

4 原子核の構造

- 2.4.3 節の質量公式は結合エネルギーの局所的な増加（魔法数）を説明できない
- フェルミガス模型のように粒子相関が弱い描像がなぜ原子核を記述するか？
- 目標：魔法数を説明する殻模型を導入し、核力の性質に基づいて独立粒子描像が成立する理由を説明する

4.1 魔法数

4.1.1 原子核の魔法数

- **魔法数** (magic number)：原子核の結合エネルギーが大きくなる（=安定になる）特定の Z または N

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \quad (80)$$

- 中性子分離エネルギー：原子核から中性子を一つ分離するのに必要なエネルギー

$$S_n(N, Z) = B(N, Z) - B(N - 1, Z) \quad (81)$$

$S_n(N, Z) > 0$ なら (N, Z) の核の方が安定

図 13 左に S_n の実験値と質量公式から求めた計算値の差を示す

魔法数に向かって中性子分離エネルギーが増大し、魔法数を過ぎると急激に減少する

- **二重魔法核** (doubly magic nuclei)： Z も N も魔法数で特に安定な原子核
例) ${}^4\text{He}(Z = 2, N = 2)$ 、 ${}^{16}\text{O}(Z = 8, N = 8)$ 、 ${}^{40}\text{Ca}(Z = 20, N = 20)$ 、 ${}^{208}\text{Pb}(Z = 82, N = 126)$
- Z または N が魔法数になる核種は他より安定なため元素合成で作られやすい
⇒ 近傍の核に比べて存在比が大きい

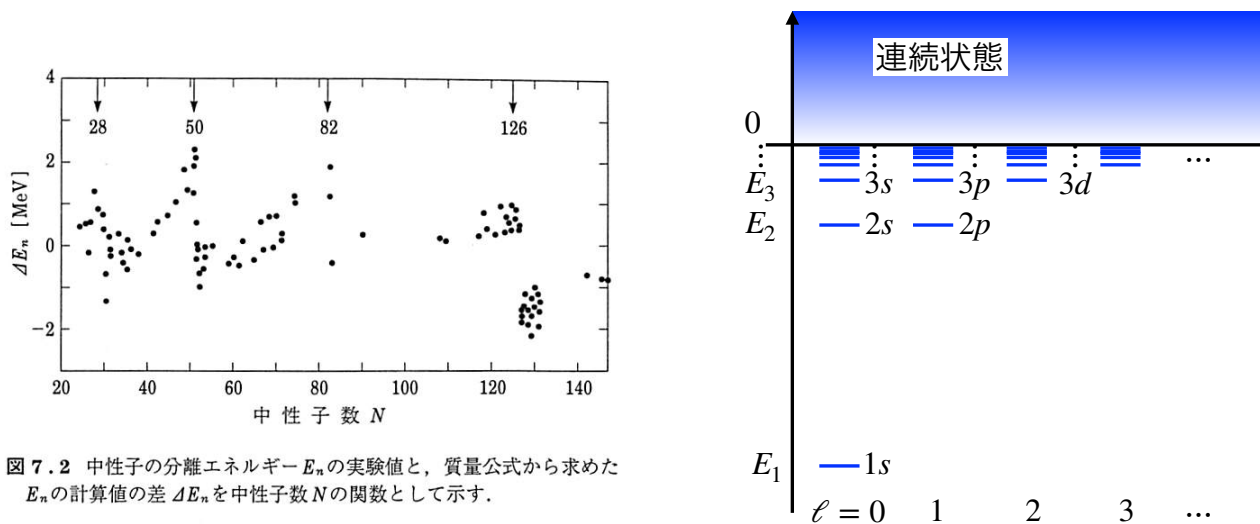


図 7.2 中性子の分離エネルギー E_n の実験値と、質量公式から求めた E_n の計算値の差 ΔE_n を中性子数 N の関数として示す。

図 13: (左) 中性子分離エネルギーの振る舞い。鷲見義雄 著「原子核物理入門」(裳華房) p.173 図 7.2 から引用。(右) 水素原子のエネルギー準位の模式図。

4.1.2 原子の魔法数と殻構造

- 原子（原子核+電子）の魔法数：貴（希）ガス（化学的に安定な元素）

$$2, 10, 18, 36, 54, 86 \quad (82)$$

- 起源は**殻構造** (shell structure)
原子核が作るクーロンポテンシャル中の電子の多体問題、電子間の相互作用は弱い
- 原子のエネルギー準位：主量子数 n と軌道角運動量 l で $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, \dots$ と存在 (図 13 右)
各準位の縮退度は、軌道角運動量 l に対し $2l + 1$ 、スピン \uparrow, \downarrow があるのでその 2 倍で計 $4l + 2$
電子を下から詰めた場合、遮蔽効果により d 軌道が上がるので占有される準位が表 4 のようになる
ある殻が全て占有されることを「殻が閉じる」と表現し、このときエネルギーが安定（貴ガス）になる
殻構造は周期律の起源 (図 14)

表 4: 原子の殻と魔法数

殻の番号	占有される準位 (nl と表記)	電子の占有数	積算占有数
1	$1s$	2	2
2	$2s, 2p$	$2 + 6 = 8$	10
3	$3s, 3p$	$2 + 6 = 8$	18
4	$4s, 3d, 4p$	$2 + 10 + 6 = 18$	36
5	$5s, 4d, 5p$	$2 + 10 + 6 = 18$	54

Atomic Periodic Table of the Elements

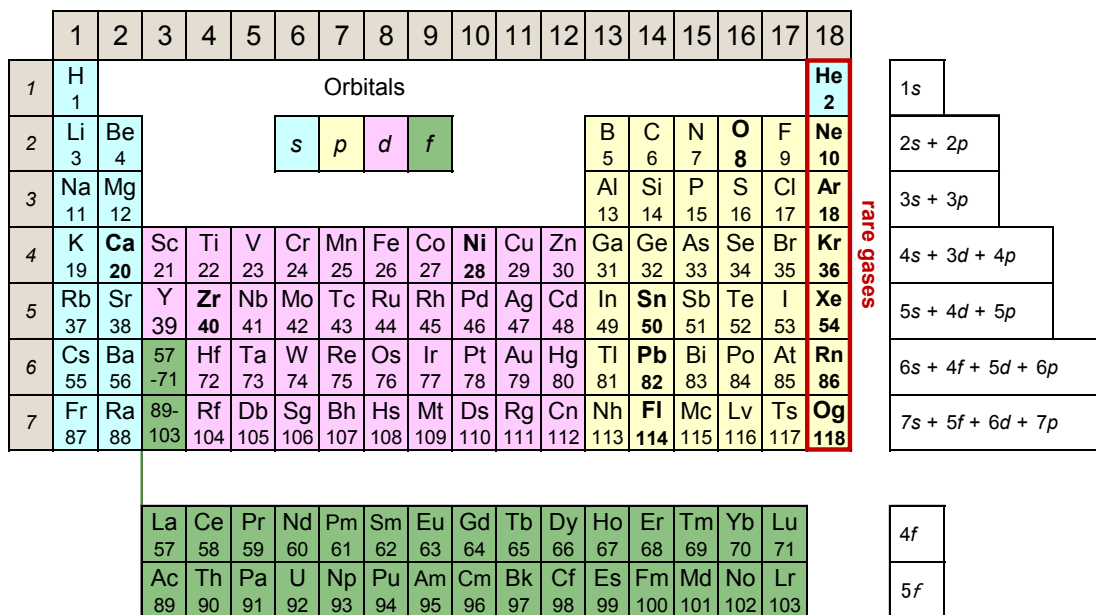


図 14: 原子の周期表。 <http://ss.scpphys.kyoto-u.ac.jp/elementouch/index.html> から引用。

4.2 原子核の殻模型

4.2.1 殻模型の概念

- 原子核の**殻模型** (shell model) の提唱：メイヤーとヤンセン、1949年、後にノーベル賞
原子の殻構造の類推で、原子核を殻模型で考えて魔法数を説明する
彦坂忠義は1934年ごろ同様の模型を提案していた
- 考え方
 - ハミルトニアン：強い二体核力 V_{ij} の和 \rightarrow 平均一体ポテンシャル V_{shell} + 弱い残留相互作用 v_{res}
 - 波動関数：多体波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \rightarrow$ 1核子波動関数 $\psi_i(\mathbf{r})$ の積
 - 陽子と中性子は別々に考えるので1つの準位の (スピンによる) 縮退度は2
- 具体的な表記
 - 本来の原子核のハミルトニアンと波動関数 (A 粒子系)

$$H\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \left[\sum_{i=1}^A \frac{\mathbf{p}_i^2}{2M_N} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \sum_{j=1(\neq i)}^A V_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (83)$$

- 殻模型のハミルトニアン H_{shell}

$$H_{\text{shell}}\psi_i(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2M_N} + V_{\text{shell}}(\mathbf{r}) \right] \psi_i(\mathbf{r}) \quad (i = 1, \dots, A), \quad (84)$$

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) = \mathcal{A} \prod_{i=1}^A \psi_i(\mathbf{r}_i) \quad (85)$$

$\psi_i(\mathbf{r})$ は i 番目の核子の波動関数、 \mathcal{A} は反対称化演算子 (スレーター行列式)

- 殻模型のエネルギー準位

$$E = E_{\text{shell}} + \langle v_{\text{res}} \rangle, \quad (86)$$

$$H_{\text{shell}}\psi_i(\mathbf{r}) = E_{\text{shell}}\psi_i(\mathbf{r}), \quad \langle v_{\text{res}} \rangle = \int d^3r \psi_i^*(\mathbf{r}) v_{\text{res}} \psi_i(\mathbf{r}) \quad (87)$$

- **平均一体ポテンシャル** $V_{\text{shell}}(\mathbf{r})$
注目している核子以外からの核力の総和で核子を原子核中に閉じ込める働きをする
原子の場合のクーロンポテンシャルに対応、つまり原子核を束縛するのは (83) では V_{ij} 、(84) では V_{shell}
- **残留相互作用** (residual interaction) v_{res}
 $V_{\text{shell}}(\mathbf{r})$ で取り込めきれなかった核力の効果 (対相関など)
摂動で取り扱える程度に弱いと仮定する
- **独立粒子描像**：核子の複雑な多体問題 (83) を 1体問題 (84) の重ね合わせに近似
 $V_{\text{shell}}(\mathbf{r})$ を一辺 L の立方体の箱の閉じ込めポテンシャル、 $v_{\text{res}} = 0$ とすればフェルミガス模型になる
4.3節で描像の正当化を議論するが、あくまで近似であって式 (83) から導出できるわけではない

4.2.2 平均一体ポテンシャル：中心力

- 平均一体ポテンシャル $V_{\text{shell}}(\mathbf{r})$ として 3 次元調和振動子

$$V_{\text{HO}}(r) = -\frac{3}{2}\omega + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (88)$$

エネルギー固有値：

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \omega(n_x + n_y + n_z) \quad (89)$$

n_x, n_y, n_z は非負整数、エネルギーは ω の整数倍で等間隔

- 同じエネルギーに対し複数の (n_x, n_y, n_z) の組み合わせが存在（縮退度）

$$E = 0: (n_x, n_y, n_z) = (0, 0, 0) : 1 \text{ 通り}$$

$$E = \omega: (n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) : 3 \text{ 通り}$$

- $N = n_x + n_y + n_z$ の可能な組み合わせ (N 個のボールを 3 つに分ける)

$${}_{N+2}C_2 = \frac{(N+2)!}{N!2!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2} \quad (90)$$

- 各エネルギーの縮退度と詰められる核子の数を表 5 に示す
魔法数 **2, 8, 20** が説明できるが、それより大きな魔法数は再現しない
- 極座標表示でのエネルギー固有値：

$$E_{n, \ell} = \omega[2(n-1) + \ell] \quad (91)$$

$N = 2(n-1) + \ell$ として可能な $n = 1, 2, 3, \dots, \ell = s, p, d, \dots$ の準位を表 5 に示す

縮退度は直交座標の計算と一致

電子の場合（表 4）と比較すると殻ごとに占有する準位が異なるので魔法数が異なる

表 5: 3次元調和振動子ポテンシャルの魔法数

N	準位の縮退度 (直交座標)	占有される準位 (nl と表記)	核子の占有数	積算占有数
0	$(0+2)(0+1)/2 = 1$	1s (1)	2	2
1	$(1+2)(1+1)/2 = 3$	1p (3)	6	8
2	$(2+2)(2+1)/2 = 6$	1d, 2s (5 + 1 = 6)	12	20
3	$(3+2)(3+1)/2 = 10$	1f, 2p (7 + 3 = 10)	20	40
4	$(4+2)(4+1)/2 = 15$	1g, 2d, 3s (9 + 5 + 1 = 15)	30	70
5	$(5+2)(5+1)/2 = 21$	1h, 2f, 3p (11 + 7 + 3 = 21)	42	112

問題 4.1

1) ポテンシャルが調和振動子 (88) の場合の時間に依存しない 3 次元シュレディンガー方程式を直交座標 (x, y, z) で表し、波動関数を $\Psi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ と書いて変数分離し、 X, Y, Z が 1 次元調和振動子のシュレディンガー方程式に従うことを示せ。ただし粒子の質量は m とする。

2) 1 次元調和振動子の固有エネルギーが非負整数 n を用いて $\omega(n+1/2)$ となることを利用して (89) を導け。

4.2.3 スピン軌道力

- **スピン軌道力** (LS 力)：メイヤーとヤンセンが導入した相互作用

$$V_{LS}(\mathbf{r}) = v_{LS}(r)(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}) \quad (92)$$

\mathbf{s} は核子のスピン演算子、 $\boldsymbol{\ell}$ は原子核の重心からはかった核子の軌道角運動量演算子 (図 15 左)
 $\boldsymbol{\ell}$ と \mathbf{s} は独立なので交換する： $[\ell_i, s_j] = 0$

- LS 力があっても全角運動量 $\mathbf{j} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{s}$ の大きさと第 3 成分は保存

$$[\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}, \mathbf{j}^2] = [\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}, j_3] = 0 \quad (93)$$

- 調和振動子などの V_{shell} のみ場合、状態は主量子数 n と軌道角運動量の大きさ ℓ で指定される (表 5)

$$|n\ell\rangle = |1s\rangle, |1p\rangle, |2s\rangle, \dots \quad (94)$$

$V_{LS} \neq 0$ の場合、主量子数 n 、軌道角運動量の大きさ ℓ と全角運動量の大きさ j で指定される

$$|n\ell j\rangle = |1s_{1/2}\rangle, |1p_{1/2}\rangle, |1p_{3/2}\rangle, |2s_{1/2}\rangle, \dots \quad (95)$$

なお、原子核物理では、式 (91) の主量子数を $E_{n',\ell} = \omega[2n' + \ell]$ のように定義し (つまり $n' = n - 1$)、 $0s_{1/2}$ 、 $0p_{3/2}$ 、のように準位を呼ぶことも多い

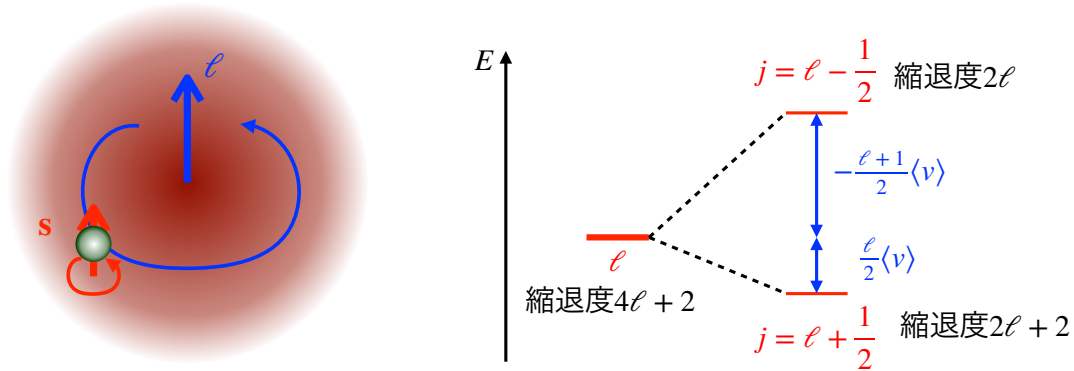


図 15: 左：殻模型の軌道角運動量 $\boldsymbol{\ell}$ とスピン \mathbf{s} 、右： LS 力による準位の分離。

問題 4.2

- 1) $[\ell_i, \ell_j] = i\epsilon_{ijk}\ell_k$ 、 $[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k$ 、 $[\ell^2, \ell_i] = [\mathbf{s}^2, s_i] = 0$ を用いて $[\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}, \ell^2] = [\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}, \mathbf{s}^2] = 0$ を示せ。
- 2) $[\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}, \ell]$ 、 $[\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}, \mathbf{s}]$ を計算せよ。これが 0 にならないので s_3 と ℓ_3 は LS 力があると保存しない。
- 3) 式 (93) を示せ。

- $\ell \geq 1$ の状態に対して取りうる j は

$$j = \ell \pm 1/2 \quad (96)$$

$j = \ell + 1/2$ は $\boldsymbol{\ell}$ と \mathbf{s} が平行、 $j = \ell - 1/2$ は $\boldsymbol{\ell}$ と \mathbf{s} が反平行

- $V_{LS}(\mathbf{r}) = 0$ の場合： ℓ のみでエネルギーが決まるので $j = \ell \pm 1/2$ の状態全てエネルギーは同じ
軌道とスピンを合わせた縮退度は

$$2 \times (2\ell + 1) = 4\ell + 2 \quad (97)$$

- $V_{LS}(\mathbf{r}) \neq 0$ の場合： $j = \ell + 1/2$ の状態と $j = \ell - 1/2$ の状態でエネルギーが異なる
それぞれの縮退度は（スピン自由度は j を作る際に使ったので）

$$2(\ell + 1/2) + 1 = 2\ell + 2 \quad (j = \ell + 1/2), \quad (98)$$

$$2(\ell - 1/2) + 1 = 2\ell \quad (j = \ell - 1/2) \quad (99)$$

つまり $4\ell + 2$ 個の縮退した状態が **LS 力** で $2\ell + 2$ 個と 2ℓ 個に**分離する**（縮退が解ける）

- LS 力の効果を摂動で評価すると（スピンは常に $s = 1/2$ ）

$$\langle nl_j | \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s} | nl_j \rangle = \frac{1}{2} \langle nl_j | \mathbf{j}^2 - \boldsymbol{\ell}^2 - \mathbf{s}^2 | nl_j \rangle = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (100)$$

であるので

$$\langle nl_j | V_{LS}(\mathbf{r}) | nl_j \rangle = \begin{cases} \frac{\ell}{2} \langle v_{LS} \rangle & j = \ell + 1/2 \\ -\frac{\ell+1}{2} \langle v_{LS} \rangle & j = \ell - 1/2 \end{cases} \quad (101)$$

$\langle v_{LS}(r) \rangle$ は波動関数の空間成分による期待値

LS 力は引力であることが知られているので $\langle v_{LS} \rangle < 0$

$j = \ell + 1/2$ が下がり、 $j = \ell - 1/2$ 上がる（図 15 右）

- LS 力による 2 つの準位のエネルギー差は

$$\Delta E_\ell = E_{\ell-1/2} - E_{\ell+1/2} = -\frac{1}{2}(2\ell + 1)\langle v_{LS} \rangle \quad (102)$$

ℓ が大きいほど分離が大きい

- $\ell = 0$ の状態に対して取りうる j は $j = 1/2$ のみ
LS 力は期待値を持たない（準位を変化させない）

$$\langle ns_{1/2} | V_{LS}(\mathbf{r}) | ns_{1/2} \rangle = 0 \quad (103)$$

問題 4.3

- 1) 式 (100) を用いて式 (101) を示せ。ただし $\langle nl_j | v_{LS}(r)(\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s}) | nl_j \rangle = \langle v_{LS} \rangle \langle nl_j | \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s} | nl_j \rangle$ である。
- 2) 式 (100) を用いて式 (103) を示せ。

- 原子中の電子にも相対論効果から LS 力が存在（ディラック方程式から導出）

$n = 2$ の状態の結合エネルギー B_2 と LS 力による $2p_{1/2}$ と $2p_{3/2}$ のエネルギー差 ΔE の比は

$$\frac{\Delta E}{B_2} = \frac{1}{4}\alpha^2 \sim 1.3 \times 10^{-5} \quad (104)$$

$\alpha \sim 1/137$ は微細構造定数

つまり原子での LS 力はエネルギー準位のオーダーに比べて小さい（微細構造）

- 実験データによる原子核での LS 力の強さの見積もり

$$\langle v_{LS} \rangle \simeq -30A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (105)$$

- 中心力が調和振動子の場合の（摂動前の）準位間隔

$$\omega \simeq -41A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (106)$$

⇒ 原子核では**強い LS 力**（中心力ポテンシャルの作るエネルギー準位と同じオーダー）

- 平均一体ポテンシャル V_{shell} として井戸形ポテンシャルや現実的な Woods-Saxon ポテンシャルを用いると、 ℓ の大きい準位が表 6 第 1 列の順に並ぶ
- LS 力によって **ℓ の大きな準位** ($1f, 1g, 1h, 1i$) が大きく分離し、 $j = \ell + 1/2$ 状態が下の殻（調和振動子の N ）に混ざり込み魔法数を説明する

表 6: 原子核の魔法数

V_{shell} のみ ($n\ell$)	$V_{LS} \neq 0$ の場合 ($n\ell_j$)	核子の占有数	積算占有数	調和振動子の魔法数
1s	1s _{1/2}	2	2	2
1p	1p _{3/2}	4	6	8
	1p _{1/2}	2	8	
1d	1d _{5/2}			
	1d _{3/2}			
2s	2s _{1/2}		20	20
1f	1f _{7/2}		28	
2p	1f _{5/2}			40
1g	1g _{9/2}		50	
2d	1g _{7/2}			70
3s				
1h			82	
2f				112
3p				
1i			126	

問題 4.4*

表 6 の第 2,3,4 列を完成させて状態数を数え、魔法数が実現していることを確認せよ。