

#### 4.2.4 精密化と最近の発展

- **対相関**：同じ準位に属する同種の核子対は合成角運動量を  $j = 0$  に組むと安定（残留相互作用）質量公式の対エネルギー項の起源（ $Z, N$  が偶数だと安定）
- 閉殻（全ての核子が詰まった準位）では全ての核子が  $j = 0$  ペアを組んでいる
- オープン殻（閉殻でない準位）では対相関の影響で安定な配位が決定される  
フェルミ面近傍の粒子間の引力相互作用：電子の超伝導の BCS 理論で記述される  
基底状態は異なる配位の重ね合わせになる（配位混合）
- 精密化された殻模型は現在でも原子核構造研究で使われている（大規模数値計算）
- 中性子過剰核（ $N$  が  $Z$  より多い不安定核）では、魔法数の変化が議論されている
- 原子核の周期表も 2020 年に提案されている（図 16）

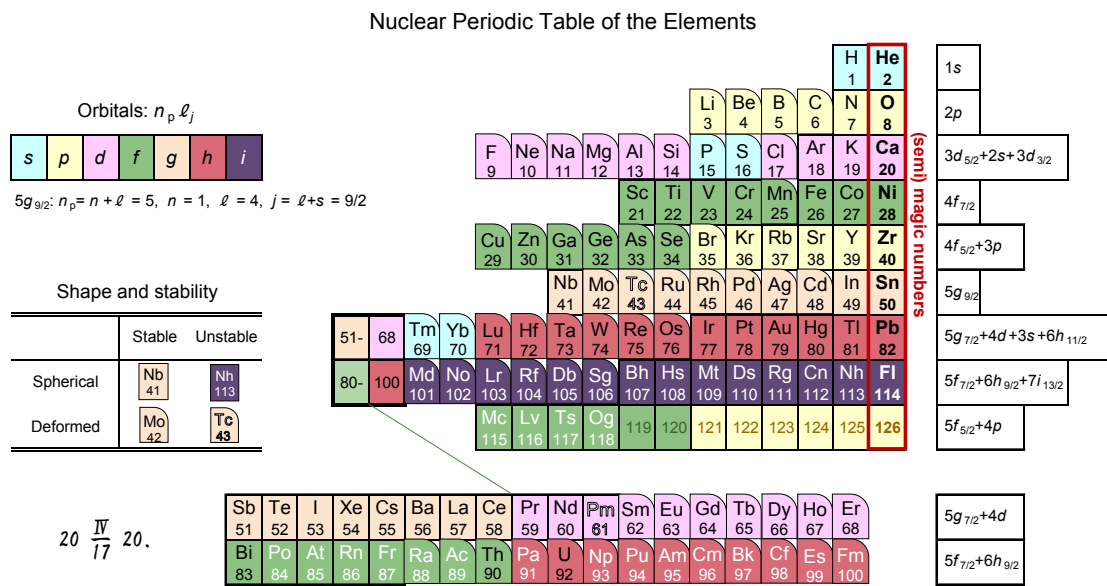


図 16: 原子核の周期表。http://ss.scphys.kyoto-u.ac.jp/elementouch/index.html から引用。原論文は K. Hagino and Y. Maeno, Found. Chem. 22, 267 (2020)。

#### 4.3 独立粒子描像の妥当性

- 真空中の 2 核子系のシュレディンガー方程式

$$\left[ -\frac{\nabla_1^2}{2M_N} - \frac{\nabla_2^2}{2M_N} + V_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (107)$$

$V_{12}(\mathbf{r})$  は 3 節で議論した核力、1 fm 程度の距離での引力と 0.5 fm 以下での強い斥力芯

- 原子核中の 2 核子の相互作用
  - 注目している 2 核子以外の核子との相互作用（核力）は平均一体ポテンシャルになると仮定
  - 核力  $V_{12}$  を作用させると 2 核子の状態（運動量など）が変化する
  - パウリ原理により、他の核子が占有している状態には遷移できない：**Pauli blocking**

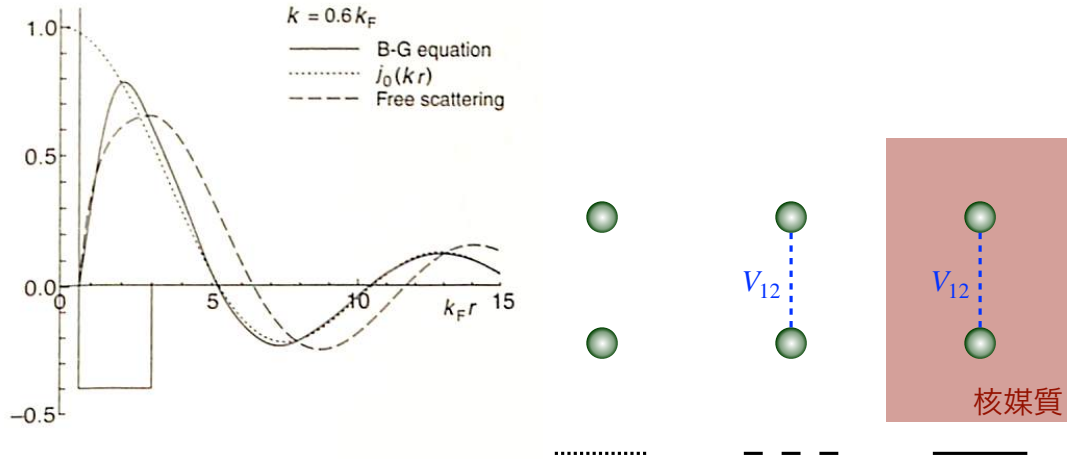


図 17: 左: 2 核子の相対波動関数 ( $\ell = 0$ )。高田健次郎、池田清美 著「原子核構造論」(朝倉書店) p.87 図 2.17 から引用。右: 相互作用なし (点線)、真空中の核子散乱 (破線)、核媒質中の核子散乱 (実線) の模式図。

- **Bethe-Goldstone 方程式**: 原子核中の 2 核子の波動関数を記述

$$\left[ -\frac{\nabla_1^2}{2M_N} - \frac{\nabla_2^2}{2M_N} + U_1 + U_2 + QV_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (108)$$

- $U_i$ : 1,2 以外の核子からの核力による平均ポテンシャル
- $Q$ : Pauli blocking を表す演算子、 $\mathbf{k}$  を核子 1,2 の相対運動量として

$$Q = \sum_{|\mathbf{k}| > k_F} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| \quad (109)$$

意味: フェルミ運動量より大きな運動量を持つ状態に遷移する場合にのみ核力がはたらく

- $QV_{12} = 0$  であれば  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  は 1 粒子波動関数の積でかける

- 式 (107)、(108) は重心座標  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  と相対座標  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  に変数分離可能
- 簡単な核力の模型: 半径  $r_c = 0.62/k_F$  の斥力芯、半径  $r_a = 3.0/k_F$  の引力井戸型ポテンシャル (図 17 左):  $k_F = 1.27 \text{ fm}^{-1}$  として  $k = 0.6k_F$  (正エネルギー) の場合の  $\ell = 0$  散乱状態の波動関数
  - 点線: 相互作用のない 2 核子の波動関数 (式 (107) で  $V_{12} = 0$  とした場合の解、図 17 右)
  - 破線: 真空中での 2 核子散乱の波動関数 (式 (107) の解)
  - 実線: 原子核中の 2 核子散乱の波動関数 (式 (108) の解)
- 点線  $\rightarrow$  破線: 核力  $V_{12}$  の効果 (強い核力)
- 破線  $\rightarrow$  実線: 原子核媒質の影響 ( $U_i$  と Pauli blocking)
- 平均核子間距離 ( $k_F r \sim 5$ ) では実線 (原子核中の核力) が点線 (相互作用なし) とほぼ一致
- 波動関数が相互作用無しの結果にほぼ一致する距離を **回復距離** (healing distance) と呼ぶ
- 原子核中の 2 核子はあたかも相互作用していないように振る舞う (核力+核媒質の影響)
  - $\Rightarrow$  独立粒子描像の理論的根拠

## 5 原子核の崩壊

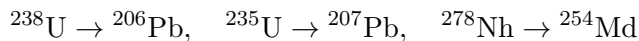
### 5.1 崩壊の種類と放射線

- 観測されている核種のほとんどは不安定核：様々な崩壊過程で安定核に遷移する  
(存在比は安定核が圧倒的に多い)
- 崩壊時に放射線 ( $\alpha$  線、 $\beta$  線、 $\gamma$  線) が放出される  
他に自発核分裂などの崩壊も存在
- **$\alpha$  崩壊**： $\alpha$  線 ( ${}^4\text{He}$  原子核) を放出し  $A$  が 4、 $Z$  が 2 少ない核種に遷移  
 $\alpha$  線は透過力小 (紙 1 枚で遮蔽)
- **$\beta$  崩壊**： $\beta$  線 (電子、陽電子) を放出し  $A$  は変わらず  $Z$  が 1 異なる核種に遷移 (弱い相互作用)  
 $\beta^-$  崩壊：電子  $e^-$  を放出し  $Z$  が 1 増える  
 $\beta^+$  崩壊：陽電子  $e^+$  を放出し  $Z$  が 1 減る  
 $\beta$  線は透過力中 (薄いアルミニウムで遮蔽)
- $\gamma$  崩壊：準安定な励起状態が  $\gamma$  線 (光子) を放出し低い準位に遷移、核種は変化しない (電磁相互作用)  
 $\gamma$  線は透過力大 (厚い鉛で遮蔽)  
原子中の電子の X 線放出と同じ機構  
原子の準位間隔  $\sim \text{eV}$  に対し原子核の準位間隔  $\sim \text{keV}$  が大きいので高いエネルギーの光子が放出される  
 $\alpha$  崩壊、 $\beta$  崩壊などで励起状態の原子核が生成された場合、続けて  $\gamma$  崩壊が起きる
- **親核** (parent nucleus)：崩壊前の核種
- **娘核** (daughter nucleus)：崩壊後の核種

---

#### 問題 5.1\*

不安定核  ${}^{238}\text{U}$ 、 ${}^{235}\text{U}$ 、 ${}^{278}\text{Nh}$  は  $\alpha$  崩壊または  $\beta^-$  崩壊を繰り返し最終的に



と遷移する。それぞれの崩壊で、 $\alpha$  崩壊および  $\beta^-$  崩壊が何回ずつ起こるか計算せよ。

---

### 5.2 崩壊率と年代測定

- 全ての崩壊過程は量子力学的 (確率的) に起こる
- 時刻  $t$  に親核が  $N$  個あるとき、微小時間  $dt$  中の崩壊での個数の変化  $dN$  は

$$dN = -\lambda N(t)dt \tag{110}$$

**崩壊定数**  $\lambda$ ：単位時間あたりに 1 つの原子核が崩壊を起こす確率  
式 (110) を積分すると

$$N(t) = N(0) \exp\{-\lambda t\} \tag{111}$$

親核の個数は指数関数的に減少する

- **平均寿命** (mean life)  $\tau$ : 崩壊までの平均時間

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} \exp\{-\lambda t\} dt \quad (112)$$

親核の個数が 1 個の場合 ( $N(0) = 1$ ) の場合、 $N(t) = \exp\{-\lambda t\}$  は時刻  $t$  での存在確率

- **半減期** (half-life)  $T_{1/2}$ : 親核の個数が  $N(0)/2$  になる時間

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow T_{1/2} = \tau \ln 2 \sim 0.693\tau \quad (113)$$

核種によって秒より短いものや、数億年のものなど、幅広いスケールが存在する

- **崩壊幅** (decay width)

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \hbar\lambda \quad (114)$$

- 不安定状態は複素エネルギーを持つ固有状態：ガモフ、1928 年

$$E = E_0 - \frac{i}{2}\Gamma, \quad E_0 > 0, \quad \Gamma > 0 \quad (115)$$

波動関数の時間発展

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \exp\left\{-i\frac{E}{\hbar}t\right\} \phi_E(\mathbf{r}) = \underbrace{\exp\left\{-i\frac{E_0}{\hbar}t\right\}}_{\text{振動}} \underbrace{\exp\left\{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t\right\}}_{\text{減衰}} \phi_E(\mathbf{r}) \quad (116)$$

存在確率は式 (111) に従う

$$|\Psi(t, \mathbf{r})|^2 \propto \exp\left\{-\frac{\Gamma}{\hbar}t\right\} = \exp\{-\lambda t\} \quad (117)$$

- 寿命や崩壊定数が既知であれば、放射性同位体の含有率から物質の年代が調べられる
- $^{14}\text{C}$  年代測定 (植物および動物)
  - $^{14}\text{C}$  の半減期は約 5730 年
  - $\beta$  崩壊によって  $^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$  と崩壊
  - 宇宙線で作られた中性子と大気中の窒素が反応し  $n + ^{14}\text{N} \rightarrow p + ^{14}\text{C}$  で生成される
  - 崩壊と生成が平衡して大気中の  $^{14}\text{C}$  濃度 ( $^{12}\text{C}$  に対する  $^{14}\text{C}$  の割合) は一定
  - 化学反応は  $^{14}\text{C}$  と  $^{12}\text{C}$  を区別しないので、生物が大気から吸収して体内に蓄積する  $^{14}\text{C}$  濃度も一定
  - 生物の死後は新たに  $^{14}\text{C}$  を吸収することがないので  $^{14}\text{C}$  は式 (111) に従って減少
  - 安定な  $^{12}\text{C}$  の数は不変なので、 $^{12}\text{C}$  と  $^{14}\text{C}$  の比から死後の年数を推定

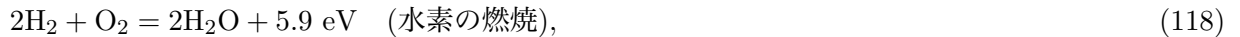
## 問題 5.2

Bq (ベクレル) は放射性物質の量を時間当たりの崩壊数で測る単位で、1 秒間に平均 1 回の崩壊が起きるとき 1 Bq と定義される。

- 1) 崩壊定数  $\lambda$  [ $\text{s}^{-1}$ ] の原子核が  $N$  個存在すると何 Bq か、また半減期  $T_{1/2}$  [s] の原子核が  $N$  個存在すると何 Bq か、それぞれ答えよ。
- 2) 半減期  $T_{1/2}$  [s] の原子核が  $B_0$  Bq 存在するとき、 $t$  秒後には何 Bq になっているか答えよ。
- 3)  $^{131}\text{I}$  の半減期を 8 日とする。 $^{131}\text{I}$  が  $10^4$  Bq 存在するとき、30 日後には何 Bq になっているか答えよ。
- 4)  $^{134}\text{Cs}$  の半減期を 2 年、 $^{137}\text{Cs}$  の半減期を 30 年とする。両者が共に  $B_0$  Bq 存在する場合、 $t$  年後のベクレルで測った  $^{134}\text{Cs}/^{137}\text{Cs}$  の比はどのように変化するか。

### 5.3 核反応の $Q$ 値と崩壊

- 核反応：始状態と異なる核種の終状態へ遷移する過程
- 反応の  $Q$  値：始状態と終状態の静止エネルギーの差



弾性散乱 ( $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$  のように始状態と終状態が同じ) では  $Q = 0$

- 一般の反応での  $Q$  値：

$$Q = \sum_{k=1}^{N_i} m_k^{(i)} - \sum_{n=1}^{N_f} m_n^{(f)} \quad (120)$$

$m_k^{(i)}$ ：始状態の粒子の質量 ( $k = 1, 2, \dots, N_i$  は粒子を指定するラベル)

$m_n^{(f)}$ ：終状態の粒子の質量 ( $n = 1, 2, \dots, N_f$  は粒子を指定するラベル)

- 崩壊の場合、始状態の粒子は親核 1 つなので

$$Q = m^{(i)} - \sum_{k=1}^{N_f} m_k^{(f)} \quad (121)$$

- 崩壊が起こるためには  $Q > 0$  である必要がある ( $Q$  は運動エネルギーに使われる)  
 $\Rightarrow$  終状態に含まれる粒子の質量 (静止エネルギー) の和は始状態より小さい

### 5.4 $\alpha$ 崩壊

- $\alpha$  崩壊による核種の変化



- $Z$  を減らす反応なので、クーロン斥力の大きい**重い核** ( $A \gtrsim 150$ ) で起こる
- 反応の  $Q$  値

$$\begin{aligned} Q &= M(A, Z) - M(A - 4, Z - 2) - M(4, 2) \\ &= Zm_H + (A - Z)m_n - B(A, Z) \\ &\quad - [(Z - 2)m_H + (A - Z - 2)m_n - B(A - 4, Z - 2)] \\ &\quad - [2m_H + 2m_n - B(4, 2)] \\ &= -B(A, Z) + B(A - 4, Z - 2) + B(4, 2) \end{aligned} \quad (123)$$

- $\alpha$  (二重魔法核) は結合エネルギー  $B(4, 2)$  が大きいので、他の核種の放出より  $Q$  値を正にしやすい