

量子力学II 演習問題 [第5回] 提出の必要なし

直交座標変数 (x, y, z) と極座標変数 (r, θ, ϕ) は

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, & y &= r \sin \theta \sin \phi, & z &= r \cos \theta \\r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \cos \theta &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \tan \phi &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

という関係にある。多変数関数の偏微分の座標変換は

$$\frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f(r, \theta, \phi)}{\partial \phi}$$

のように計算できる。次の問に答えよ。

1. 関数 $f(r, \theta, \phi)$ の y 微分 $\frac{\partial f}{\partial y}$ を極座標変数を用いて表せ。
2. $\frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial y}$ を極座標変数を用いて表せ。
3. 中心力ポテンシャル $V(r)$ 中の質量 μ の粒子に対するシュレディンガー方程式は極座標を用いて、

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi \right\} \right] + V(r)\psi = E\psi$$

で与えられる。波動関数を $\psi(\mathbf{r}) = R(r)Y(\theta, \phi)$ と変数分離して、 $R(r)$ と $Y(\theta, \phi)$ が満たす微分方程式を求めよ。変数分離の際の定数は λ とする。

4. 角度方向の波動関数を $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ と変数分離して、 $\Theta(\theta)$ と $\Phi(\phi)$ が満たす微分方程式を求めよ。変数分離の際の定数は m^2 とする。
5. $\Phi(\phi)$ に関する微分方程式の解のうち、 $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ の固有関数となるものを示せ。
6. 波動関数 $\Phi(\phi)$ が一価となる ($\Phi(2\pi) = \Phi(0)$ となる) ことを利用し、 m の値に対する条件を示せ。
7. ルジャンドル多項式的具体形は

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2 - 1)^\ell$$

で与えられる。 $\ell = 2$ の場合の多項式 $P_2(z)$ を計算せよ。

8. $P_2(z)$ が以下のルジャンドルの微分方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d}{dz} P_\ell(z) \right] + \ell(\ell + 1) P_\ell(z) = 0$$

9. $z = \cos \theta$ と変数変換することで $\int_0^\pi d\theta \sin \theta = \int_{-1}^1 dz$ となることを示せ。