解析学Ｃ第１回講義ノート　(2021.4.13）

１．面積を数学的に定義する　(2021.3.30 版）

教科書『ルベーグ積分３０講』第１講に関する講義ノート

図形の大きさを測るとき，１次元の図形なら長さ，２次元なら面積，３次元なら体積を測ります．これらは日常使われる概念です．でも改めて考えてみると，長さとか面積って何でしょうか．どのような図形に対しても定義できるのでしょうか．

この講義で目指すのは，まず長さ，面積，体積など図形の大きさを「数学として定義」することです．数学として定義する際に，極限の概念が中心的役割を果たします．

そうして初めて，その上に，ルベーグ流の積分，それのみならず解析学を築き上げることができます．

数学として定義された大きさを，**測度 (measure)** とよびます．１次元測度，２次元測度，３次元測度はそれぞれ長さ，面積，体積の概念を拡張したものになっています．すなわち，

(1)　普通の長方形，円，球などに対しては知られている面積，体積の値と一致し，
さらにこれまで面積など考えてこなかった図形，例えば，

$$\{(x,y) \in [0,1]^2 \ : \ x, y \neq \mathbb{Q}\}$$

は１辺１の正方形内の x, y 座標が無理数の点の集まりですが，これに対しても「面積」を定義できるように拡張します．

また，極限の概念を取り込むには，次の条件を満たすように測度を定義します．2 次元の例で言うと

(2)　$S_1, S_2, S_3, \ldots$ が面積が定義できる 2 次元平面内の図形で，単調に増加してある面積が定義できる図形 S になる，すなわち

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \cdots \to S$$

とします．矢印はこの場合，$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ の意味です．一般に，集合 A の測度（この場合面積）を $m(A)$ と書くことにすると，$n \to \infty$ のとき

$$m(S_n) \to m(S).$$

この教科書ではおもに 1 次元と 2 次元の測度を扱います。いずれの場合も測度は m で表しますが，1 次元と 2 次元は同時には扱わないので混乱のおそれはありません．

1 次元の場合はまず (1) を満たすように，すなわち線分 $[a, b]$, $(a < b)$ に対しては（1 次元）測度を $b - a$ と定義するところから始めて，(2) を満たすように測度を作っていきます．

2次元の場合は，(1) を満たすように，すなわち長方形に対しては辺の長さの積として（2次元）測度の定義を始めて，(2) を満たすように作っていきます．

その途中で，図形 $C = A \cup B$ が $A \cap B = \emptyset$（2つの交わらない部分に分けられる）ならば、$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ となることを要請します．いかにも当たり前のようですが，測度を作る上ではこれも定義の一部とします．

ほとんどゼロから始めて，一つずつ要請をおいて（例えばすぐ上のようなこと），定義していきます．教科書を読むときは，何が「要請（定義の一部)」か，何がこれまでの定義から「導かれること」かの区別を意識しながら読んでください．そうすれば頭の中がごちゃごちゃにならないですみます．

この教科書の第５～１３講は，測度を作っていく部分です．なにしろ，(2) を満たすように作るのはなかなか難しいので．

でも，いったん測度を作ってしまえば，積分の定義は簡単で，第20講では，微分積分III で学んだのよりずっとすっきりした，積分と極限の交換に関する定理が得られます．

２．数直線上の長さ (2021.3.18 版）

教科書『ルベーグ積分３０講』第２講に関する講義ノート

今回は，１次元の有界な図形（集合）のみを考えます．
１次元の集合に対して，第１講で見たように (1)「長さ」の概念の拡張であって，かつ (2)（の１次元版）を満たすような測度を定義したいのですが，本格的に測度を定義する前に，(2) のもつ意味を考えてみるのがこの章の目的です．

１次元の集合と言ってもいろいろありますが（例えば，有理数全体の集合），この章では，まず数直線上の区間から始めます．

２－１．区間の長さ

本格的に測度を定義するのは第５章以降で，この章でやることはウォーミングアップなので，ここでは測度という言葉は使わず，長さとよぶことにします．

まず定義の第１歩として，$a \leq b$ として**閉区間** $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$ に対して，その「長さ」を

$$\text{(L1)} \qquad m([a,b]) = b - a$$

と 定義します．
この定義で，$a = b$ とすると，$[a,a] = \{a\}$（１点集合）で，

$$m(\{a\}) = a - a = 0$$

であることが わかります．すなわち，**１点の長さは０**です．

つぎに，$(a,b], [a,b), (a,b)$ のような，半開区間，開区間の長さも定義したくなります．これらは，$[a,b]$ から端点を除いたものですから，これらの長さも閉区間と同じ $b-a$ と 定義する のが自然です．

$$\text{(L2)} \qquad m([a,b]) = m((a,b]) = m([a,b)) = m((a,b)) = b - a.$$

このように 定義 して，$a = b$ とおくと
$(a,a] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq a\} = \emptyset$ なので，

$$m(\emptyset) = 0$$

が 導かれます．

区間の長さの定義から，次のことも直ちに導けます．

任意の $h \in \mathbb{R}$ に対して，

$$m([a+h, b+h]) = (b+h) - (a+h) = b - a = m[a, b],$$

すなわち，区間をそのままずらしても（平行移動しても）長さは変わらない．このことは，開区間，半開区間でも成り立ちます．このことを，**平行移動不変性**といいます．

まとめ

この節では区間の長さを定義した．閉区間 $[a, b]$ の長さの定義より，1 点集合の長さは 0 に決まる．このことから，半開区間，開区間の長さを

$$m((a, b]) = m([a, b)) = m((a, b)) = b - a.$$

と定義するのが自然で．こう定義すると $m(\emptyset) = 0$ が導ける．また，区間の長さは平行移動に関して不変である．

２－２．有限加法性

さらに，長さは次の性質をもつと定義します．

（L3）**有限加法性**

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n \subset \mathbb{R}$ がそれぞれ長さが定義できる集合で，**互いに素**，すなわち，$i \neq j$ なら $S_i \cap S_j = \emptyset$ とする．このとき，$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ も長さが定義できて，

$$m(S) = m(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = \sum_{i=1}^{n} m(S_i)$$

を満たす．

これは，部分の長さの和が，つなぎ合わせた集合の長さに等しいという自然な要請です．

こう決めると，有限個の区間の和集合の長さは次のように定義できます．

$$m((-1, 0] \cup [1, 2]) = m((-1, 0]) + m([1, 2]) = 1 + 1 = 2$$

２－３．実数の連続性

まだまだ目標の極限の概念を入れた長さの定義までは遠いのですが，この段階でも少しだけ極限の話ができます．

そのため，実数の連続性を思い出してみましょう。

実数の連続性

上に有界な単調増加数列は，ある実数に収束する．

すなわち，

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots < K$$

ならば，ある数 c が存在して

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

さて，$a < a_1$ として，上のような収束する単調増加数列を用いて半開区間の列

$I_1 = [a, a_1), I_2 = [a, a_2), \cdots, I_n = [a, a_n), \cdots$

を考え，$I = [a, c)$ とします．ここで，$c = \lim_{n\to\infty} a_n$. 定義から，

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots \to I$$

であり，

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

です．

このとき，各区間の長さは

$$m(I_n) = a_n - a,\ m(I) = c - a,\ a_n \to c$$

ですから，

$$m(I) = \lim_{n\to\infty} m(I_n)$$

が成り立ちます．これは，各集合が区間で，$n \to \infty$ である有限な区間になるという特別な場合に，第 1 講の (2) が成り立っていることを意味しています．

２－４．完全加法性（可算加法性）

上の増加する区間列の話を書き直してみましょう．

半開区間の列

$J_1 = [a, a_1), J_2 = [a_1, a_2), \cdots, J_n = [a_{n-1}, a_n), \cdots$

を考えます．つまり，$J_n = I_n \setminus I_{n-1}$ です．この半開区間の列は互いに素です．

$$I_n = J_1 \cup J_2 \cup \cdots J_n$$

$$I = [a, c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n.$$

このとき，区間の列の長さは

$$m(J_1) = a_1 - a,\ m(J_2) = a_2 - a_1, \ldots, m(J_n) = a_n - a_{n-1}, \ldots$$

これらすべての和をとると，

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} m(J_n) = \lim_{N\to\infty} (\ (a_1 - a) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_N - a_{N-1})\ )$$
$$= \lim_{N\to\infty} (a_N - a) = c - a = m(I)$$

がわかります．すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) = m(I)$$

が成り立ちます．

このことを，前節で要請した有限加法性に対して，**可算加法性（完全加法性）**が成り立つと言います.（現代では「可算加法性」という語の方がよく使われています.）

ここまでで，区間 I を互いに素な隣り合う可算無限個の区間 $\{J_n\}$ に切り分けた場合には可算加法性が成り立つ ことがわかりました．

また，上に述べたように，単調増大区間列 $\{I_n\}$ と互いに素な区間列 $\{J_n\}$ の関係から，第 1 章の (2) と可算加法性は同値 であることがわかります．

平行移動不変性を用いてもう 1 歩進んでみます．

数直線上に互いに素な（しかし隣どうしとは限らない）半開区間の列 $\{J'_n\}$ があるとします．これらを平行移動して，原点から始めて x 軸の正の方向に隣とぴったりとくっつくように並べます．このように平行移動した区間列を $\{J_n\}$ とすると，$\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ は有界な区間 $[0, K)$ または無限区間 $[0, \infty)$ になります．この章では（最初に述べたように）有界な集合のみを扱っているので，有界区間 $[0, K)$ になるとしましょう．$\bigcup_{n=1}^{\infty} J'_n$ は可算無限個の区間の寄せ集めですから，これまで長さは考えたことはありませんでした．

しかし，平行移動不変性より，$m(J_n) = m(J'_n)$ ですから，さらに 可算加法性を仮定すれば

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} J'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(J'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) = K$$

のように，可算無限個の互いに素な区間の和集合の長さが自然に定義できます．

３．直線上の完全加法性の様相 (2021.3.18 版)

教科書『ルベーグ積分３０講』第３講に関する講義ノート（前半）

この章でも数直線上の集合を扱います．第 2 章では，有限な区間の長さを「右端の値ー左端の値」と定義して，可算加法性を仮定すると，可算無限個の互いに素な区間の和集合の長さが自然に定義できることを示しました．その続きとして，可算加法性を仮定すると導きだせる面白い例を紹介します．

３－１．有理数の集合

有理数とは

$$n/m, \quad n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$$

と表される数です．有理数を小数で表すと，有限小数または循環小数になります．

有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ で表します．すなわち，

$$\mathbb{Q} = \{n/m \ : \ n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$$

です。

(Q1)　$\mathbb{Q}$ は**可算集合**，すなわち，自然数と 1 対 1 に対応がつく集合です．

いいかえると，１に対応するもの，２に対応するもの，$\cdots$　と順に並べていけば

$$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$$

のように表すことができます．

(Q2)　$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の**稠密** (dense) な部分集合です．

つまり，任意の実数 x に対して，いくらでも近くに有理数があります．x 自身が有理数なら当たり前ですが，無理数でも成り立ちます．

すなわち，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して次のことが言えます．

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|x - y| < \varepsilon$ となる $y \in \mathbb{Q}$ がある.」

この２つは有理数の大事な性質ですので覚えておきましょう．

３－２．有理数を囲む集合

さて，有理数の性質を利用して，次のような集合を作ります．

簡単のため，$[0, 1]$ 区間内の有理数を考えます．

$$\mathbb{Q}' := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$$

と書きます．可算加法性を仮定すると $\mathbb{Q}'$ を含む集合でいくらでも長さが小さいものが作れることをみていきましょう．

まず，$\varepsilon > 0$（十分小）を任意にとります．そして，

$$\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\} \quad \text{（大きさ順ではないことに注意！）}$$

の最初の要素 r_1 のまわりに）閉区間

$$I_1 = [r_1 - \varepsilon/2, r_1 + \varepsilon/2]$$

をとります

次に，$\mathbb{Q}'$ の要素で I_1 に含まれないもので一番番号の小さいものを q_2 とします．そうすると十分小さい正の数 $\varepsilon^{(1)} > 0$ で次の 2 つの条件を満たすものが取れます．

$$\varepsilon^{(1)} \leq \varepsilon/2,$$

$$I_2 := [q_2 - \varepsilon^{(1)}/2, q_2 + \varepsilon^{(1)}/2] \text{ とおくと，} \qquad I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

（これは，I_1 が閉区間であることがミソで，I_1 に属さない数は I_1 との間に正の幅のすきまがある.）

さらに，$\mathbb{Q}'$ の要素で $I_1 \cup I_2$ に含まれないもので一番番号の小さいものを q_3 とします．そうすると十分小さい正の数 $\varepsilon^{(2)} > 0$ で次を満たすものが取れます．

$$\varepsilon^{(2)} \leq \frac{\varepsilon}{2^2},$$

$$I_3 := [q_3 - \varepsilon^{(2)}/2, q_3 + \varepsilon^{(2)}/2] \text{ とおくと，} \qquad (I_1 \cup I_2) \cap I_3 = \emptyset.$$

帰納的に，I_n まで，互いに素な閉区間の列が決まったとき．$\mathbb{Q}'$ の要素で $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ に含まれないもので一番番号の小さいものを q_{n+1} とします．そうすると十分小さい正の数 $\varepsilon^{(n)} > 0$ で次を満たすものが取れます．

$$\varepsilon^{(n)} \leq \frac{\varepsilon}{2^n},$$

$$I_{n+1} := [q_{n+1} - \varepsilon^{(n)}/2, q_{n+1} + \varepsilon^{(n)}/2] \text{ とおくと，} \qquad (I_1 \cup \cdots \cup I_n) \cap I_{n+1} = \emptyset.$$

これを繰り返すと，互いに素な閉区間の無限列が定義され，どの有理数も必ずどれかの閉区間に含まれますから，

$$J := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

と表すと，

$$\mathbb{Q}' \subset J$$

です．

さて，I_n の長さは
$$m(I_n) = \varepsilon^{(n-1)} < \varepsilon/2^{n-1}$$
です．

ここで長さ m が完全加法性をみたすと仮定すると，J に対しても「長さ」が定義できて
$$m(J) = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \cdots \frac{\varepsilon}{2^n} + \cdots = 2\varepsilon.$$

これで，$[0,1]$ 内の有理数をすべて含み，長さが 2ε より小さい集合が作れました．ε は任意で，
$$\mathbb{Q}' \subset J$$
ですから，仮に $\mathbb{Q}'$ の長さが定義できるならば，
$$m(\mathbb{Q}') = 0$$
ということになります．

ここで作った集合 J はちょっと不思議ですね。$[0,1]$ 内に稠密に詰まった有理数を全部含むような，可算無限個の互いに素な区間の和集合で，しかも長さはいくらでも小さくできます．不思議ですが，上の議論を見直してみると，インチキはしていないんですね．
この作り方，覚えておくといいですよ．(第 5 章以降で正式に測度を定義しますが，上の議論はそのまま成り立ちます．)

３－３．測度０の集合

これまでは１次元測度と言わずに「長さ」と言ってきましたが，この先ずっと使える「測度０の集合」という概念をここで定義しておきます．今の段階では測度は長さのことだと思ってください．

定義

数直線上の集合 S で次をみたすものを**測度 0 の集合**または**零集合**（れいしゅうごう）という．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，高々可算個の区間列を選んで（互いに素でなくてもよい）

$$(1) \qquad S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon.$$

とできる．

第２講で登場した１点集合と空集合も上の定義によれば確かに零集合です．

レポート１

次のうち少なくとも一つに答えよ．

(1)　$\mathbb{Q}$ が可算集合であることを示せ．ことばで説明すればよい．
(2)　A は $\mathbb{Q}$ の部分集合で無限個の要素をもつとする．このとき A が可算集合であることを示せ．ことばで説明すればよい．
(3)　$\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ が零集合であることを示したが，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ も零集合であることを示せ．
(4)　無理数を無限小数で $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ のようにあらわそう．有理数の稠密性から，有理数の列 $\{q_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ で x に収束するものが存在する．具体的に作れ．