

図 18: 左：ガモフ理論の設定の模式図。右：娘核による α 粒子の感じるポテンシャル。

5.4.1 ガモフ理論

- 設定：親核＝娘核の中に Q 値のエネルギーを持った α が存在している状態（図 18 左）
- 方針：WKB 近似でトンネル効果による崩壊確率を計算
- α 粒子と娘核との相互作用ポテンシャル
 α 粒子は電荷 $+2 \Rightarrow$ 娘核と電磁相互作用（遠方でクーロン斥力）
 α 粒子は核子で出来ている \Rightarrow 娘核と強い相互作用（短距離では引力）
- 簡単なポテンシャル（軌道角運動量は $l = 0$ の状態、図 18 右）

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 \leq r \leq R \\ +\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & R < r \end{cases} \quad (124)$$

r は娘核の重心から測った α の距離、 R は娘核の半径、 $Z' = Z - 2$ は娘核の電荷、 2 は α の電荷

- 核外のクーロン斥力のために**ポテンシャル障壁**が現れる
- α のエネルギーは Q 値で与えられ、正：

$$E = Q > 0 \quad (125)$$

- クーロン障壁の高さ（結合エネルギーの B ではない）

$$B = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (126)$$

ウランなど重い核では (Z 、 Z' が大きいので) $\mathcal{O}(10^1)$ MeV になる

$Q < B$ ならば古典的には崩壊できない

問題 5.3*

ウランの崩壊を想定し、 $R = 7.0$ fm とする。式 (126) を用いクーロン障壁の高さ B を MeV 単位で求めよ。ただし $\hbar c = 197$ MeV fm で、微細構造定数は自然単位系で $e^2/(4\pi\epsilon_0) = \alpha = 1/137$ とする。

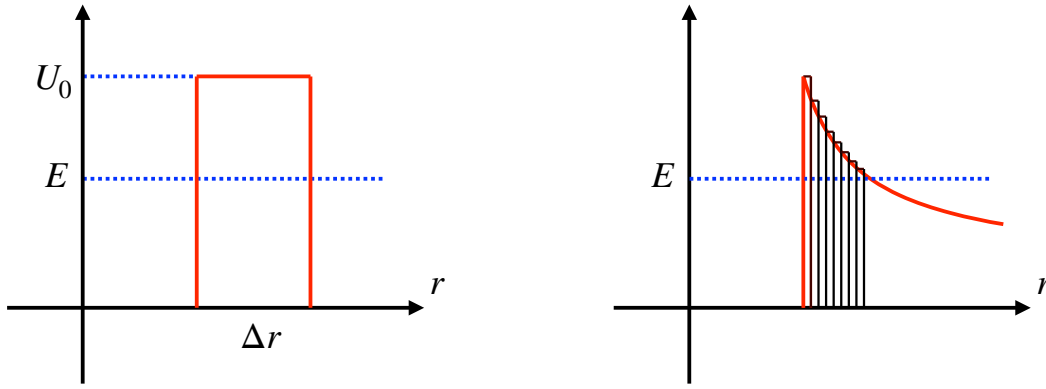


図 19: 左：高さ U_0 、幅 Δr の障壁の透過確率。右：高さが変化する壁の透過確率。

- 外側の古典的回帰点 R' ：クーロン力と運動エネルギーがつりあう点

$$Q = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R'} \Rightarrow \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0} = QR' \quad (127)$$

- 質量 m 、エネルギー E の粒子が高さ $U_0 > E$ 、幅 Δr の壁を透過する確率（トンネル効果、図 19 左）

$$T \sim \exp\{-2\kappa\Delta r\}, \quad \kappa = \sqrt{2m(U_0 - E)} \quad (128)$$

- WKB（半古典）近似によるクーロン障壁の透過確率～壁の高さの変化を積分（図 19 右）

$$w = \exp\{-2G\}, \quad (129)$$

$$G = \int_R^{R'} \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - Q \right)} dr \quad (130)$$

w は 1 回のトンネル効果で崩壊が起こる確率

G ：ガモフ因子

- $R \ll R'$ の場合は

$$G \simeq \sqrt{2m_\alpha BR} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{Q}} - 2 \right) \quad (131)$$

問題 5.4

1) 式 (130) に式 (127) を代入し、 $r = R' \cos^2 \theta$ において積分変数を r から θ に変更して積分を実行すると

$$G = \sqrt{2m_\alpha QR'} \left(\arccos \sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} \right)$$

となることを示せ。ここで $x = R/R'$ とする。

2) $x \ll 1$ の場合に

$$\arccos \sqrt{x} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{x} + \mathcal{O}(x^{3/2})$$

を用いて $\mathcal{O}(x^{3/2})$ を無視する近似で式 (131) を示せ。

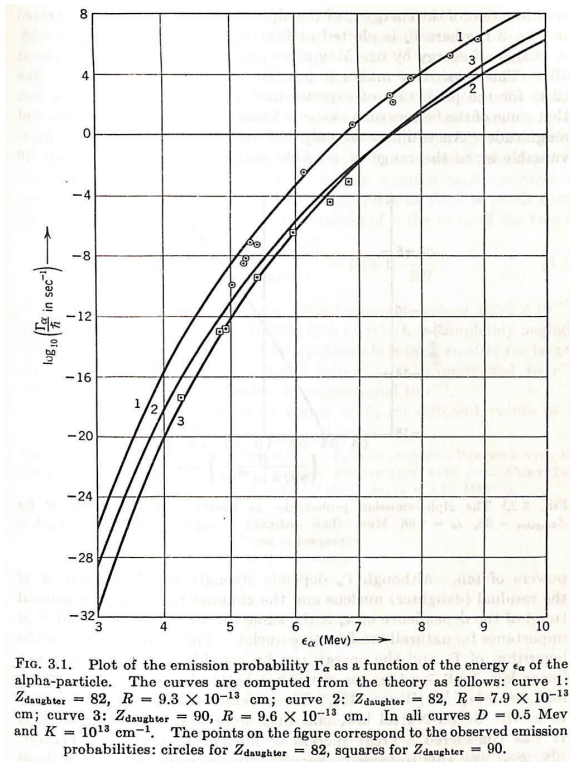


FIG. 3.1. Plot of the emission probability Γ_α as a function of the energy ϵ_α of the alpha-particle. The curves are computed from the theory as follows: curve 1: $Z_{\text{daughter}} = 82$, $R = 9.3 \times 10^{-13}$ cm; curve 2: $Z_{\text{daughter}} = 82$, $R = 7.9 \times 10^{-13}$ cm; curve 3: $Z_{\text{daughter}} = 90$, $R = 9.6 \times 10^{-13}$ cm. In all curves $D = 0.5$ Mev and $K = 10^{13}$ cm $^{-1}$. The points on the figure correspond to the observed emission probabilities: circles for $Z_{\text{daughter}} = 82$, squares for $Z_{\text{daughter}} = 90$.

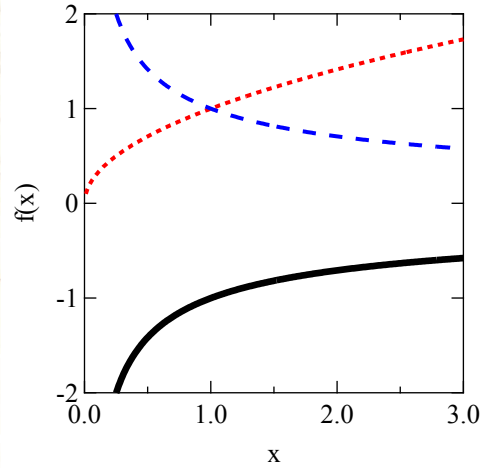


図 20: (左) 原子核の崩壊定数 $\log \lambda = \log \Gamma/\hbar$ と α のエネルギー $Q = \epsilon_\alpha$ の関係。John M. Blatt and Victor F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (John Wiley and Sons), p.575 図 3.1 から引用。(右) 関数 $f(x) = x^{1/2}$ (点線)、 $f(x) = x^{-1/2}$ (破線)、 $f(x) = -x^{-1/2}$ (実線) のプロット。

5.4.2 崩壊定数

- ガイガー・ヌッタルの法則：経験的な崩壊定数 λ の対数の Q 依存性 (a, b は定数、図 20)

$$\ln \lambda \propto a - bQ^{-1/2} \quad (132)$$

- Q 値の微小な変化が崩壊定数 λ や寿命 $\tau = 1/\lambda$ に指数関数的に反映される
⇒ 秒より短い寿命や数億年という寿命を持つ核種が存在する
- ガモフ理論で計算する崩壊定数 λ ：単位時間当たりに起きる崩壊の数

$$\lambda = Nw \quad (133)$$

w ： α 粒子がトンネル障壁を透過する確率 (129)

N ：単位時間当たりに α 粒子がトンネル効果を試行する回数

- v_0 ：娘核内の α 粒子の平均速度
サイズ R の領域の中で単位時間当たりに壁にぶつかる回数 $N \simeq v_0/R$

$$\lambda = \frac{v_0}{R} \exp(-2G), \quad (134)$$

$$\ln \lambda = \ln \left(\frac{v_0}{R} \right) - 2\sqrt{2m_\alpha BR} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B}{Q}} - 2 \right) \quad (135)$$

これはガイガー・ヌッタルの法則 (132) を説明する

問題 5.5

- 1) ウランの崩壊を想定し、 $R = 7.0 \text{ fm}$ 、 $B = 37 \text{ MeV}$ 、 $Q = 5.0 \text{ MeV}$ 、 $m_\alpha = 4000 \text{ MeV}$ とする。式 (131) を用い透過確率 w を計算せよ。ただし $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$ とする。
 - 2) 運動エネルギー K とポテンシャルエネルギーの和が全エネルギーであるので $K - V_0 = Q$ である。核内のポテンシャルの深さを $V_0 = 40 \text{ MeV}$ とし、古典的な関係式 $K = m_\alpha v_0^2/2$ を用いて 1 秒あたりの試行回数 N を求めよ。ただし光速は $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ とする。
 - 3) ガモフ理論による平均寿命 τ を求めよ。
-

5.5 β 崩壊

- 弱い相互作用によって起こる崩壊
- β 崩壊の分類



電子捕獲は原子軌道にいる電子が原子核に捕まって起こる反応
質量数の大きい原子核（原子核のサイズが大きく電子軌道の半径が小さい）で起こりやすい

- 素過程



真空中で起こるのは β^- 崩壊のみ

- ニュートリノ ν_e : β 崩壊の際に放出されるレプトン
電荷 0、スピン 1/2、質量はほぼ 0（ニュートリノ振動により有限であることは知られている）
弱い相互作用しかしない
 - パリティ非保存：弱い相互作用ではパリティ（空間反転対称性）は破れている
実験（1956 年）：スピン偏極した ^{60}Co の崩壊で出る放射線の非対称性
-

問題 5.6

陽子の質量を $m_p = 938.272 \text{ MeV}$ 、中性子の質量を $m_n = 939.565 \text{ MeV}$ 、電子および陽電子の質量を $m_e = 511 \text{ keV}$ 、ニュートリノおよび反ニュートリノの質量を $m_\nu = 0 \text{ keV}$ とする。以下の問いに答えよ。

- 1) β 崩壊の素過程の Q 値を計算し、真空中では β^- 崩壊しか起きないことを説明せよ。
 - 2) (A, Z) の原子核に対する β 崩壊の Q 値を計算する。親核、娘核の質量を式 (9) を用いて結合エネルギー $B(A, Z)$ と核子質量を用いて表し、原子核中で β^+ 崩壊、電子捕獲が起こる条件を示せ。
 - 3) 重陽子の結合エネルギーを $B(2, 1) = 2.225 \text{ MeV}$ として、重陽子は β^- 崩壊しないことを示せ。
-

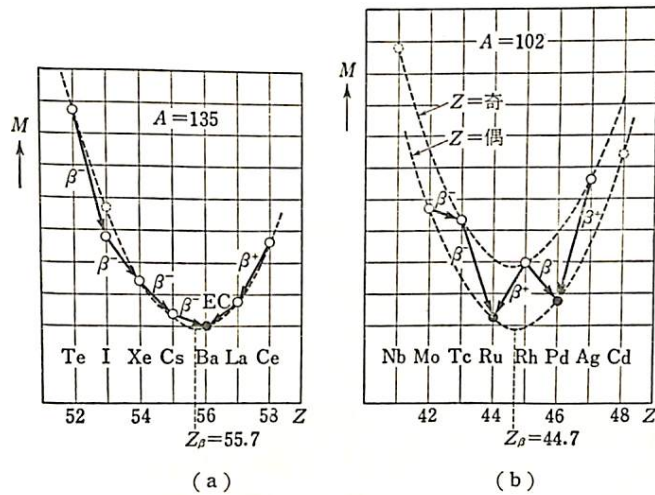


図 101 同重核の質量放物線 (縦軸の 1 目盛は約 0.001 u = 0.931 MeV. (a) で ^{135}I ($N=82$) のみずれていることに注意. EC は電子捕獲)

図 21: 質量公式による同重核の質量と β 崩壊の安定性。(a): 質量数が奇数 ($A = 135$)。 (b): 質量数が偶数 ($A = 102$)。八木浩輔 著「原子核物理学」(朝倉書店) p.161 図 101 から引用。

- β 崩壊は質量数 A を変えないので、同重核の間の遷移
- 原子核の質量公式の Z 依存性は

$$M(A, Z) = (Z \text{ 非依存}) + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_A \frac{(A/2 - Z)^2}{A} - \delta(A, Z) \quad (142)$$

$\delta(A, Z)$ を無視すると、 A を固定した時 Z の二次関数つまり放物線 (質量放物線) 極小値は式 (39) で求めた値で

$$Z_\beta = \frac{A}{2 + \frac{2a_C}{a_A} A^{2/3}} \quad (143)$$

- 放物線から結合エネルギーの差が得られ、電子質量と合わせて Q 値が正になれば崩壊が起こる。
- A が奇数のとき：
 N または Z どちらかが奇数になるので β 崩壊しても $\delta(A, Z) = 0$
 極小値の近くの 1 つの核に最終的に崩壊 (図 21(a) では ^{135}Ba)
- A が偶数のとき：
 $(N, Z) = (\text{偶}, \text{偶})$ と $(\text{奇}, \text{奇})$ の場合がありえて、 $(\text{偶}, \text{偶})$ が $\delta(A, Z)$ でエネルギーが下がる
 質量放物線は $(\text{偶}, \text{偶})$ と $(\text{奇}, \text{奇})$ の場合に分かれ、 β 崩壊で 2 つを行き来する
 最終的に崩壊する核が 2 つ存在する場合がある (図 21(b) では ^{102}Ru と ^{102}Pd)
- ^{102}Ru は ^{102}Pd よりエネルギーが低い: 二重ベータ崩壊

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_e, \quad (144)$$

$$(A, Z) \rightarrow (A, Z - 2) + e^+ + e^+ + \nu_e + \nu_e \quad (145)$$

によつてのみ崩壊できる (現実には二重 β^+ 崩壊は観測されていない)

6 原子核パートのまとめ

- 原子核：陽子と中性子からなる自己束縛系、数千種類が存在
- 核子当たりの結合エネルギーは約 8 MeV でほぼ一定（結合エネルギーの飽和性）
- 原子核の密度は 0.17 fm^{-3} でほぼ一定（密度の飽和性）
- 核力：短距離力で、引力成分と斥力芯を持つ
- 構造：殻模型と強いスピン軌道力で魔法数（2, 8, 20, 28, 50, 82, 126）が出る
- 崩壊：量子力学的な遷移で核種が変化
- その他の話題
 - 集団運動、変形
 - 原子核反応
 - 元素合成（初期宇宙、恒星内核融合、超新星爆発）
 - 中性子星（核物質の状態方程式、磁場、中性子超流動、重力波）
 - 不安定核、超重核
 - ...