8.2　回転変換と群

- 3 次元空間の回転変換

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{172}$$

のとき、ベクトル $\boldsymbol{r}$ の長さは変化しない $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}'|$、より一般に（^{t} は転置）

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{r}_1^t \boldsymbol{r}_2 = (\boldsymbol{r}_1')^t \boldsymbol{r}_2' = (\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_2') \tag{173}$$

⇒ 回転変換はベクトルの**内積を不変**に保つ

- R は内積を保存する 3×3 行列、つまり直交行列（orthogonal matrix）で表される

$$R^t R = I \quad \Leftrightarrow \quad R^t = R^{-1} \tag{174}$$

- 回転変換は**群**（group）という数学的構造に対応する

- 群の定義：積の演算が定義された集合 $G = \{g_1, g_2, \cdots\}$ で以下の性質を満たすもの
（注："積" という用語を使うが、いつでも通常の掛け算とは限らない）
  - 積の演算で閉じる（積の結果が群の要素になる）：$g_1 g_2 \in G$
  - 結合則を満たす：$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$
  - 単位元 e が存在：任意の g に対し $ge = eg = g$
  - 逆元 g^{-1} が存在：$gg^{-1} = g^{-1} g = e$

回転変換の場合は群の積は通常の行列の意味での積と同じ（右から順に回転）
回転変換の単位元は単位行列（$\theta = 0$ の回転）、逆元は $\theta \to -\theta$ とした行列（逆向きの回転）

- 全ての方向・角度の回転変換全体 $\{R\}$ は SO(3) という群を作る

- SO(3) の行列 R は 3 個のパラメーター θ^a と**生成子** T^a で書ける

$$R = \exp\{-i\theta^a T^a\} \quad (a = 1, 2, 3), \tag{175}$$

$$T^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{176}$$

ただし行列の指数関数はベキ展開で定義されている

$$\exp\{X\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \cdots \tag{177}$$

$\theta^a \ll 1$ のとき $R = 1 - i\theta^a T^a$ となるので、生成子は無限小変換の行列を表す

問題 8.2
1) 式 (172) の回転行列 R が直交行列であること、つまり式 (174) を満たすことを確認せよ。
2) 式 (174) を満たす直交行列がベクトルの内積を保存すること、つまり式 (173) を満たすことを確認せよ。
3) 2 つの直交行列の積（例えば $R_1 R_2$）が直交行列であることを確認せよ。
4) 式 (176) の T^3 を使った $\exp\{-i\theta T^3\}$ が式 (172) の行列 R になることを示せ。

- 3 次元回転変換に対する質量 m（スカラー）と位置 $\boldsymbol{r}$（ベクトル）の変換性

$$m \to m, \tag{178}$$

$$\boldsymbol{r} \to R\boldsymbol{r}, \quad r_i \to R_{ij} r_j \tag{179}$$

全てのスカラー量（電荷など）は式 (178) で変換
全てのベクトル量（運動量、電場など）は式 (179) で変換

- 一般の物理量はテンソル $T_{ij\cdots l}$ で表される
n 階 テンソル：

$$T_{\underbrace{ij\cdots l}_{n\text{ 個の添字}}} \to \underbrace{R_{ii'}R_{jj'}\cdots R_{ll'}}_{n\text{ 個の }R\text{ 行列}} T_{i'j'\cdots l'} \tag{180}$$

慣性モーメント、応力などは 2 階テンソル
スカラーは 0 階テンソル、ベクトルは 1 階テンソル

- 群の表現（representation）：対称性変換に対する変換性の分類
  - スカラー、ベクトル、n 階テンソルなど
- 量子系の固有状態は対称性の**既約表現**（irreducible representation）で分類される
- 同じ規約表現に属する状態は対称性変換で移り変われる ⇒ エネルギーが縮退：**多重項**（multiplet）
  - 角運動量 $\ell = 0$：1 重項（スカラー）、$\ell = 1$：3 重項（ベクトル）など
- **表現の合成**：2 つの表現から別の表現を作る
  - ベクトルの内積 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = r_i s_j \delta_{ij}$：2 つのベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ からスカラーを作る
  - ベクトルの外積 $(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s})_k = r_i s_j \epsilon_{ijk}$：2 つのベクトル $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ からベクトルを作る
  - 角運動量の合成：$\ell = 1$ と $\ell = 1$ の合成から $\ell = 0, 1, 2$ ができる

8.3 ユニタリー群

8.3.1 SU(2) 群

- 回転行列 R は実ベクトル $\boldsymbol{r}$（成分が実数）に対する変換
- 2 成分**複素ベクトル**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C} \tag{181}$$

に対し、複素数を成分にもつ 2×2 行列

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \quad U_{ij} \in \mathbb{C} \tag{182}$$

をかけると、新たな 2 成分複素ベクトル $\boldsymbol{a}'$ になる：U は $\boldsymbol{a}$ に対する変換

$$\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{a}' = U\boldsymbol{a} \tag{183}$$

- U が行列式が 1 のユニタリー行列

$$U^\dagger U = I, \quad \det U = 1 \tag{184}$$

の場合（† は転置複素共役）、複素ベクトルの内積が保存

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_1^\dagger \boldsymbol{a}_2 = (\boldsymbol{a}'_1)^\dagger \boldsymbol{a}'_2 = (\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2) \tag{185}$$

つまり式 (184) を満たす U は複素ベクトルの “回転”

- 行列式が 1 の 2×2 ユニタリー行列全体 $\{U\}$ は SU(2) という群を作る

- SU(2) の行列 U は 3 個のパラメーター θ^a と**生成子** T^a で書ける

$$U = \exp\{-i\theta^a T^a\} \quad (a = 1, 2, 3) \tag{186}$$

T^a はパウリ行列 σ^a（トレースが 0 の 2×2 エルミート行列）で書ける

$$(T^a)_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma^a)_{ij} \quad (a = 1, 2, 3, \quad i, j = 1, 2), \tag{187}$$

$$T^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{188}$$

T^3 のみ対角的

- SU(2) はクォーク、ハドロンのスピンおよびアイソスピンを表現する際に用いられる
T^3 はスピンの第 3 成分を測る演算子、$\boldsymbol{T}^2$ はスピンの大きさを測る演算子、など

問題 8.3
1) 式 (184) を満たす行列 U がベクトルの内積を保存すること、つまり式 (185) を満たすことを確認せよ。
2) 2 つのユニタリー行列の積（例えば U_1U_2）がユニタリー行列であることを確認せよ。
3) 2 つの行列式が 1 の行列の積（例えば U_1U_2）の行列式が 1 であることを確認せよ。
4) 行列 U_0 を実数 $\theta \neq n\pi$（n は整数）を用いて

$$U_0 = e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{189}$$

と定義するとき、U_0 はユニタリー行列であるが行列式が 1 でないことを示せ。

8.3.2 SU(3) 群

- 3 成分複素ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C} \tag{190}$$

に対し、複素数を成分にもつ 3×3 行列

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix}, \quad U_{ij} \in \mathbb{C} \tag{191}$$

をかけると、新たな 3 成分複素ベクトル $\boldsymbol{a}'$ になる：U は $\boldsymbol{a}$ に対する変換

- 式 (184) を満たす 3×3 ユニタリー行列 U は複素ベクトルの内積を保存："回転"
- 行列式が 1 の 3×3 ユニタリー行列全体 $\{U\}$ は SU(3) という群を作る
- SU(3) の行列 U は 8 個のパラメーター θ^a と**生成子** T^a で書ける

  $$U = \exp\{-i\theta^a T^a\} \quad (a = 1, \cdots, 8) \tag{192}$$

  T^a は**ゲルマン行列** λ^a（トレースが 0 の 3×3 エルミート行列）で書ける

  $$(T^a)_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda^a)_{ij} \quad (a = 1, \cdots, 8, \quad i, j = 1, 2, 3), \tag{193}$$

  $$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
  $$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{194}$$

  T^3 と T^8 のみ対角的

- SU(3) はクォークのカラーやフレーバーを表現する際に用いられる

8.3.3 SU(2) の表現と合成

- SU(2) の表現：スピン（アイソスピン）の大きさ S または多重度で多重項を分類
  - $\{S = 0(1\text{ 重項}), S = 1/2(2\text{ 重項}), S = 1(3\text{ 重項}), \cdots\}$
  - 群論の記法では $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots\}$
  - $\mathbf{2}$ 表現（$S = 1/2$）：**基本表現**（式 (184) を満たす 2×2 行列 U で変換される）
  - $\mathbf{1}$ 表現（$S = 0$）：**恒等表現**（スカラーのように変化しないもの）
  - $\mathbf{3}$ 表現（$S = 1$）：**随伴表現**
- 多重項内の状態の指定：スピンの第 3 成分 S_3
  $|S, S_3\rangle$ のように表現すると、$S = 1/2$ 状態は

  $$|\uparrow\rangle = |1/2, 1/2\rangle, \quad |\downarrow\rangle = |1/2, -1/2\rangle \tag{195}$$

  SU(2) 変換（スピン空間の回転）を行うことで $|\uparrow\rangle$ は $|\downarrow\rangle$ に変換できる

- **ウェイト図**：S_3 の値の数直線上に表したもの（図 24 左：スピン 1/2、図 24 右：アイソスピン 1/2）
- SU(2) の表現 2 つの合成：$S = 1/2$ を 2 つ合成して $S = 0$ と $S = 1$ ができる（3.1.2 節）

  $$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \quad (\text{SU(2) の場合}) \tag{196}$$

  表現の直積の既約分解と呼ばれる
  左辺：2 つの 2 重項を組み合わせる
  右辺：1 重項と 3 重項が得られる
  基本表現と基本表現の積から恒等表現と随伴表現ができる
  群の表現を通常の数、左辺が掛け算、右辺を足し算とみなせば、通常の計算法則が成り立っている

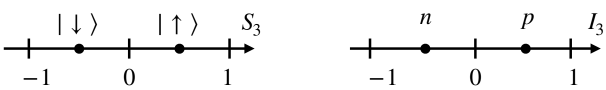

図 24: SU(2) の規約表現のウェイト図の例。左：スピン $S = 1/2$ の 2 重項、右：アイソスピン $I = 1/2$ の 2 重項。

問題 8.4*
1) 以下 SU(2) の表現の合成を考える。$\mathbf{1} \otimes \mathbf{2}$ を計算せよ（$S = 0$ と $S = 1/2$ の合成）。
2) $\mathbf{3} \otimes \mathbf{2}$ を計算せよ（$S = 1$ と $S = 1/2$ の合成）。
3) $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$ を計算せよ（3 つの $S = 1/2$ の合成）。

8.3.4 SU(3) の表現と合成

- SU(3) の表現：多重度で分類
  - $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{6}, \bar{\mathbf{6}}, \mathbf{8}, \cdots\}$
  - $\mathbf{3}$ 表現：**基本表現**（式 (184) を満たす 3×3 行列 U で変換される）
  - $\bar{\mathbf{3}}$ 表現：共役表現（$U^\dagger$ で変換される）
  - $\mathbf{1}$ 表現：**恒等表現**（スカラーのように変化しないもの）
  - $\mathbf{8}$ 表現：**随伴表現**
- 群の階数（rank）：同次対角化可能な生成子の数
  SU(2) の場合は式 (188) より階数 1（T^3 のみ対角的）
  SU(3) の場合は式 (194) より階数 2（T^3 と T^8 のみ対角的）
- 階数の数だけ物理量が同時に指定できる：ウェイト図の次元（軸の数）に対応
  アイソスピン SU(2) の場合は I_3 軸 1 つ（図 24 右）
  フレーバー SU(3) の場合は I_3 とハイパーチャージ Y の軸 2 つ（図 25）
- SU(3) 多重項内の状態の指定：I_3 とハイパーチャージ Y（図 25）
  $|\boldsymbol{R}, I_3, Y\rangle$ のように表現すると、$\mathbf{3}$ 表現は

$$|u\rangle = |\mathbf{3}, 1/2, 1/3\rangle\,, \quad |d\rangle = |\mathbf{3}, -1/2, 1/3\rangle\,, \quad |s\rangle = |\mathbf{3}, 0, -2/3\rangle \tag{197}$$

  $\bar{\mathbf{3}}$ 表現は

$$|\bar{u}\rangle = |\bar{\mathbf{3}}, -1/2, -1/3\rangle\,, \quad |\bar{d}\rangle = -\,|\bar{\mathbf{3}}, 1/2, -1/3\rangle\,, \quad |\bar{s}\rangle = |\bar{\mathbf{3}}, 0, 2/3\rangle \tag{198}$$

  ($|\bar{d}\rangle$ に負符号がつくのは SU(2) の基本表現の共役から $\bar{d}$ と $\bar{u}$ でアイソスピン 2 重項を作るためである。また、$\bar{u}$ に符号をつける定義もあることに注意)
- $\mathbf{3}$ と $\bar{\mathbf{3}}$ は異なるウェイト図（異なる I_3, Y の組み合わせ）：異なる表現
  SU(2) の場合のみ特殊で、共役表現が基本表現と一致する
- SU(2) の $\mathbf{3}$（スピン 1）と SU(3) の $\mathbf{3}$（3 重項）は異なる表現

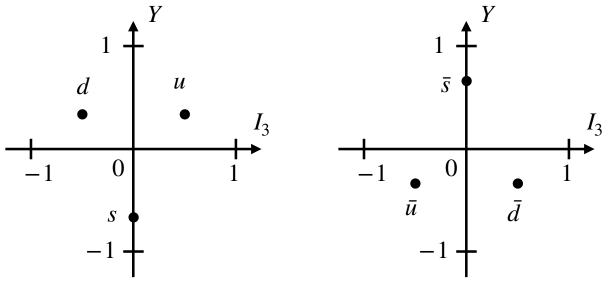

図 25: フレーバー SU(3) の規約表現のウェイト図の例。左：$\mathbf{3}$ 表現のクォーク、右：$\bar{\mathbf{3}}$ 表現の反クォーク。

- SU(3) の表現 2 つの合成

$$\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8} \tag{199}$$

基本表現と共役表現の積から恒等表現と随伴表現ができる

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\bar{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6} \tag{200}$$

$\mathbf{3}$ と $\bar{\mathbf{3}}$ が別の表現であるため、結果が式 (199) と異なる

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=(\bar{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6})\otimes\mathbf{3}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{10} \tag{201}$$

クォークからバリオンを作る際に使う

$$\mathbf{8}\otimes\mathbf{8}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{8}\oplus\mathbf{10}\oplus\overline{\mathbf{10}}\oplus\mathbf{27} \tag{202}$$

- 一般の表現の合成はヤング図を用いて計算できる

$$\mathbf{3}=\ydiagram{1}\quad,\quad\bar{\mathbf{3}}=\ydiagram{1,1}\quad,\quad\mathbf{1}=\ydiagram{1,1,1}\quad,$$

$$\mathbf{3}\otimes\bar{\mathbf{3}}=\ydiagram{1}\otimes\ydiagram{1,1}=\ydiagram{1,1,1}\oplus\ydiagram{2,1}=\mathbf{1}\oplus\mathbf{8},$$

$$\mathbf{3}\otimes\mathbf{3}=\ydiagram{1}\otimes\ydiagram{1}=\ydiagram{1,1}\oplus\ydiagram{2}=\bar{\mathbf{3}}\oplus\mathbf{6}$$