結び目のジョーンズ多項式について（まとめ）

１９９７年度１０月 ～ １２月都民カレッジ

今井　淳

1. 定義

向きの付いた絡み目 L のジョーンズ多項式 $V_L(t)$ は次のルールで定まります。

1. ジョーンズ多項式は絡み目不変量である。即ち、絡み目 L を向きを保って、空間の中で連続的に変形していっても $V_L(t)$ は変わりません。

2. ジョーンズ多項式の満たすべき公理。

(1) 自明な結び目（$\bigcirc$ と記すことにします。）に対しては、

$$\boxed{V_{\bigcirc}(t) = 1}$$

(2) L の図の交点の一つに着目し、そこの部分だけを $+$ 交点に変えたものを L_+、$-$ 交点に変えたものを L_-、交点がなくなるようにつなぎかえたものを L_0 とします。L_+, L_-, L_0 各々のジョーンズ多項式は

$$\text{(J)} \qquad \boxed{t^{-1}V_{L_+}(t) - tV_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}(t)}$$

を満たします。

結び目の図が与えられたら、交点の上下を逆にしたものとつなぎ変えたものの二つを新たに考え、これらを講義中に描いたように、元の結び目の下に並べて描いて、元の結び目の図と斜めの線で繋いでみましょう。もしもその何れか（もしくは両方）が自明な絡み目でなければ、それ（それら）に対して再び同じ操作を繰り返します。（或は、ジョーンズ多項式が既に分かっているような絡み目が出て来たところで止めても構いません。）すると、下に行くに従って二つに枝分かれしていて、それぞれの枝の一番下は自明な絡み目（或は、ジョーンズ多項式が既に分かっているような絡み目）になっているような図が得られます。この図を元々の結び目の分解樹と呼ぶことにしましょう。
各々の枝の一番下の段の絡み目のジョーンズ多項式は分かっていますから、この分解樹に従って、下から順に (J) を用いて帰納的に一つ上の絡み目（結び目）のジョーンズ多項式を求めることが出来ることになります。

上の (J) のようなタイプの式即ち、L_+, L_-, L_0 の不変量の間の関係式をスケイン関係式といいます。ここで紹介したジョーンズ多項式の他にも、こういったスケイン関係式で定義することが出来る結び目（絡み目）不変量が存在します。

2. 性質

ここでジョーンズ多項式が満たす性質を幾つか列挙してみましょう。

(0) まず注意すべきことは、同じ結び目ならば対応するジョーンズ多項式は同じですが、この逆は言えない、ということです。すなわち、$V_{L_1}(t) = V_{L_2}(t)$ だからといって $L_1 \cong L_2$ とは限りません。

(1) 絡み目 L の向きを逆にしたものを $-L$ と書くことにすると

$$\text{(2.1)} \qquad \boxed{V_{-L}(t) = V_L(t)}$$

L の分解樹で各々の枝の一番下が O_k となっているものを考えましょう。$-L$ の分解樹としては、L の分解樹に出て来る絡み目を、全て向きを逆にしたもので置きかえたものをとることが出来ます。自明な結び目（絡み目）の向きを逆にしものは、元々のものと向きを保って同型であることから、$-L$ と L の分解樹の、対応する枝の一番下に登場する絡み目のジョーンズ多項式は相等しくなります。従って、帰納的に $V_{-L}(t) = V_L(t)$ が証明出来ます。

(2) 二つの絡み目 L_1 と L_2 を離して並べて出来る絡み目を $L_1 + L_2$ と書くことにすると

$$\boxed{V_{L_1+L_2}(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_1}(t)V_{L_2}(t)} \tag{2.2}$$

k 個の円周からなる自明な絡み目を O_k と書くことにしましょう。授業で示したように

$$V_{O_k}(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{k-1} \tag{2.3}$$

となります。

次に L_1 の右横に自明な結び目 $\bigcirc$ を離して並べて出来る絡み目 $L_1 + \bigcirc$ を考えましょう。ここで $V_{O_2}(t)$ を計算した時と同じことをします。L_1 の右端の曲線と $\bigcirc$ の左端の曲線に着目します。そしてこの部分をスムージング 0 だと思って、$L_1 + \bigcirc = \tilde{L}_0$ とおきます。これを $+$ 交点と $-$ 交点にかえたもの $\tilde{L}_\pm$ は結局 L_1 になってしまいますから、(J) より

$$V_{L_1+\bigcirc} = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_1}(t)$$

が成立します。同様に、帰納法を用いると

$$V_{L_1+O_k}(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^k V_{L_1}(t) \tag{2.4}$$

となります。

それでは (2.2) の証明に入りましょう。まず L_2 の分解樹を描いてみます。L_2 を筆頭に自明な絡み目迄の系図が出来ます。この分解樹に現れるそれぞれの絡み目の左隣に L_1 の図を並べてみると、$L_1 + L_2$ の分解樹が得られます。各々の枝の一番下にあるものは $L_1 + O_k$ の形をしていて、それらのジョーンズ多項式は (2.4) で分かっているのですから、これで十分な訳です。さて、(2.3) と (2.4) より

$$V_{L_1+O_k}(t) = \{(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_1}(t)\}V_{O_k}(t)$$

となりますから、$L_1 + L_2$ の分解樹の各々の枝の一番下の段の絡み目のジョーンズ多項式は、対応する L_2 の分解樹の場合の $(-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_1}(t)$ 倍になっています。このことから帰納的に (2.2) が示されます。

(3) L_1 と L_2 の連結和を $L_1 \sharp L_2$ とすると

$$V_{L_1+L_2}(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_1\sharp L_2}(t) \tag{2.5}$$

これも先程と同様に、$L_1 + L_2$ のうち L_1 の端の曲線と L_2 の端の曲線に着目し、この部分をスムージング 0 だと思うと、これを $+$ 交点と $-$ 交点にかえたものは共に $L_1 \sharp L_2$ となりますから、(J) より

$$t^{-1}V_{L_1\sharp L_2}(t) - tV_{L_1\sharp L_2}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_1+L_2}(t)$$

となり、(2.5) が従います。更に (2.2) と (2.5) より、

$$\boxed{V_{L_1 \sharp L_2}(t) = V_{L_1}(t) V_{L_2}(t)} \tag{2.6}$$

が分かります。

(4) L の鏡像を L^* とおくと

$$\boxed{V_{L^*}(t) = V_L(t^{-1})} \tag{2.7}$$

L の分解樹で各々の枝の一番下が O_k となっているものを考えましょう。次に、この分解樹に出てくる絡み目を全てその鏡像で置き換えたものを考えてみます。するとそれは L^* の分解樹になっています。L の分解樹 T と L^* の分解樹 T^* の対応する場所にある絡み目のジョーンズ多項式が (2.7) の関係式を満たすことを帰納的に証明していきましょう。T も T^* も各々の枝の一番下は O_k の形をしていますが、

$$\begin{aligned} V_{O_k{}^*}(t) &= V_{O_k}(t) \\ &= (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})^{k-1} \\ &= (-(t^{-1})^{\frac{1}{2}} - (t^{-1})^{-\frac{1}{2}})^{k-1} \\ &= V_{O_k}(t^{-1}) \end{aligned}$$

となるので、一番下では (2.7) が成立しています。次に、下から順にある段まで (2.7) が成立していたとします。一般に

$$(L_+)^* = (L^*)_-, \quad (L_-)^* = (L^*)_+, \quad (L_0)^* = (L^*)_0$$

ですから、T の問題の箇所の上の方の絡み目が L_+ の形をしている場合には、T^* 及び T はそこで各々次の形をしていることになります。

$$\begin{array}{ccc} & (L^*)_- & \\ \swarrow & & \searrow \\ (L^*)_+ & & (L^*)_0 \\ & T^* & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & L_+ & \\ \swarrow & & \searrow \\ L_- & & L_0 \\ & T & \end{array}$$

T の方では

$$t^{-1} V_{L_+}(t) - t V_{L_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{L_0}(t)$$

ですから

$$V_{L_+}(t) = t\{t V_{L_-}(t) + (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{L_0}(t)\}$$

となります。一方 T^* の方では

$$t^{-1} V_{(L^*)_+}(t) - t V_{(L^*)_-}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{(L^*)_0}(t)$$

ですから

$$V_{(L^*)_-}(t) = t^{-1}\{t^{-1} V_{(L^*)_+}(t) + (t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) V_{(L^*)_0}(t)\}$$

となります。帰納法の仮定より

$$V_{(L^*)_+}(t) = V_{L_-}(t^{-1})$$
$$V_{(L^*)_0}(t) = V_{L_0}(t^{-1})$$

となるので、

$$V_{(L^*)_-}(t) = V_{L_+}(t^{-1})$$

となり、(2.7) が一段上でも成立することが分かります。T の上が L_- の形をしていても、全く同様に出来て、これで証明が完了します。

(2.7) は次のように利用出来ます。（普段の授業通り三葉模様に描いた時に、$+$ 交点が三つ現れる方の）三葉結び目 3_1 のジョーンズ多項式は授業でも示した通り、$-t^4 + t^3 + t$ でした。従ってこれの鏡像 ${3_1}^*$ のジョーンズ多項式は $-t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$ となります。従って $3_1 \neq {3_1}^*$ が言えます。一方 8 の字結び目 4_1 のジョーンズ多項式は $t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}$ となります。従ってこれの鏡像 ${4_1}^*$ のジョーンズ多項式は $t^{-2} + t^{-1} + 1 + t + t^2$ となり 4_1 のジョーンズ多項式と一致します。

(0) でも注意したように $V_{4_1}(t) = V_{{4_1}^*}(t)$ となるからといって $4_1 \cong {4_1}^*$ とは限りませんが、少なくともその可能性はある訳ですから、$4_1 \cong {4_1}^*$ かどうか試してみる価値がある、ということになります。

3. 計算例

最後に幾つかの結び目のジョーンズ多項式の計算例を挙げてこのまとめを終えることにしましょう。なお、結び目の番号はこの前コピーをお配りした Rolfsen の本の表から取っています。

$$\begin{aligned}
V_{3_1}(t) &= -t^4 + t^3 + t \\
V_{4_1}(t) &= t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2} \\
V_{5_1}(t) &= -t^7 + t^6 - t^5 + t^4 + t^2 \\
V_{5_2}(t) &= -t^6 + t^5 - t^4 + 2t^3 - t^2 + t \\
V_{6_1}(t) &= t^4 - t^3 + t^2 - 2t + 2 - t^{-1} + t^{-2} \\
V_{6_2}(t) &= t^5 - 2t^4 + 2t^3 - 2t^2 + 2t - 1 + t^{-1} \\
V_{6_3}(t) &= -t^3 + 2t^2 - 2t + 3 - 2t^{-1} + 2t^{-2} - t^{-3}
\end{aligned}$$

付記：そのうちに「数学セミナー」という雑誌の来年の 2 月号だか何かに結び目のジョーンズ多項式についての記事が出ますから、宜しければ参考にして下さい。