量子力学II演習問題［第6回］提出の必要なし

質量 μ の粒子に対する三次元中心力ポテンシャル $V(r)$ を考える。ただしポテンシャルは $r \to 0$ で $V(r) \sim r^{-2+\epsilon}(\epsilon > 0)$ と振る舞うとする。波動関数は $\psi_{\ell,m}(\boldsymbol{r}) = R_\ell(r)Y_\ell^m(\theta,\phi)$ と変数分離でき、動径方向の波動関数 $R_\ell(r)$ の満たすべき微分方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\left[rR_\ell(r)\right] + \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right]R_\ell(r) = ER_\ell(r)$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

1. $R_\ell(r) = u_\ell(r)/r$ とすることで得られる $u_\ell(r)$ に対する微分方程式を求めよ。

2. $\ell \neq 0$ の場合に、原点 $r = 0$ 付近では運動項と遠心力ポテンシャルが支配的になる。$u_\ell(r)$ の原点付近の振る舞いを $u_\ell(r) \sim r^s$ として調べ、許される s の値と $u_\ell(r = 0)$ の値を答えよ。

3. 以下、半径 b の無限に高い球対称井戸型ポテンシャルを考える。

$$V(r) = \begin{cases} 0 & (0 \leq r \leq b) \\ \infty & (b < r) \end{cases}$$

   $\ell = 0$ の場合に、井戸の中（$0 \leq r \leq b$）での動径波動関数 $u_0(r)$ の満たすべき微分方程式を求め、一般解（境界条件を与える前の解）を示せ。

4. $r = 0$ での境界条件は $\ell = 0$ の場合でも 2. の解と同じになる。$r = 0$ と $r = b$ で $u_0(r)$ の満たすべき境界条件を示せ。

5. $\sin(z) = 0$ となる z（関数の零点と呼ばれる）を整数 n を用いてあらわし、境界条件から $\ell = 0$ の場合のエネルギー固有値を求めよ。

6. 一般の ℓ の場合に、井戸の中（$0 \leq r \leq b$）の微分方程式を考える。$k^2 = 2\mu E/\hbar^2$、$y_\ell(z) = R_\ell(r)$ として変数を r から $z = kr$ に変数変換し、$y_\ell(z)$ に関する微分方程式を求めよ。

7. 前問の方程式の一般解は球ベッセル関数 $j_\ell(z)$ と球ノイマン関数 $n_\ell(z)$ の線型結合で与えられる。$R_\ell(r)$ の $r = 0$ と $r = b$ での境界条件を示し、$j_\ell(z)$ の零点 $z_{n,\ell}$（$z_{n,\ell}$ の値が小さい零点から順に $n = 1, 2, \cdots$ とラベルする）を用いて一般の固有エネルギー $E_{n,\ell}$ を表せ。

8. $\ell = 0$ の球ベッセル関数 $j_0(z)$ の零点は $z_{n,0} = n\pi$（n は自然数）で与えられる。7. の結果を用いて $\ell = 0$ の固有エネルギーを計算し、5. の結果と一致することを示せ。
