生成消滅演算子

調和振動子の生成消滅演算子 (50)、(51) に対する一つの考え方。

古典力学の調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

を考える。ここでは x, p は演算子ではないことに注意。質量、長さ、時間を L, M, T のべきで表すと、各物理量の次元は

$$x \sim [L], \quad p \sim [LMT^{-1}], \quad m \sim [M], \quad \omega \sim [T^{-1}], \quad \hbar \sim [L^2MT^{-1}]$$

である。これらの組み合わせで無次元の位置 X、運動量 P を作るには

$$X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x, \quad P = \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}p$$

とすれば良い。ハミルトニアンを無次元変数で書き直し、$\hbar\omega$ をくくり出して形式的に因数分解すれば

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar\omega}{2}\left[\frac{p^2}{\hbar m\omega} + \frac{m\omega}{\hbar}x^2\right] \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}[X^2 + P^2] \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}(X + iP)(X - iP) \\ &= \hbar\omega\left(\frac{X + iP}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X - iP}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

とできる。ここで分解した各項は

$$\begin{aligned} \frac{X + iP}{\sqrt{2}} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar m\omega}}p = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x + i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p\right) \sim a \\ \frac{X - iP}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{m\omega}x - i\sqrt{\frac{1}{m\omega}}p\right) \sim a^\dagger \end{aligned}$$

と生成消滅演算子と同じ形をしている。つまり生成消滅演算子はハミルトニアンから $\hbar\omega$（上記よりエネルギーの次元 $[L^2MT^{-2}]$ を持つ）をくくり出して “因数分解” して得たものと考えることができる。ただし演算子にすると $\hat{x}$ と $\hat{p}$ が交換しないため、ハミルトニアンとの関係に $+1/2$ の項が出ることに注意。

数演算子の固有値が非縮退であること

調和振動子の計算で $\hat{n}(\hat{a}\,|\lambda\rangle) = (\lambda-1)(\hat{a}\,|\lambda\rangle)$ から $\hat{a}\,|\lambda\rangle = N_\lambda\,|\lambda-1\rangle$ とできることの説明。

$\hat{n}(\hat{a}\,|\lambda\rangle) = (\lambda-1)(\hat{a}\,|\lambda\rangle)$ から厳密にいえることは「状態 $(\hat{a}\,|\lambda\rangle)$ の $\hat{n}$ の固有値は $\lambda-1$ である」ということで、これが $|\lambda-1\rangle$（固有値は $\lambda-1$）の定数倍になるためには、数演算子 $\hat{n}$ の**固有値が非縮退（縮退がない）である**という条件が必要である。「固有値が非縮退」の意味は、ある固有値を持った固有ベクトルは定数倍を除いて一意的（ひとつしかない）ということである。非縮退であれば、$(\hat{a}\,|\lambda\rangle)$ と $|\lambda-1\rangle$ は線形従属（比例関係）になるので、$\hat{a}\,|\lambda\rangle = N_\lambda\,|\lambda-1\rangle$ とかけることが従う。

縮退の具体例として、行列 $\hat{A}$ とベクトル $|a\rangle\,,|b\rangle$ を

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad |a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると、

$$\hat{A}\,|a\rangle = 1\,|a\rangle\,, \quad \hat{A}\,|b\rangle = 1\,|b\rangle$$

なので $|a\rangle$ と $|b\rangle$ はどちらも $\hat{A}$ の固有値 1 の固有ベクトルであるが、$|a\rangle$ と $|b\rangle$ は線形独立、つまり $c_1\,|a\rangle + c_2\,|b\rangle = \mathbf{0}$ となるのは $c_1 = c_2 = 0$ しかない。この場合は、同じ固有値 1 を持つ固有ベクトルが 2 つあるので、固有値 1 は縮退しているという。定数 α に対して $|a\rangle \neq \alpha\,|b\rangle$ から明らかなように、縮退がある場合は、固有値が同じでも固有ベクトルが定数倍になるとは限らない。

調和振動子の数演算子の固有値が非縮退であることは、以下の 2 通りの方法で示すことができる。比較的簡単に示すには、

- 1 次元量子力学の束縛状態の波動関数は非縮退

という性質を利用することができる[4]。この性質自体は、例えば国広悌二「量子力学」(東京図書)p.22 などで説明されている。調和振動子の場合、数演算子 $\hat{n}$ とハミルトニアンの固有状態が同じ（§2.5）であり、ハミルトニアンの固有状態は 1 次元量子力学の束縛状態（無限遠で波動関数が 0 になる状態）であるので、上記の性質が使え、$\hat{n}$ の固有状態が非縮退であることがわかる。もっと直接に

- 数演算子 $\hat{n}$ の固有状態は非縮退

も示すことができるが（例えば清水明「新版 量子論の基礎」(サイエンス社)p.178 参照）、導出には状態空間についてのやや高度な知識が必要となる（同書内で解説されている）。

[4] 空間 1 次元以外の場合はこの性質は成り立たない。実際に §3 で扱うように空間 3 次元では角運動量による固有値の縮退が生じる。