

量子力学II 演習問題 [第3回] 提出の必要なし

調和振動子型ポテンシャルを持つ系のハミルトニアンは、生成消滅演算子 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger を用いて、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

と表される。ここで、生成消滅演算子と数演算子 \hat{n} は

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{m\omega}}\hat{p} \right), \quad \hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

で定義され、交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

を満たす。数演算子 \hat{n} の固有値は非負の整数であることが知られている。数演算子 \hat{n} の固有値 n に対する規格化された固有状態を $|n\rangle$ と表すと、生成消滅演算子の作用は

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \langle \ell | n \rangle = \delta_{\ell n}$$

となる。状態 $|n\rangle$ の座標表示の波動関数 $\phi_n(x)$ と、 $\langle x|$ への演算子の作用は

$$\phi_n(x) = \langle x | n \rangle, \quad \langle x | \hat{x} = x \langle x |, \quad \langle x | \hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \langle x |$$

である。ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

を用いて良い。次の問に答えよ。

1. 数演算子 \hat{n} 、生成消滅演算子 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger の行列要素 $\langle \ell | \hat{n} | n \rangle$ 、 $\langle \ell | \hat{a} | n \rangle$ 、 $\langle \ell | \hat{a}^\dagger | n \rangle$ を計算せよ。
2. ハミルトニアンの行列要素 $\langle \ell | \hat{H} | n \rangle$ の一般形を計算し、 ℓ, n について $0, 1, 2, 3$ までの具体形を4行4列の行列として書け。
3. 座標演算子 \hat{x} と運動量演算子 \hat{p} を生成消滅演算子 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger を用いて表せ。
4. 行列要素 $\langle \ell | \hat{x} | n \rangle$ 、 $\langle \ell | \hat{p} | n \rangle$ の一般形を計算せよ。
5. 状態 $|n\rangle$ に対する \hat{x}^2 の期待値 $\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle$ と \hat{p}^2 の期待値 $\langle n | \hat{p}^2 | n \rangle$ を計算せよ。
6. 状態 $|n\rangle$ に対する不確定性関係 $\Delta x \Delta p$ を計算せよ。ここで、 $\Delta x = \sqrt{\langle n | \hat{x}^2 | n \rangle - \langle n | \hat{x} | n \rangle^2}$ 、 $\Delta p = \sqrt{\langle n | \hat{p}^2 | n \rangle - \langle n | \hat{p} | n \rangle^2}$ である。
7. $\langle x | \hat{a} | 0 \rangle = 0$ から基底状態 ($n = 0$) の波動関数 $\phi_0(x)$ に関する微分方程式を導き、基底状態の波動関数を求め規格化せよ。
8. 座標表示で $\langle 0 | \hat{x}^2 | 0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi_0(x)|^2$ を計算し5.の結果と一致することを示せ。