量子力学 II 演習問題［第 1 回］提出の必要なし

空間 1 次元のシュレディンガー方程式は

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\hat{H}\psi(x,t) \tag{1}$$

で与えられる。演算子 $\hat{O}$ のエルミート共役 $\hat{O}^\dagger$ の定義は

$$\int dx[\psi_a(x,t)]^*\hat{O}\psi_b(x,t)=\int dx[\hat{O}^\dagger\psi_a(x,t)]^*\psi_b(x,t)$$

である。2 成分ベクトル空間の基底ベクトル $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ を

$$|e_1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |e_2\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

と定義する。次の問に答えよ。

1. 位置演算子と運動量演算子の座標表示 $\hat{x}=x$、$\hat{p}=-i\hbar\partial/\partial x$ を用いて演算子の関係式 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$ を示せ。
2. $\psi_a(x,t),\psi_b(x,t)$ がそれぞれ式 (1) を満たすとき、それらの線形結合 $\psi(x,t)=c_a\psi_a(x,t)+c_b\psi_b(x,t)$ も式 (1) を満たすことを示せ。ここで c_a,c_b は任意の複素数とする。
3. 式 (1) のハミルトニアン $\hat{H}$ が時間に依存しない場合に、$\psi(x,t)=\phi(x)T(t)$ を代入して $T(t)$ の解を求め、$\phi(x)$ が従う方程式を導け。
4. 運動量演算子 $\hat{p}$ がエルミートであること、つまり演算子の関係式として $\hat{p}^\dagger=\hat{p}$ を示せ。ただし波動関数は積分の境界で消えるものとする。
5. エルミート演算子 $\hat{Q}$ の固有値 q の固有状態を $\phi_q(x)$ とする。固有値 q が実数であることを示せ。
6. 2 つの演算子 $\hat{A}$、$\hat{B}$ の積のエルミート共役が $(\hat{A}\hat{B})^\dagger=\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$ となることを示せ。
7. 2 成分ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ と 2×2 行列 $\hat{A}$ に対し、エルミート共役の定義 $(\boldsymbol{a},\hat{A}\boldsymbol{b})=(\hat{A}^\dagger\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を用いて $\hat{A}^\dagger$ が $\hat{A}$ の転置複素共役になっていることを示せ。
8. 基底の完全性 $\sum_i|e_i\rangle\langle e_i|=\hat{1}$ を示せ。
9. $\hat{A}$、$\hat{B}$、$\hat{C}$ を演算子とする。以下の関係式を示せ。

$$[\hat{A},\hat{A}]=0,\quad [\hat{A},\hat{B}]=-[\hat{B},\hat{A}],\quad [\hat{A},\hat{B}+\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]+[\hat{A},\hat{C}]$$
$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}],\quad [\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$$
