量子力学II演習問題［第7回］提出の必要なし

電子（位置 $\boldsymbol{r}_e$、質量 m_e）と陽子（位置 $\boldsymbol{r}_p$、質量 m_p）の2粒子系のハミルトニアンとシュレディンガー方程式は、波動関数を $\Phi(\boldsymbol{r}_e, \boldsymbol{r}_p)$ として

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_e^2}{2m_e} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_p^2}{2m_p} + V(|\hat{\boldsymbol{r}}_e - \hat{\boldsymbol{r}}_p|), \quad \hat{H}\Phi(\boldsymbol{r}_e, \boldsymbol{r}_p) = E\Phi(\boldsymbol{r}_e, \boldsymbol{r}_p)$$

で与えられる。ただしポテンシャルは2粒子の相対距離 $|\boldsymbol{r}_e - \boldsymbol{r}_p|$ のみの関数とする。重心座標 $\boldsymbol{R}$、相対座標 $\boldsymbol{r}$、全質量 M、換算質量 μ は

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_e\boldsymbol{r}_e + m_p\boldsymbol{r}_p}{m_e + m_p}, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_e - \boldsymbol{r}_p, \quad M = m_e + m_p, \quad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p}$$

とする。以下の問いに答えよ。

1. 全運動量 $\boldsymbol{P} = Md\boldsymbol{R}/dt$ と相対運動量 $\boldsymbol{p} = \mu d\boldsymbol{r}/dt$ を $\boldsymbol{p}_e = m_e d\boldsymbol{r}_e/dt$ と $\boldsymbol{p}_p = m_p d\boldsymbol{r}_p/dt$ を用いてあらわせ。

2. 2粒子系のハミルトニアンが重心部分 $\hat{H}_{\rm cm}$ と相対部分 $\hat{H}_{\rm rel}$ の和として

$$\hat{H} = \hat{H}_{\rm cm} + \hat{H}_{\rm rel}, \quad \hat{H}_{\rm cm} = \frac{\hat{\boldsymbol{P}}^2}{2M}, \quad \hat{H}_{\rm rel} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\boldsymbol{r}}|)$$

   と書けることを示せ（$\hat{\boldsymbol{p}}_e$ と $\hat{\boldsymbol{p}}_p$ は交換する）。

3. 波動関数を $\Phi(\boldsymbol{r}_e, \boldsymbol{r}_p) = \Psi(\boldsymbol{R})\psi(\boldsymbol{r})$ と変数分離し、重心運動量が消える（$\hat{\boldsymbol{P}}$ の固有値が $\boldsymbol{0}$ になるように $\Psi(\boldsymbol{R})$ が選ばれている）座標系では相対座標のシュレディンガー方程式が

$$\left[\frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2\mu} + V(|\hat{\boldsymbol{r}}|)\right]\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r})$$

   となることを示せ。

4. 動径方向の波動関数 $R_\ell(r)$ は、光速を c、微細構造定数を α として微分方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rR_\ell(r)] + \left[-\frac{\hbar c\alpha}{r} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right]R_\ell(r) = ER_\ell(r)$$

   に従う。$E = -B$ と束縛エネルギー $B > 0$ を定義し、無次元変数 $\rho = \sqrt{8\mu B/(\hbar^2)}r$ と $\varepsilon = c\alpha\sqrt{\mu/(2B)}$ を使うと、$f_\ell(\rho) = R_\ell(r)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2}{d\rho^2}f_\ell(\rho) + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}f_\ell(\rho) - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}f_\ell(\rho) + \left(\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{1}{4}\right)f_\ell(\rho) = 0 \tag{1}$$

   となることを示せ。

5. $f_\ell(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2}L_\ell(\rho)$ として $df_\ell/d\rho$ を計算せよ。

6. $f_\ell(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2}L_\ell(\rho)$ として $d^2f_\ell/d\rho^2$ を計算せよ。

7. 式 (1) に $f_\ell(\rho) = \rho^\ell e^{-\rho/2}L_\ell(\rho)$ を代入すると、$L_\ell(\rho)$ に対する微分方程式が

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}L_\ell(\rho) + (2\ell + 2 - \rho)\frac{d}{d\rho}L_\ell(\rho) + (\varepsilon - \ell - 1)L_\ell(\rho) = 0$$

   となることを示せ（各項を $\rho^\ell e^{-\rho/2}$ に比例する形でまとめると見通しが良い）。