ を互いに素な集合列（$i\ne j$ ならば $E_i\cap E_j=\emptyset$）とし，

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

とする．非負可測関数 f に対して，

$$\int_E f(x)\ m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\ m(dx).$$

証明

前回用いた,「$A \cap B = \emptyset$ のとき，$\phi(x; A \cup B) = \phi(x; A) + \phi(x; B)$」（$x$ がどこにあるかで場合分けすればすぐわかる）を思い出そう．これは無限個でも同様に証明できる．

$$\phi(x; E) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x; E_n)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\ m(dx) = \int_X f(x)\phi(x; E)\ m(dx) &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f(x)\phi(x; E_n)\ m(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f(x)\phi(x; E_n)\ m(dx) \qquad \text{（定理 17.2）} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\ m(dx).\end{aligned}$$

【証明終】

定理 17.4（単調収束定理）

$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots$ かつ，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

とする．このとき

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ m(dx).$$

証明

$g_1(x) := f_1(x)$, $k \ge 2$ に対して，$g_k(x) := f_k(x) - f_{k-1}(x)$ とおくと，$g_k(x) \ge 0$ であり，

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

である．$n \to \infty$ とすると

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x).$$

定理 17.2 を用いると

$$\int_X f(x)\ m(dx) = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)\ m(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X g_i(x) m(dx) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_X g_i(x) m(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{i=1}^{n} g_i(x) m(dx) \qquad \text{（有限個の和だから命題 17.1 より積分と交換できる）}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) m(dx).$$

【証明終】

補題 17.5（ファトゥー(Fatou) の補題）

$\{f_n(x)\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ は非負可測関数列とする．このとき，

$$\int_X \liminf f_n(x)\ m(dx) \le \liminf \int_X f_n(x)\ m(dx).$$

証明

$\liminf$ の定義は

$$\liminf f_n(x) = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\ge k} f_n(x)$$

であるが，

$$g_k(x) := \inf_{n\ge k} f_n(x) = \inf\{f_k(x), f_{k+1}(x), f_{k+2}(x), \cdots\}$$

とおくと，$\{g_k(x)\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ は非負の単調増加列で，

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf f_n(x).$$

よって，定理 17.4，および $g_k(x) \le f_k(x)$（inf だから）より，

$$\int_X \liminf f_n(x)\ m(dx) = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k(x)\ m(dx) = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k(x)\ m(dx)$$

$$\le \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k(x)\ m(dx).$$

【証明終】

♣ ファトゥーの補題は可測関数が非負であることしか仮定していないので，使い道がけっこうあります.